



MODELOS MATEMÁTICOS COMPARTIMENTADOS

Gustavo Adolfo Juárez
Silvia Inés Navarro

**MODELOS
MATEMÁTICOS
COMPARTIMENTADOS**

Modelos matemáticos compartimentados

Gustavo Adolfo Juárez ; Silvia Inés Navarro (Compiladores)

Modelos matemáticos compartimentados / Gustavo Adolfo Juárez ... [et al.] ; compilación de Gustavo Adolfo Juárez ; Silvia Inés Navarro. - 1a ed. - Catamarca : Editorial Científica Universitaria de la Universidad Nacional de Catamarca, 2022.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-661-424-5

1. Matemática. I. Juárez, Gustavo Adolfo, comp. II. Navarro, Silvia Inés, comp. CDD 510.2

ISBN: 978-987-661-424-5

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723.

E.C.U. 2022

Avda. Belgrano 300 - Pab. Variante I - Planta Alta - Predio Universitario - San Fernando del Valle de Catamarca - 4700 - Catamarca - República Argentina

Prohibida la reproducción, por cualquier medio mecánico y/o electrónico, total o parcial de este material, sin autorización del autor. Todos los derechos de autoría quedan reservados por el autor.

MODELOS MATEMÁTICOS COMPARTIMENTADOS

GUSTAVO ADOLFO JUAREZ
SILVIA INÉS DEL VALLE NAVARRO
(compiladores)

MODELOS MATEMÁTICOS COMPARTIMENTADOS

Autores

Gustavo A. Juarez, Sonia L. Mascareño, Efraín O.
Nieva, Silvia Inés del V. Navarro, María Luz del V.
Quiroga, Silvia V. Romero, Luis E. Valdez

ÍNDICE

	Pág.
Prologo	11
Agradecimiento	13
Recomendaciones al lector	15
CAPÍTULO 1: MODELOS MATEMÁTICOS Gustavo A. Juarez - Silvia Inés del V. Navarro	17
1.1. Introducción a los Modelos Matemáticos	19
1.2. Formulación de los Modelos Matemáticos	23
1.3. Etapas de la modelización matemática	25
1.4. Métodos para resolver un problema	33
1.5. Características de los Modelos Matemáticos	35
CAPÍTULO 2: MODELOS MATEMÁTICOS COMPARTIMENTADOS DISCRETOS Luis E. Valdez - Silvia V. Romero - Efraín O. Nieva - Silvia Inés del V. Navarro - Gustavo A. Juarez	39
2.1. Introducción a los Modelos Compartimentados Discretos	41
2.2. Sucesiones Recurrentes	42
2.3. Ecuaciones en Diferencias	43
2.4. Método de los Compartimentos	47
2.5. Modelos Unicompartmentados	48
2.5.1. Modelo Unicompartmentado Cerrado	48
<i>Aplicación I: Modelo de Capitalización</i>	49
2.5.2. Modelo Unicompartmentado No Cerrado	50
<i>Aplicación II: Modelo lineal en Dinámica Poblacional</i>	50
<i>Aplicación III: Modelo Cuadrático en Dinámica Poblacional</i>	51
<i>Aplicación IV: Modelo Lineal con Retardo en Dinámica Poblacional</i>	53
2.6. Modelos Bicompartimentados	55
<i>Aplicación V: Modelo lineal No Cerrado en Dinámica Poblacional de dos Especies</i>	55
<i>Aplicación VI: Modelo Lineal Cerrado en Dinámica Poblacional de dos Especies</i>	56
<i>Aplicación VII: Modelo Cuadrático en Dinámica Poblacional de dos Especies</i>	57
2.7. Modelos Tricompartimentados	58
<i>Aplicación VIII: Modelo Lineal Cerrado en Competencia de Negocios</i>	59

CAPÍTULO 3: MODELOS MATEMÁTICOS COMPARTIMENTADOS CONTINUOS	61
María Luz del V. Quiroga - Sonia Laura Mascareño - Silvia Inés del V. Navarro - Gustavo A. Juarez	
3.1. Introducción a los Modelos Compartimentados Continuos	63
3.2. Modelos Unicompartmentados	64
3.2.1. Modelo Unicompartmentado cerrado	66
<i>Aplicación IX: Modelo lineal de Dinámica Poblacional i</i>	67
<i>Aplicación X: Modelo lineal de Dinámica Poblacional ii</i>	67
<i>Aplicación XI: Modelo de Tensión Superficial</i>	68
3.2.2. Modelo Unicompartmentado No Cerrado	72
<i>Aplicación XII: Modelo de Producción</i>	73
<i>Aplicación XIII: Modelo Exponencial en Dinámica Poblacional</i>	74
<i>Aplicación XIV: Modelos Unicompartmentado No Cerrado de la Física-Acústica de la Quena</i>	75
<i>Aplicación XV: Modelo lineal de Dinámica Poblacional iii</i>	81
3.3. Modelos Bicompartmentados	85
3.3.1. Modelo Bicompartmentado No Cerrado	85
<i>Aplicación XVI: Modelo Bicompartmentado de la Dinámica Poblacional</i>	85
<i>Aplicación XVII: Modelos de la Ley de Enfriamiento de Newton</i>	87
3.3.2. Modelo Bicompartmentado Cerrado	92
<i>Aplicación XVIII: Modelos del Marcapaso Cardíaco</i>	92
3.3.3. Modelo Bicompartmentado cuadrático	101
<i>Aplicación XIX: Modelo Bicompartmentado Presa Depredador</i>	101
3.4. Modelos Tricompartmentados	102
<i>Aplicación XX: Modelo del Movimiento Oscilatorio-vibratorio de masa-resorte</i>	102
<i>Aplicación XXI: Modelo Epidemiológico</i>	109
CAPÍTULO 4: SIMULACIÓN DE MODELOS MATEMATICOS COMPARTIMENTADOS	115
María Luz del V. Quiroga - Silvia Inés del V. Navarro - Gustavo A. Juarez	
4.1. Introducción	117
4.2. Problemas con Valores Iniciales Discretos	118
4.3. Simulación bajo Dinámica de los Sistemas	119
4.4. PVID con EED de Segundo Orden	124
<i>Aplicación XXII: Progresión Geométrica de Oro</i>	129
4.5. PVID con SEED de dos ecuaciones lineales con dos sucesiones incógnitas	135
4.6. SEED cuadrático de dos ecuaciones con dos sucesiones incógnitas	136
4.7. SEED con tres ecuaciones simultáneas	139
4.8. Análisis Comparativo de EED	140
<i>Aplicación XXIII: Simulación de Modelo Epidemiológico</i>	141
4.9. EED con coeficiente variable	144
4.9.1. Forma Lineal del Coeficiente	144
4.9.2. Forma Cuadrático del Coeficiente	146

4.9.3. Las funciones seno y coseno en el coeficiente	148
CAPÍTULO 5: AJUSTES DE DATOS EXPERIMENTALES	153
Gustavo A. Juarez - Silvia Inés del V. Navarro	
5.1. Ajuste de datos experimentales a curvas	155
5.2. Parámetros de ajustes	155
5.3. Método de Mínimos Cuadrados	157
5.4. Ajuste de Modelos Lineales	158
5.5. Ajuste de Modelos Cuadráticos	162
5.6. Ajuste de Modelos Exponenciales	165
5.7. Ajuste de Modelos Geométricos	168
5.8. Ajuste Lineal de Modelos Hiperbólicos	170
5.9. Ajuste Lineal de Modelos Exponencial Asintótico	172
5.9.1. Crecimiento exponencial asintótico	173
<i>Aplicación XXIV: Modelo de Carga y Descarga de un Condensador</i>	173
5.9.2. Decrecimiento Exponencial Asintótico	173
<i>Aplicación XXV: Modelo de un motor de revolución</i>	175
5.10. Ajuste a la función de Aprendizaje	177
<i>Aplicación XXVI: Modelos de Aprendizaje</i>	178
5.11 Ejemplos de uso de escala logarítmica	181
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	187

PRÓLOGO

Este material bibliográfico es el resultado de muchos años de trabajo docente y de investigación dedicado a la enseñanza de *Modelos Matemáticos*. En particular, aquí se desarrollan los *Modelos Matemáticos Dinámicos*, como una forma de introducir al lector en el mundo de la modelización matemática. Los resultados de los distintos trabajos que se presentan como aplicación en varios capítulos han sido contrastados a partir de trabajos experimentales llevados a cabo con los estudiantes de las carreras de Licenciatura en Física y Profesorado en Física que requerían la obtención de su trayecto formativo final en investigación como en docencia. Desde lo estructural, trabajos finales de licenciatura en Matemáticas, aportaron al crecimiento teórico de los modelos dinámicos, en particular los discretos.

A estos trabajos tuvimos la oportunidad de presentarlos en Congresos y Reuniones Científicas, lo cual nos permitió identificar necesidades emergentes para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje respetando las condiciones estructurales y de bases de los estudiantes.

La aplicación de los Modelos Matemáticos Dinámicos, ya sea en forma de presentación o bien en proceso de creación, adecuadamente dimensionados a la realidad del nuevo sistema educativo, incorporando nuevas tecnología, sin dejar de preservar identidades culturales, es un medio por el cual el estudiante alcanza un mejor desempeño y logra convertirse en uno de los principales agentes de cambios.

El aporte principal dado aquí es el de implementar en los Modelos Matemáticos Dinámicos el enfoque de los *compartimentos*, mediante los cuales, clasificaciones que poseen los elementos bajo estudio pueden ser interpretados a lo largo del tiempo, que se trasladan de uno a otros compartimentos, siendo este un esquema presente en diversas problemáticas de lo cotidiano.

La colaboración en los distintos capítulos del libro es el fruto de la dedicación de cada uno de ellos, por buscar alcanzar nuevos conocimientos que nos permite enriquecernos mutuamente. La esperanza es que la misma pasión se traslade a los distintos lectores.

Compiladores

AGRADECIMIENTO

Los autores extienden su profundo reconocimiento a los que siendo estudiantes, hoy son Docentes e Investigadores, que fueron formándose en distintas áreas, y contribuyeron al fortalecimiento de esta obra.

Entre ellos, nuestros tesisistas desde la Matemáticas, *Luis Alberto Berrondo, Luis Alfredo Salas, Noelia Saleme e Ivana Sánchez*, y los tesisistas desde la Física, *Teresita E. Humana, Sonia Laura Mascareño, César Rubén Nieva, Guillermo Sebastián Lingua, María Luz del V. Quiroga, Ernesto Schlittler, Karina R. Luna, Alberto A. Peloso, Andrea G. Roldán*. Colegas de los cuales, algunos fueron alumnos, muchos de ellos integraron algunos de los grupos de investigación, *Silvia Vanessa Romero, Guillermo N. Leguizamón, Ariadna Hammann, Efraín O. Nieva, Luis Barros, Hanne D. Coria, Ángela D. Velazco*. Varios de los citados, nos acompañan en la redacción de los capítulos aquí presentados. Un agradecimiento enorme a *Luis Ernesto Valdez*, que desde su *Matemática Financiera*, descubrimos que recorríamos el mismo camino desde dos puntos distintos, y logró actualizar el software inicial *de Ecuaciones en Diferencias* realizando los ajustes para que pudiera ser más amigable. A *Adolfo Ramón Aguirre*, que me sugirió un texto abandonado en el tiempo, conteniendo un enfoque de medio siglo atrás de las Ecuaciones en Diferencias. A *Homero Arnoldo Costa (†)*, que con sus *Variantes del Método de Inducción Completa*, y sus aplicaciones a *Sucesiones Recurrentes*, supe interpretar las conversaciones que mantuve con él aun cuando ya no estaba. Una muestra de ello fue un desarrollo que acuño de una de sus obras: las *Ecuaciones Recíprocas y Semirrecíprocas*.

Asimismo, se extiende un agradecimiento a los que compartieron sus conocimientos, experiencia e ideas, colaborando con entusiasmo para concretar con éxito un aporte a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La formación en modelado matemático con *Ernesto N. Martínez* del Instituto Balseiro, *Fernando Momo* de la Universidad de General Sarmiento, aunque lo conocí de la época de la Universidad de Lujan. A la buena predisposición siempre atenta aunque también a la distancia de *Rodney Carlos Bassanezi*, de la Universidad Estatal de Campinas y luego su actividad la desarrolló en la Universidad Federal de ABC (UFABC), Brasil.

Descubrir los modelos bajo *Dinámica de Sistemas*, fue un aporte que se refleja en ésta obra, dado por el desarrollo de los diagramas de flujos y el uso del software VensimPle, por lo que agradecemos a *Juan Martín García*, por aquel entonces de la Universidad Politécnica de Catalunya, actualmente en la Politécnica de Madrid, y a la publicación que él dirige: *Boletín de Dinámica de Sistemas*.

A quienes han sido los alumnos, directamente o indirectamente, en las diferentes asignaturas, optativas y cursos o talleres en diversas reuniones científicas, el agradecimiento por cada aporte que a veces parecía una simple observación, pero que contribuyen al fortalecimiento de esta obra. A todos, nuestro más grande agradecimiento por acompañarnos en esta aventura del conocimiento.

Deseamos agradecer al personal del Editor Científica Universitaria de la Universidad Nacional de Catamarca (ECUUNCA), especialmente al Director del Editorial, Ciro César Carrizo, por sus inestimables sugerencias y su cooperación para llevar a cabo esta publicación, a la administrativa Noelia Ariza, y a Juan José Salas por su diagramación y diseño de tapa.

RECOMENDACIONES AL LECTOR

La implementación del contenido de ésta obra, dentro de la formación de Profesores de Matemática la realizamos desde hace más de dos décadas, y se ha extendido a la formación de Físicos y Biólogos en nuestro grupo de investigación. La recepción de tales contenidos en Congresos y Reuniones mediante dictado de talleres y exposiciones, nos ha permitido motivarnos para realizar nuevos enfoques didácticos tales como la incorporación del denominado *compartimentado de los modelos dinámicos*.

Esperando que pueda ser incorporado como contenido en la formación de Profesores de Matemáticas en diversos lugares, es que hemos trabajado en la divulgación de este material.

Las primeras presentaciones fueron de la mano, como aun hoy lo sigue siendo, sin nunca desfallecer, de *Silvia Inés del V. Navarro*, que desde la Física, nos propone temas y nos acompaña en las aplicaciones y del soporte teórico proveniente de las Ecuaciones Diferenciales.

Por ello, esto puede conformar contenidos en asignaturas optativas de formación previas a quienes desean realizar trabajos finales en matemática aplicada, modelización matemática, tanto desde la matemática, como de la física, biología, ciencias naturales, economía, ciencias de la salud, ciencias sociales, entre otras.

CAPÍTULO 1:
MODELOS MATEMÁTICOS

Gustavo A. Juarez
Silvia Inés del V. Navarro

1.1. Introducción a los Modelos Matemáticos

Una de las aplicaciones más importantes que tienen actualmente las Matemáticas es su implementación en el estudio de fenómenos que pueden ocurrir en los distintos ámbitos de las diferentes ciencias o disciplinas, y que pretenden ser descritos mediante alguna expresión matemática, sea ésta determinística o probabilística. Esto implica realizar una representación de tal fenómeno, lo cual se denomina *modelo matemático*.

Los modelos matemáticos son una representación de los resultados que se producen mediante la aplicación de un fenómeno, más aún, la expresión paso a paso de la ocurrencia del fenómeno, se da en forma dinámica bajo la denominación de *simulación*.

Un **Modelo Matemático** es por lo tanto una representación matemática simplificada de un cierto tipo de fenómenos reales. Aquí interviene alguna de las partes de la matemática para expresar tal fenómeno, por ello existen modelos analíticos, geométricos, variacionales, algebraicos, estadísticos, probabilísticos, etc.

En la creación de un modelo matemático hay un proceso de conceptualización, mediante el cual se realiza una abstracción de los elementos reales que participan, a fin de denotarlos matemáticamente. Se parte de una idea intuitiva y se introduce el concepto inspirado de tal idea, mediante algunas de sus propiedades básicas, prescindiendo después del punto de partida intuitivo.

El conjunto de propiedades, entre ellos teoremas, que se deducen mediante razonamientos lógicos de los axiomas, constituye la Ciencia Matemática a que nos referimos: Teoría de Probabilidades, Teoría de Juegos, Programación Lineal, Análisis Variacional Continuo o Discreto, etc.

Para la aplicación de la teoría construida, hay un segundo proceso de desconceptualización, que consiste en traducir los resultados logrados a la realidad concreta de partida en forma aproximada, o bien con tanta aproximación como se pueda, de allí otro concepto cual es el de optimización. Podríamos decir que la solución matemática del problema conceptualizado, debe volver a la realidad, para lo cual la solución debe ser traducida a los elementos del fenómeno, y en ese caso la solución puede carecer de exactitud. Surge así el concepto de aproximación, que mal interpretado hace pensar de una contradicción al reconocer que la matemática sea exacta. La Matemática es una ciencia exacta mientras que las soluciones de los problemas del mundo real solo se aproximan.

¿En qué medida se adapta un modelo a la realidad?, esto es una cuestión de carácter intuitivo para lo cual no se pueden dar reglas. Es más fácil decir cuando un modelo no se adapta bien a la realidad, que dar una norma rígida para aceptarlo. En efecto, en el proceso de conceptualización reconocemos variable que intervienen e influyen sobre el fenómeno, pero según sea el número de tales variables, o la forma de intervenir en el modelo, estas se van clasificando en cuales son más significativas, así es como descartamos algunas de las variables, haciendo más fácil el modelo desde el punto de vista operativo, pero corriendo el riesgo de la precisión de los resultados de acuerdo al fenómeno real. Así es como se reconoce que un modelo matemático es una caricatura de la realidad.

*A partir de allí, las Teorías pueden trabajar con hechos y fenómenos propuestos por la realidad, elaborando **Modelos** del mundo real. Esos modelos más o menos precisos, debidamente calibrados y convalidados, permiten entender y explicar, con diferentes grados de precisión y detalle, a esos hechos y fenómenos. (Bassanezi R.C., 2002)*

Según sea el fenómeno a describir podemos tener alguna herramienta matemática asociada, es más, un mismo fenómeno puede estar representado por modelos que usen distintas áreas de la matemática. En esta obra hacemos referencia a aquellos que varían con el tiempo, denominados modelos matemáticos dinámicos. Dentro de los modelos matemáticos dinámicos, su tratamiento puede ser en forma discreta, lo cual tiene sentido si se tiene observaciones experimentales determinadas en años, meses, días, horas de las distintas variables que participan en los resultados del fenómeno. En el caso de tener estimaciones más próximas, el tratamiento es continuo, lo cual se logra hacer con registros electrónicos de datos, aunque a veces por la gran cantidad de datos discretos se prefiere tomar en forma continua. Estos últimos se modelan matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales. Para el caso discreto se toma las ecuaciones en diferencias, las cuales suelen estar pocas veces desarrolladas en un plan de formación. En cualquiera de los casos se tiene la propuesta de los modelos matemáticos con una estructura más completa, pues en un modelo matemático se simplifica detalles, haciendo que algunas variables puedan no participar. Esto sea por simplicidad, o porque algunas variables aportan muy poco al resultado general, o porque sean difícil o costoso la obtención de esos registros. En un aspecto más amplio, se consideran con más detalle todas las variables o al menos la mayoría, analizando la participación de cada una de ellas en su

vinculación con las otras. Esto lleva al concepto de sistema, y por ello su teoría se denomina *dinámica de sistema*.

En efecto, las ecuaciones en diferencias son una herramienta fundamental para los sistemas dinámicos, pues siendo una sucesión de datos del experimento a estudiar, dependiente del tiempo, se trata de establecer ecuaciones que representen la relación entre distintos estados de la variable a lo largo del tiempo, así surgen expresiones que representan al fenómeno, es decir el modelo matemático.

Tal vez un primer e inmediato ejemplo está en la variación de una cantidad que varíe con el tiempo, tal como el tamaño de una población, en efecto, siendo el tiempo nuestra variable independiente y además considerándola discreta, a fin de determinar el tamaño de la población para un tiempo dado, iniciaremos nuestra representación mediante ecuaciones en diferencias del fenómeno de crecimiento. Si ese tamaño de paso de una información a la siguiente es el año, mes, día, hora resulta claro la relación entre un dato y el siguiente colocando subíndices a cada registro. Cuando este tamaño de paso, disminuye lo podemos hacer tan pequeño como podamos. La conversión del tamaño de paso a infinitamente pequeño es lo que hace cambiar una ecuación en diferencias a una ecuación diferencial.

Debemos reconocer que un sistema es un conjunto de elementos relacionados entre sí; en nuestro caso son variables que determinan el fenómeno en estudio. Tales variables se dice que forman un sistema si existe una relación de dependencia entre ellas, de manera que la variación de una de ellas influye en la variación de las restantes, esto se interpreta con el concepto de *retroalimentación* entre las variables. Tal concepto es muy útil porque nos permite partir desde la estructura del sistema que analizamos y llegar hasta su comportamiento dinámico.

Los modelos tratados bajo Sistemas Dinámicos requieren de dos herramientas matemáticas muy importantes, y que según sea la variable independiente continua o no los modelos matemáticos serán continuos o discretos. Es por ello que dedicamos un capítulo a cada uno de ellas, así el Capítulo 2: ecuaciones en diferencias y el Capítulo 3: ecuaciones diferenciales. En ambos casos por ser ecuaciones variacionales, permiten expresar modelos matemáticos dinámicos. Aquí presentamos a los mismos desde el enfoque compartimentado.

Esto implica considerar compartimentos en donde se encuentran las variables en un determinado tiempo, y que pueden permanecer o cambiar a otro compartimento el tiempo siguiente, siendo tal tiempo tratado en forma discreta o continua.

Con las herramientas a la que hacemos referencia, Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones en Diferencias, presentamos en el Capítulo 4, a los modelos matemáticos discretos bajo dinámica de sistemas, es decir a aquellos que se representan mediante ecuaciones en diferencias o sistemas de ecuaciones en diferencias. Por ello recurrimos a un software, que en dicha área se utiliza. Cuando son con Ecuaciones Diferenciales el mismo software permite realizar un tamaño de paso tan pequeño como se desee con el método gaussiano de discretización.

Por todo esto es que debemos reconocer en los modelos matemáticos una herramienta de la matemática aplicada que permite arribar a otras ciencias gracias a su carácter interdisciplinar:

La modelación matemática consiste en el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos y resolverlos interpretando sus soluciones en el lenguaje del mundo real. (Bassanezi, 2002)

Los modelos matemáticos han permitido lograr nuevos conocimientos en otras disciplinas, aportando lo que se conoce como el ahorro de tiempo y costo en la parte experimental. Así en biología se considera que su aporte ha sido comparado con el que hizo en su momento el microscopio. En las ciencias sociales, económicas y de salud han contribuido a nuevas líneas de investigación. Por ello es digno reconocer que:

*Con excepción de la ciencia Física que fueron valorizadas y evolucionara respaldada por teorías formuladas como un auxilio de la matemática, las otras ciencias **fácticas** (biología, química, psicología, economía, etc.) por regla, usaban apenas un lenguaje común para expresar sus ideas, o lo que generalmente resultaba a falta de claridad e imprecisión. La matemática viene en auxilio de estas ciencias, apenas en el análisis superficial de los resultados de investigaciones empíricas. Hacía su uso tan solamente en algunas herramientas de la estadística descriptiva evidente en un disfraz de falta de conceptos adecuados de una matemática más sustancial. (Bassanezi, 2002)*

1.2. Formulación de los Modelos Matemáticos

Al ser los modelos matemáticos una representación de algún fenómeno real expresado en términos matemáticos, debemos relacionar algún área de la matemática que se utilice. Así los modelos matemáticos pueden ser formulados de acuerdo con la naturaleza del fenómeno o situaciones analizadas y clasificadas conforme el tipo de matemática utilizada. De esta manera podemos encontrar cuatro características sobre las cuales tal expresión permita ser formulada, estas son:

- i. **Lineal o no lineal**, conforme las ecuaciones que expresan el modelo tengan esas características, puede ser desde una simple ecuación, lineal o no, o bien expresiones más elaboradas, tales como una ecuación en diferencia o diferencial, o bien matricial, que sea lineal o no.
- ii. **Estático**, cuando la variable independiente del modelo no es el tiempo. En particular cuando representa la forma de un objeto, por ejemplo, la forma geométrica de un alveolo; o **dinámico** cuando simula variaciones de estadios del fenómeno, por ejemplo, crecimiento poblacional de una colmena.
- iii. **Didáctico**, son aquellos modelos matemáticos que presentados en la etapa de formación de los mismos requieren solo un número pequeño o simple de suposiciones, teniendo, casi siempre, soluciones analíticas. El modelo presa depredador de Lotka-Volterra es un ejemplo típico de tales modelos. El método impregnado por tales modelos envuelve las investigaciones de una o dos variables, aisladas de complejidad de otras relaciones fenomenológicas. Generalmente estos modelos no representan la realidad con un grado de fidelidad adecuada para hacer previsiones. Entretanto, la virtud de tales modelos está en la adquisición de experiencia y de provisión de ideas para la formulación de modelos más adecuados a la realidad estudiada. Por otro lado están el llamado **Aplicativo**, es aquel basado en hipótesis realistas y, generalmente, envuelve interrelaciones con un número grande de variables, dando en general sistemas de ecuaciones con

numerosos parámetros. En este caso, un tratamiento analítico puede ser imposible y los métodos utilizados para la obtención de las soluciones deben ser computacionales. Y cuanto más complejo es el modelo, más difícil será mostrar su validez, esto es, que el describe la realidad.

- iv. **Estocástico** o **determinístico**, de acuerdo con el uso o no de factores aleatorios en las ecuaciones. Los modelos determinísticos están basados en suposiciones que si existen informaciones suficientes en un determinado instante o en un estadio de algún proceso, entonces todo el futuro del sistema puede ser provisto precisamente. Los modelos estocásticos son aquellos que describen la dinámica de un sistema en términos probabilísticos. Los modelos prácticos tienden a impregnar métodos estocásticos, y casi todos los procesos biológicos son formulados con estos modelos cuando si tienen pretensiones de aplicación. Un ejemplo claro es el estudio de la velocidad de la luz. En él se tomaron diferentes mediciones a lo largo de años, lográndose estimar en forma probabilística la velocidad de la luz, hasta que con elementos de mayor tecnología lograron determinar el valor exacto, o sea el que queda finalmente determinado a través de esos estudios, y que hoy se utiliza.

Un modelo matemático bien estructurado debe ser compuesto de resultados parciales interrelacionados. Las leyes fundamentales de la Física son formulas matemáticamente para proporcionar una primera generación de modelos matemáticos que después son sujetos a varias correcciones, algunas empíricas. La dinámica de poblaciones de diferentes especies, presupone inicialmente, sus crecimientos independientes para obtener las respectivas tasas de reproductividad. En tanto, tales parámetros pueden ser redimensionados cuando las especies conviven en un mismo hábitat.

En cuanto a la Biofísica, que posee una filosofía básicamente reduccionista, tiende a reducir los fenómenos biológicos a simples procesos físico-químicos, para deducir el comportamiento de un sistema complejo para el estudio de los comportamientos individuales de los componentes aislados, la Biomatemática procura analizar la estructura del sistema de manera global, intentando preservar las características biológicas esenciales.

Cuando modelamos un sistema complejo, consideramos partes aisladas de este sistema e ignoramos las interrelaciones de los submodelos, podemos obtener un conjunto de modelos validos desde el punto de vista microscópico más que, globalmente, podemos no representar el sistema completo.

1.3. Etapas de la Modelización Matemática

La primera suposición errónea respecto a los modelos matemáticos está relacionada a la creación de los mismos. Los modelos vimos ya, son matemáticos porque requieren de una parte de la matemática, para ser representados. Sin embargo esto no quiere decir, que la creación está a cargo de un matemático. Dentro de los matemáticos están aquellos que se dicen aplicados, que relacionan el conocimiento de la disciplina con la utilización en otras disciplinas. Este aporte de conocimientos de otras áreas viene acompañado por la participación de investigadores de cada una de las disciplinas, en particular de donde proviene el problema. Así el estudio de la producción de cierto artículo que va a ser incorporado en el mercado, requiere de los analistas del mercado, de los que aportan con la materia prima, de los que elaboran y economistas y fabricantes sugieren técnicas de trabajo y elaboración de ese producto. Cuando una enfermedad aparece con un marcado factor destructivo respecto al desarrollo de una sociedad, debe estudiarse los factores sanitarios, sociales, económicos de ese grupo humano, a fin de establecer pautas que logren combatir esa enfermedad. Esto produce un trabajo interdisciplinar que va requerir del llamado trabajo en equipo o interdisciplinar, donde traducir un problema real en un problema matemático lleva a que el científico pueda ser matemático, físico, ingeniero, contador, químico, ambientalista, medico, en cualquiera de los casos, de quienes han participado en forma mancomunada aportando y recibiendo formación de diversas áreas.

Por ello, Bassanezi reconoce que el **Modelado Matemático** es un proceso dinámico utilizado para la obtención y validación de modelos matemáticos. Es una forma de abstracción y generalización con la finalidad de prever tendencias. La modelización consiste, esencialmente, en un arte de transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos cuyas soluciones deben ser interpretadas en un lenguaje usual. La

modelización es eficiente a partir del momento que nos concientizamos que estamos siempre trabajando con aproximaciones de un sistema o parte de él.

Más adelante, menciona que en muchos casos, la introducción de un simbolismo matemático exagerado puede ser más destructiva que esclarecedor. El contenido y el lenguaje matemático utilizados deben ser equilibrados y circunscriptos tanto al tipo de problema como al objetivo que se propone alcanzar. Destacamos que, en una situación de investigación, la Modelización matemática tiene varias restricciones y su uso es adecuado si de hecho contribuye para desarrollar y comprender el fenómeno analizado.

La obtención de un modelo matemático presupone, por así decir, la existencia de un diccionario que interpreta, sin ambigüedades, los símbolos y operaciones de una teoría matemática en términos del lenguaje utilizado en describir el problema estudiado, y viceversa. Con esto, trasponemos el problema de alguna realidad para la matemática donde será tratado a través de teorías y técnicas propias de esta Ciencia; para la misma vía de interpretación, no en sentido contrario, obteniéndose el resultado de los estudios en un lenguaje original del problema.

Esquemáticamente, Bassanezi representa este proceso con el diagrama de la figura 1.1. Varios comentarios deben ser hechos en este punto. Primero, la teoría matemática para la construcción del Modelo Matemático adecuado al problema original puede no existir. Esta situación exige del estudiante una tarea tal vez histórica: desarrollar una nueva rama de la Matemática. Obviamente esto no acontece todos los días. Como un ejemplo reciente podemos citar la Teoría de Juegos creada por J. Neumann para modelar situaciones de competición económica. De cualquier manera, el objetivo de todo matemático aplicado al estudiar un problema es construir un modelo dentro de una teoría matemática ya desarrollada y ampliamente estudiada, que facilite la obtención de resultados. Al final, su misión debe ser resolver el problema de la manera más simple posible, y no complicarlo innecesariamente. Segundo, al igual que el modelo matemático de la situación estudiada puede ser construido dentro de una teoría matemática conocida, aun así puede acontecer que las técnicas y métodos matemáticos existentes en esta teoría sean suficientes para la obtención de resultados deseados. En este caso, la situación no es tan dramática como antes, más de cualquier forma va a exigir del matemático aplicado habilidad y creatividad esencialmente matemáticas para desarrollar los métodos necesarios. Estas situaciones se construyen en las grandes motivaciones para el desarrollo

de teorías matemáticas y establecidas. Esto está ampliamente ejemplificado en el caso de las ecuaciones diferenciales, desde su origen hasta los días de hoy.

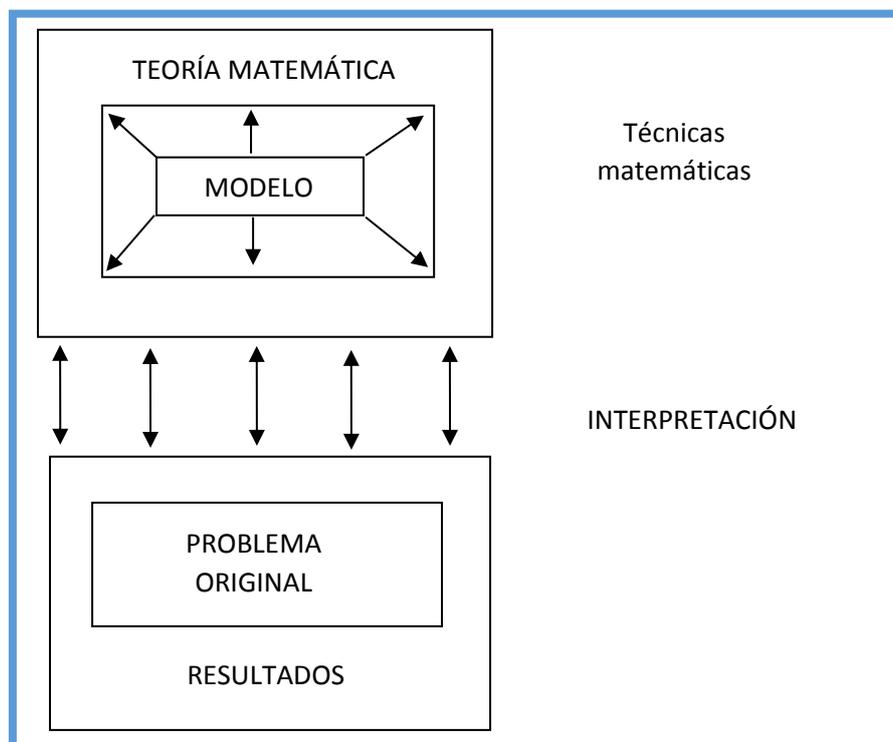


Figura 1.1. Proceso de modelación. (Bassanezi. 2002)

Observe que las flechas de interpretación a nuestro esquema de arriba ligan, en gran parte, a la teoría matemática con las ramas del conocimiento de donde viene el problema original. Con esto, queremos decir que, igual al tratamiento matemático del modelo, es interesante que los métodos y técnicas matemáticas puedan ser frecuentemente interpretados en un lenguaje del fenómeno original. En algunos casos esta interpretación es decisiva en auxilio al desarrollo matemático en cuestión y puede acontecer que el argumento matemático sea inadecuado y deba ser sustituido por argumentos más claros en el área del problema original.

Este tipo de desarrollo en la argumentación, perfectamente aceptado en la Matemática Aplicada, tal vez sea un punto que provoque mayor descontento entre matemáticos llamados puros. Es obvia que una argumentación de esta naturaleza, a pesar de su importancia científica, igual que para la Matemática, no puede ser considerada como argumento estrictamente matemático. Este proceso de intermediación entre el problema

original y el modelo matemático es una actividad que podríamos clasificar como típica de la matemática aplicada, exigiendo una evaluación competente en cuestión sobre los dos puntos de vista. Tal vez sea esta la actitud más importante cuando se trabaja con modelaje, pues nos provee la validez o no del modelo.

La Modelización Matemática de una situación o problema real debe seguir una secuencia de etapas, simplificada visualizadas en el esquema de la figura 1.2.

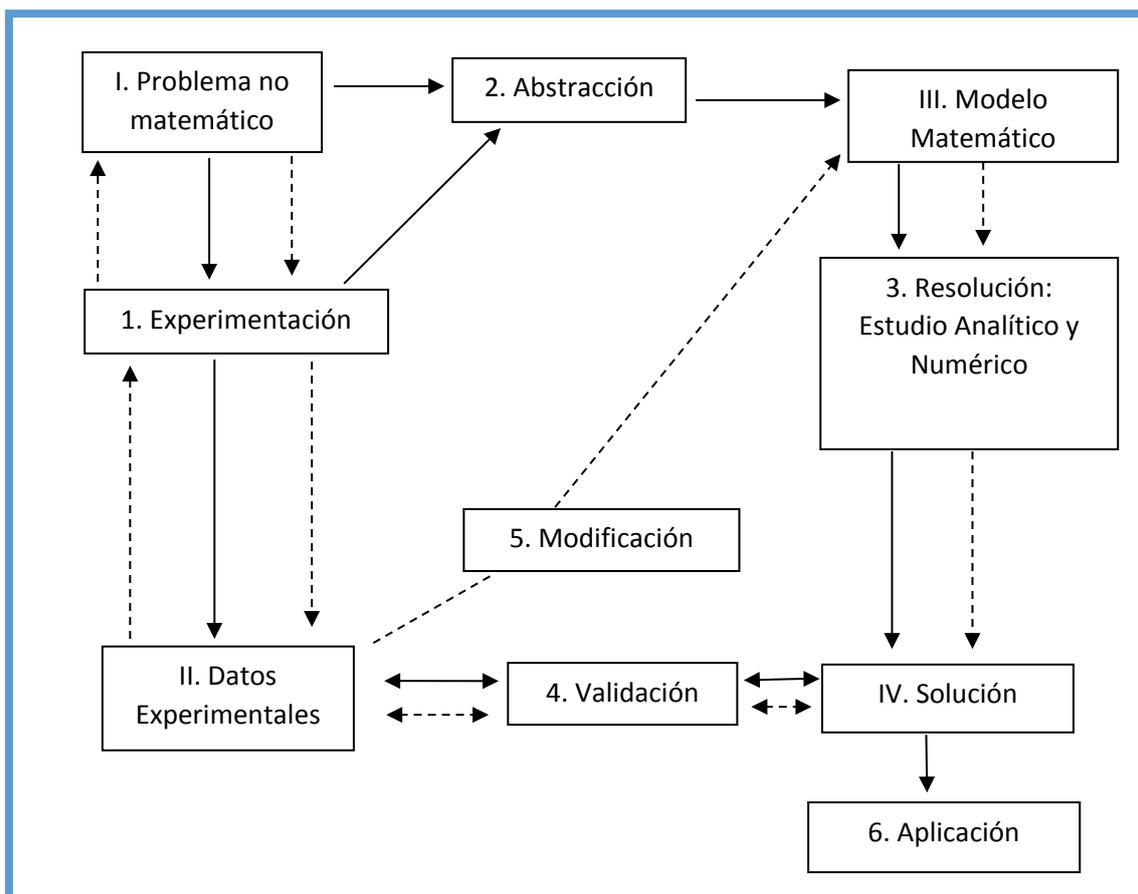


Figura 1.2: Esquema de una modelización: las flechas continuas indican la primera aproximación. La búsqueda de un modelo matemático que mejor describa el problema estudiado torna el proceso dinámico, indicado por las flechas cortadas. (Bassanezi. 2002)

Las actividades intelectuales de la Modelización matemática esbozadas en la figura 1.2, son las siguientes:

- 1. Experimentación:** es una actividad esencialmente de laboratorio, donde se procesa la obtención de datos. Los métodos experimentales, casi siempre son dictados por la propia naturaleza del experimento y objeto de investigación. Entre

tanto, la contribución de un matemático en esta fase, muchas veces, puede ser fundamental y direcciona la investigación en sentido de facilitar, posteriormente, el cálculo de parámetros involucrados en los modelos matemáticos. La adopción de técnicas y métodos estadísticos en la investigación experimental puede dar mayor grado de confiabilidad a los datos obtenidos. Muchas veces, nuevas técnicas de investigación empírica ejercen presión sobre el foco de interés de la teoría y permite una mejor selección de variables esenciales involucradas al fenómeno.

2. Abstracción: es el procedimiento que debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos. En esta fase, se procura establecer:

a. Selección de variables: la distinción entre las variables de estado que describen a la evolución del sistema y las variables de control que tiene el sistema. Una de las exigencias fundamentales de la investigación es que los conceptos (variables) con los cuales se ligan sean claramente definidos.

b. Problematización o formulación de los problemas teóricos en un lenguaje propio del área en que se está trabajando: La adecuación de una investigación sistemática, empírica y crítica lleva a la formulación de problemas con enunciados que deben ser explicitados de forma clara, comprensible y operacional. De esta forma, un problema se constituye en una pregunta científica cuando explicita la relación entre las variables o hechos envueltos en el fenómeno.

En cuanto que se elija el tema de una investigación puede ser una propuesta contenida, la formulación de un problema es más específica e indica exactamente lo que se pretende resolver.

c. Formulación de Hipótesis: las hipótesis dirigen la investigación y son comúnmente formulaciones generales que permiten al investigador deducir manifestaciones empíricas específicas. Las hipótesis deben incorporar parte de la teoría que pueden ser testeadas y de esta forma constituyen una inversión poderosa para los avances de la ciencia.

De una manera general las hipótesis se refieren a la frecuencia de la interrelación entre las variables, observada experimentalmente (hipótesis observadas), más pueden también ser enunciadas en forma universal cuando se procura generalizar los resultados investigados.

En relación a la profundidad, las hipótesis pueden ser fenomenológicas cuando se refieren al funcionamiento interno del sistema, en este caso pueden contener conceptos observados o construcciones abstractas mas no especifican mecanismos, atributo de las hipótesis representaciones donde el funcionamiento externo del sistema es especificado.

La generación de hipótesis se da de varios modos: observación de hechos, comparación con otros estudios, deducción lógica, experiencia personal del modelador, observación de casos singulares de la propia teoría, analogía de sistemas, etc.

Dos sistemas son formalmente análogos cuando pueden ser representados por el mismo modelo matemático lo que implica en una correspondencia entre las propiedades de los elementos de ambos sistemas.

d. Simplificación: Los fenómenos que se presentan para el estudio matemático son, en general, excesivamente complejos si los consideramos en todos sus detalles. El método científico analítico, iniciado por Galileo (1564-1642) y el método de la razón de Descartes, consisten exactamente en restringir y aislar el campo de estudio apropiadamente de tal modo que el problema sea tratable y, al mismo tiempo, mantenga su relevancia. Esta fue la actitud que rompe con la Ciencia de la Edad Media que pretendía entender de una sola vez: la piedra filosofal.

3. Resolución: El modelo matemático es obtenido cuando se sustituye el lenguaje natural de las hipótesis por un lenguaje matemático coherente, y como en un diccionario, el lenguaje matemático admite sinónimos que traducen los diferentes grados de sofisticación del lenguaje natural. Por ejemplo, es muy frecuente, que si tratamos de modelar fenómenos que involucran datos temporales, obtenemos ecuaciones que interpretan las variaciones de cantidades (variables) presentes y consideradas esenciales. En este caso, las hipótesis formuladas pueden ser traducidas por ecuaciones de variaciones discretas (ecuaciones en diferencias finitas) o continuas (ecuaciones diferenciales).

La resolución de un modelo está siempre vinculada al grado de complejidad empleado en su formulación y muchas veces se puede ser viabilizada a través de métodos computacionales, dando una solución numérica aproximada. De

cualquier forma, los métodos computacionales pueden ofrecer pistas y sugerencias para posteriores soluciones analíticas.

La Modelización puede llegar a ser el factor responsable para el desarrollo de nuevas técnicas y teorías matemáticas cuando los argumentos conocidos no son eficientes para proporcionar soluciones de los modelos, en esto consiste la riqueza del uso de la modelización, en si tratando de investigación en el campo propio de la Matemática.

- 4. Validación:** Es un proceso de aceptación o no del modelo propuesto. En esta etapa, los modelos, juntamente con las hipótesis que les son atribuidas, deben ser testeados confrontándolos con los datos empíricos, comparando sus soluciones y pronósticos con los valores obtenidos en el sistema real. El grado de aproximación deseado de estos pronósticos será el factor preponderante para su validación.

Un modelo debe prever, al mínimo, los hechos que lo originan. Un buen modelo es aquel que tiene capacidad de pronosticar nuevos hechos o relaciones inseguras. El problema de aceptación o no de un modelo depende mucho más de factores que condicionan al modelador, incluyendo sus objetivos y recursos disponibles. La simple confrontación con los datos empíricos puede no bastar. De cualquier forma, un buen modelo matemático es aquel que el usuario, especialista en el área donde se ejecuta la modelización, lo considera como tal, teniendo las cualidades de ser suficientemente simples y representar razonablemente la situación analizada.

La interpretación de los resultados obtenidos a través de los modelos puede ser hecha con el uso de gráficos de las soluciones que facilita evaluar los pronósticos o igualmente sugerir un perfeccionamiento de los modelos.

- 5. Modificación:** Algunos factores ligados al problema original pueden provocar el rechazo o la aceptación del modelo. Cuando los modelos son obtenidos considerando simplificaciones e idealizaciones de la realidad, sus soluciones generalmente no conducen a los pronósticos correctos y definitivos. También un pronóstico puede estar errado o no coincidir con la intuición por las siguientes razones:

- a. alguna hipótesis usada puede ser falsa o no suficientemente próxima a la verdad, es decir, las suposiciones de partida son incorrectas y/o constituyen una simplificación demasiado drástica.
- b. Algunos datos experimentales o informaciones pueden haber sido obtenidos de manera incorrecta.
- c. Las hipótesis y los datos son verdaderos pero insuficientes, y nuestra intuición de la realidad es inadecuada.
- d. Existen otras variables involucradas en la situación real que no fueron utilizados en el modelo teórico.
- e. Fue cometido algún error en el desarrollo matemático formal.
- f. Un importante principio nuevo fue descubierto.

El perfeccionamiento de una teoría implica la reformulación de los modelos. Ningún modelo debe ser considerado definitivo, pudiendo siempre poder ser mejorado, y ahora podríamos decir, que un buen modelo es aquel que proporciona la formulación de nuevos modelos. La reformulación de modelos es una de las partes fundamentales del proceso de modelización y esto puede ser evidenciado si consideramos que:

- Los hechos conducen constantemente a nuevas situaciones.
- Cualquier teoría es posible a modificaciones.
- Las observaciones son acumuladas gradualmente de modo que nuevos hechos suscitan nuevos cuestionamientos.
- La propia evolución de la Matemática provee de nuevas herramientas para traducir la realidad.

La modelización eficiente permite hacer previsiones tomar decisiones, explicar y entender; en fin participar del mundo real con capacidad de influenciar en sus variaciones. Destacamos una vez más que la aplicabilidad de un modelo depende sustancialmente del contexto en que él se desenvuelve, un modelo puede ser bueno para un Biólogo y no para un Matemático o viceversa. Un modelo parcial puede atender las necesidades inmediatas de un investigador al mismo tiempo que no conforme todas las variables que influyen la dinámica del fenómeno estudiado.

De una manera general podemos clasificar como actividad del matemático aplicado a la construcción y análisis del modelo matemático, su aplicabilidad y validación son predominantemente, actividades de los investigadores de otras áreas. El intercambio del matemático con estos investigadores es lo que proporciona la obtención de modelos coherentes y útiles. La interrelación del matemático con otros investigadores está esencialmente incluida en los procesos de formulación de hipótesis, elección de variables y validación del modelo.

1.4. Métodos para resolver un problema

Pretender desarrollar un modelo matemático, es una tarea que surge desde el momento que tenemos un problema de la vida real, al cual debemos buscar su solución. Más aún, pretender sistematizar la búsqueda de la solución para recurrir a ello ante cualquier otro problema, que pueda ser idéntico, de manera que el esfuerzo pueda ser aprovechado, implementando el mismo modelo o modificándolo.

Allí surge la principal ventaja de un modelo, esto es, que un mismo modelo puede resolver varios problemas análogos, pues luego de haber abstraído elementos de su realidad, que pueden provenir de distintas áreas de conocimiento. Al mismo tiempo también un problema puede modelarse de diversas maneras, esto es, usar diversas partes de la matemática para expresarlo, o bien recurrir a la misma área de la matemática, pero resolverlo con distintos grados de exactitud. En efecto, recordemos que un modelo es una representación que permite aproximar al problema real. Por ello, podemos encontrar una serie de problemas que al ser tratados tienen una misma representación. En efecto si deseamos colocar un cierto monto de dinero a una determinada tasa de interés mensual durante cierta cantidad de meses, vemos que el porcentaje influye en forma proporcional al monto produciendo la ganancia esperada. En forma análoga, una población de cierta especie, que se reproduce a una tasa de crecimiento conocida, generará nuevos ejemplares que nacen según un valor que es proporcional a la cantidad de población de individuos en calidad de gestación. Luego vemos que ambos problemas tienen un grado de analogía, y el modelo de crecimiento densodependiente es aplicable a tales problemas.

Método Directo: Una vez aclarado el problema que debemos resolver, debemos apuntar a la resolución del mismo. Tenemos algunas alternativas. El primer lugar, ante el supuesto problema de ahorro citado, en donde se formula como ser, colocar cinco mil pesos a una cierta tasa de interés mensual de cuatro por ciento, en una entidad financiera durante seis meses, la búsqueda de la solución puede estar dada en buscar el dinero, luego la entidad financiera, colocar el dinero, y esperar que pase el tiempo deseado, controlando el interés que va generando a lo largo de los meses. Esto es aplicar el *Método Directo*. Hemos requerido tener el monto que deseábamos colocar, conseguir una entidad que nos dé el interés deseado, y luego disponer de tiempo para realizar los controles del ahorro hasta finalizado el periodo.

Simulación: Este método directo implica demora en el tiempo, pues usamos tiempo real. Si nuestra intención es calcular el resultado antes que esto suceda, podemos realizar una representación, en donde los meses pueden ser solamente pequeños instantes. Así por ejemplo colocamos en una caja el dinero, realizamos el cálculo del interés al primer mes, y el valor encontrado será un monto que agregamos a la caja. De esta manera estamos simulando el proceso directo, y podemos después de tantos agregados como meses habíamos dejado pasar en el método directo tener el mismo resultado. Esta *simulación*, requirió de una representación en el tiempo, al cual se lo fue alterando de la forma conveniente.

No solo al tiempo lo podemos reemplazar, también podría haber sustituido el monto, pues realizando una representación, en donde un sobre puede representar tal monto inicial, suponiendo que allí está contenido. Además, el sobre puede contener luego de los cálculos de interés, fichas que se incorporan, representando cada valor nuevo del interés ganado. Al final el sobre junto al contenido ha logrado simular nuestro proceso de ahorro con interés. Tenemos diversas formas de representar a los elementos, pues un objeto de mayor tamaño puede representar el valor inicial y elementos de menor tamaño, con un valor calculado como interés en cada mes pueden servir, siempre que se los distinga. Así al final sumar el valor de todos ellos será la simulación realizada. A cada alternativa de representación, nuestra simulación va cambiando, pero la idea original no debe cambiar.

Método simbólico: a medida que avanzamos en la representación se busca elementos más fáciles de usar, ganando en abstracción. Así la representación simbólica puede aumentar, pues cada elemento de la simulación es un símbolo del elemento original y real. La escritura y el dibujo ofrecen, el mayor grado de lo simbólico, de manera que si un dibujo o gráfico representa a cada elemento que participa en el problema real, podemos expresar a través de una cadena de gráficos la representación completa de todo el fenómeno del problema. Esto depende del talento del autor, o la imaginación de quien lo observa, pues hasta dibujar al ahorrista, con su monto inicial podría ser. Sin embargo el símbolo puede ser una representación más abstracta, como lo fue el sobre, o tal vez con letras usar el símbolo de cada elemento, y el monto inicial solo indicarlo con MI, y los intereses con variables suscriptas o sea, subíndices. Esta vez la cadena de letras, en cada renglón se puede representar a un nuevo mes hasta llegar al deseado.

Resolución Mental: la abstracción alcanzará su punto máximo en el momento que la representación deje de ser un objeto real, para convertirse en un elemento de la imaginación, esta es la resolución mental. Pensar en las distintas etapas del ahorro con el incremento por los intereses, hasta el valor final que propone el problema, permitirá también llegar a la solución. Para quienes tuvimos en la formación inicial en la etapa escolar la tarea de resolución mental de ejercicios de operaciones algebraicas, esto tiene un significado muy importante.

1.5. Características de los Modelos Matemáticos

A medida que fuimos recorriendo los métodos de resolución del problema, se fueron presentando distintas características que se presentan en los modelos matemáticos, y que deben ser interpretados en la creación de los modelos matemáticos.

Realidad-Abstracción: los elementos del problema original han sido reemplazados por otros que pretenden representarlos para lograr la simulación del proceso del problema. Estos nuevos elementos a medida que recorrimos los diversos métodos han perdido cada vez más realidad. Ya ni siquiera necesitábamos el dinero inicial, ni recordar cuanto el monto que se va a representar. El interés aplicado tampoco es citado en los casos

siguientes. Así la característica que aquí destacamos es la pérdida de realidad y con ello la ganancia en abstracción, hasta convertirse en variables del problema.

Estas variables es lo que hace que luego pueda resolverse otros problemas en forma análoga, implementando el mismo modelo, o bien a partir de éste mejorar las condiciones para obtener nuevos modelos para otros problemas.

Generalidad: esta característica de abstracción citada antes, lleva a que el modelo matemático escrito como un conjunto de variables pueda ser representantes de otros elementos que corresponden a otros problemas. Con esto queda presente una nueva característica que ha sido fomentada cada vez que se realiza una nueva representación, nos referimos a la generalidad. Con esto el modelo matemático de nuestro problema de interés mensual de un capital puede transformarse en el modelo de la dinámica poblacional con crecimiento densodependiente.

Costo: otra característica que se presenta en los distintos métodos de resolución del problema, es el costo, pues esperar los meses que requería el problema real, según el método directo, requiere de un costo, como el de la búsqueda del monto inicial para poder realizar la operación financiera. Si recorremos los otros métodos vemos que la utilización de recursos es con menor costo cada vez, hasta el punto de que la resolución mental solo requiere un grado de adiestramiento en lo imaginativo y mental.

Dificultad teórica: hablamos ya de que los problemas reales provienen de diversas áreas de conocimiento. Esto puede ser de áreas donde el equipo encargado de crear el modelo matemático no tenga la suficiente formación para enfrentar las condiciones del problema. En nuestro caso puede ser la formación en ciencias económicas. Tales conocimientos si bien existen, pueden a veces tener que ser informadas por los que proveen el problema, o bien recurrir a expertos en el tema. En casos extremos la solución puede presentar la dificultad de que el área de conocimiento aún no ha desarrollado ciertas teorías, técnicas o conceptos, que permitirían llegar a la solución. Así se llega a situaciones extremas en donde se debe crear las mismas, lo cual no ocurre en forma frecuente.

Modelos reversibles o irreversibles: relacionado al tipo de problema que pretendemos resolver, existen modelos que por su naturaleza, tienen la característica de que el fenómeno puede repetirse tantas veces como sea posible para observar el comportamiento

experimental de las variables o de los elementos que las variables representan. Así analizar la resistencia de un material que es expuesto a cierta fuerza o presión, tiene como indicador el punto de rotura, por ello la muestra pierde su existencia y debe recurrirse a otra muestra para recrear el experimento. En otros casos una sustancia química puede convertirse en otra con características que pueden volver a recuperarse, y en otras la degradación hace perder las características iniciales.

CAPÍTULO 2:
MODELOS MATEMÁTICOS
COMPARTIMENTADOS DISCRETOS

Luis E. Valdez

Silvia V. Romero

Efraín O. Nieva

Silvia Inés del V. Navarro

Gustavo A. Juarez

2.1. Introducción a los Modelos Compartimentados Discretos

El presente capítulo pretende mostrar modelos matemáticos realizados bajo el concepto de modelos compartimentados dinámicos discretos. Tales modelos son expresados mediante problemas con valores iniciales de ecuaciones en diferencias simulados con el *Software de Aplicación Libre EED*, creado para tal fin. Para ello desarrollamos la presentación de los modelos compartimentados y realizaremos cuando sea posible, enunciados de problemas, principalmente dentro de ecología, dinámica poblacional y de economía.

Proponemos realizar una presentación de los modelos compartimentados de uno, dos y tres compartimentos que conforman un todo dentro de un sistema que varían a lo largo del tiempo, en donde se representan como modelos dinámicos discretos mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones en diferencias, en este primer paso con coeficientes constantes.

El método de los compartimentos consiste en un sistema donde el todo se compone de un cierto número de compartimentos o subsistemas que están ligados o relacionados. Para ello estudiamos en forma discreta ese número de ejemplares o cantidades a lo largo del tiempo mediante ecuaciones en diferencias, pretendiendo que cada compartimento tenga su propia ecuación y por ello en su totalidad, el todo, o sea el sistema, se representa por las ecuaciones simultáneas en diferencias o sistema de ecuaciones en diferencias.

El estudio de modelos matemáticos dinámicos suele estar apoyado en las ecuaciones diferenciales, de manera que solo se plantea la forma continua. Así, las ecuaciones en diferencias, como temas dentro de las matemáticas, no están desarrollados habitualmente en la formación académica. Su teoría y las aplicaciones quedan restringidas a la alternativa de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales, cuando la propuesta de discretizarlas resulta ser la única modalidad de obtener la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

En los sistemas numéricos se realiza el desarrollo desde los naturales a los reales, pasando por los enteros y racionales, entonces *¿porque el estudio variacional no se inicia*

con las ecuaciones en diferencias para realizar también el salto de lo discreto a lo continuo? Ya el límite secuencial con el límite funcional supo tener su discusión al respecto. Enseñar primero las ecuaciones en diferencias antes que las ecuaciones diferenciales es nuestra propuesta desde hace un tiempo, de manera que la aplicación de modelos variacionales en disciplinas alejadas de una formación matemática pura, tal el caso de economía, salud, biología, entre otras, se inicie con modelización dinámica discreta mediante ecuaciones en diferencias. Más aún, con datos experimentales, podemos implementar diversos estudios a partir desde lo discreto.

Para ello se desarrolla una presentación teórica de las ecuaciones en diferencias, trabajando a las que poseen coeficientes constantes, en general a las que son lineales, y también se extendió a sistemas de ecuaciones en diferencias, tal lo presentado en la obra titulada *“Ecuaciones en Diferencias con Aplicaciones a Modelos en Sistemas Dinámicos”*, bajo la autoría de Juárez G.A. y Navarro S.I. publicado en 2005. Así podemos estudiar diversas propuestas, algunas apoyadas por las aplicaciones en ciencias biológicas, dinámica poblacional y ciencias económicas. Realizamos a continuación una breve presentación de las ecuaciones en diferencias.

2.2. Sucesiones Recurrentes

Sea $\{x_n\}$ una *sucesión de números*, reales o complejos, en donde los términos de tal sucesión se denotan con x_0, x_1, x_2, \dots por ejemplo 3,5,2,8,...

Si a partir de algunos de tales términos de una sucesión los siguientes se expresan a partir de operaciones algebraicas de los anteriores términos, la sucesión se dice *sucesión recurrente*.

Por ejemplo tenemos las siguientes sucesiones recurrentes.

Ejemplo 2.1: Son sucesiones recurrentes

$$\begin{aligned} &1,4,7,10,13,16,19,\dots \\ &3,4,7,11,18,29,47,\dots \\ &2,3,4,9,16,29,54,\dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Que se obtienen respectivamente de las siguientes asignaciones de generación

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + 3 \\x_{n+1} &= x_n + x_{n-1} \\x_{n+1} &= x_n + x_{n-1} + x_{n-2}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Las sucesiones dadas en (2.1) se obtienen de la aplicación de la expresión (2.2) que genera los siguientes términos a partir de los anteriores dados. Por lo que necesitamos también conocer términos iniciales. Obsérvese que las expresiones (2.2) requieren de uno, dos y tres términos anteriores para generar el siguiente término de cada sucesión.

El proceso de determinar sucesivamente los términos particulares de estas sucesiones se denomina *proceso recurrente*, para ello la forma simbólica de expresar, por ejemplo (2.2) se llama *forma recurrente*. Tal forma recurrente se dice que es de orden k si esta es la máxima diferencia entre los subíndices que intervienen en la expresión.

En el ejemplo 2.1 las formas recurrentes (2.2) son de orden uno, dos y tres respectivamente.

2.3. Ecuaciones en Diferencias (EED)

Las formas recurrentes también son conocidas como *ecuaciones en diferencias finitas*, o simplemente *ecuaciones en diferencias*, y en adelante las indicaremos como EED. Estas ecuaciones tienen como objeto expresar relación entre términos de una sucesión. Resolver una EED significa hallar la sucesión cuyos términos están relacionados según la ecuación dada.

En general diremos que una EED en una sucesión $\{x_n\}$ es lineal de orden k si tiene la forma $a_k(n)x_{n+k} + a_{k-1}(n)x_{n+k-1} + \dots + a_1(n)x_{n+1} + a_0(n)x_n = R(n)$, donde $a_i(n)$ son los coeficientes de la ecuación, que pueden ser función de n , caso contrario se dice que la EED es de *coeficientes constantes*. Los coeficientes $a_k(n)$ y $a_0(n)$ deben ser no nulos, con ello asegura el orden. El segundo miembro es independiente de los términos de la sucesión y en caso de ser nulo la EED se dice *homogénea*, en otro caso, *no homogénea*.

La *solución* de una EED es una sucesión, pero cabe mencionar que tal sucesión puede no ser única, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2: Verifique que la sucesión $x_n = 3 \times 5^n$ es una solución de la EED $x_{n+1} - 5x_n = 0$

En efecto reemplazando por la solución sugerida queda

$$x_{n+1} - 5x_n = 3 \cdot 5^{n+1} - 5 \cdot 3 \cdot 5^n = 0$$

Además si tomamos otra sucesión, por ejemplo $x_n = 7 \times 5^n$ también verifica que es solución. Es más, toda sucesión de la forma $x_n = C \times 5^n$, con C constante es solución. En tal caso debemos distinguir a esta última como solución general de la EED y a las anteriores como dos soluciones particulares.



Resolver una EED lineal de primer orden homogénea de coeficientes constantes, es obtener alguna de las sucesiones, entre las cuales son muy familiar las progresiones aritméticas y las geométricas. En el siguiente cuadro damos la forma de las soluciones según la EED dada:

EED	Sucesión Solución	Progresión
$x_{n+1} - x_n = b$ con b cte.	$x_n = C + bn$ C y b ctes	Aritmética
$x_{n+1} - ax_n = 0$ con $a \neq 0$	$x_n = Ca^n$ C y a ctes	Geométricas
$x_{n+1} - ax_n = b$ con $a \neq 0, a \neq 1$	$x_n = Ca^n + \frac{b}{1-a}$	Geométrica Modificada

Para las EED de primer orden no homogéneas puede utilizarse el *Método de Coeficientes Indeterminados*, que por la brevedad de este trabajo las dejamos de lado a su explicación, pero que puede consultarse en detalle en (Juarez y Navarro, 2005).

En cuanto a las EED de *segundo orden lineales con coeficientes constantes homogéneas* tienen la forma $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ con a y b constantes y $b \neq 0$, la búsqueda de la solución es a través de la Ecuación Característica $\rho^2 + a\rho + b = 0$, con $\rho \neq 0$. Esta es una ecuación algebraica de segundo grado, cuyas soluciones están dadas por: $\rho = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Sean éstas ρ_1 y ρ_2 pueden ser reales y distintas, reales e iguales o complejas conjugadas, y se denominan *raíces características*.

De ésta manera la solución de la EED dada, es la sucesión que se forma como combinación con las potencias n -ésimas de las raíces características obtenidas, con coeficientes constantes C_i , esto es:

Solución de EED se segundo orden	Raíces características
$x_n = C_1\rho_1^n + C_2\rho_2^n$	Si $\rho_1 \neq \rho_2$
$x_n = (C_1 + C_2n)\rho^n$	Si $\rho = \rho_1 = \rho_2$
$x_n = r^n \{C_1 \cos(n\theta) + C_2 \text{sen}(n\theta)\}$	Si $\rho_1 = \bar{\rho}_2$ con r módulo y θ es el argumento de ρ_1

Una generalización inmediata de esto nos permite expresar las soluciones de EED de orden mayor según sea las raíces características de la ecuación característica asociada.



Como propuesta se encuentra la aplicación de la simulación dinámica con el software EED, en problemas interdisciplinarios que se plantean mediante modelos compartimentados discretos.

Es frecuente observar modelos matemáticos dinámicos en la forma continua, tanto a nivel educativo como en investigación. La formación de profesores de matemática en los últimos años, nos permitió aplicar la creación de modelos matemáticos discretos mediante ecuaciones en diferencias. Las mencionadas presentan una ventaja importante,

pues posibilita iniciarse en el pensamiento matemático interdisciplinario mediante el planteo de problemas de diversas áreas, donde la matemática asume su carácter instrumental, proporcionando además de la modelización, la simulación de los mismos, de las cuales se obtienen como resultados el comportamiento del problema asumido. Además, por un lado, las EED, no requieren de un estudio previo de un análisis matemático, contribuyendo a que pueda ser contenido en el nivel medio, ampliando los conceptos de progresiones. Por otro lado, al determinar un problema con valor inicial discreto, puede simularse el modelo sin necesidad de resolver la EED. Para esto último se desarrolló un software que permite el trabajo en forma accesible.

Lo que se propone como trabajo, son aquellos problemas interdisciplinarios que puedan simularse mediante ecuaciones o sistemas de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, y en algunos casos cuadráticos, tal el modelo de crecimiento inhibido conocido como logístico discreto. Por ello se consideran problemas motivadores y de aplicación en economía, ecología, dinámica poblacional y epidemiología, todos ellos bajo el concepto de modelos compartimentados.

Este trabajo se enmarca dentro de la matemática aplicada, en particular en la modelización matemática y dentro de ellas, finalmente a los llamados modelos matemáticos dinámicos discretos. Es por ello que trabajaremos con EED y más precisamente con sistemas de ecuaciones en diferencias. Su evolución y posible estabilidad del sistema que se modela es la propuesta final, esto es, el comportamiento del modelo para lo cual escribiremos el nuestro como un Problema con Valor Inicial Discreto (en adelante PVID). Para ello comenzaremos mencionando que utilizaremos un PVID para representar una situación real en donde una, dos o más especies, o tipos de elementos, que conforman un todo, o sea un sistema desde el punto de la teoría general de sistemas y que evolucionan conjuntamente a tal forma que uno de ellos depende, no solo de sí mismo, sino también de los otros componentes con los que comparten su medio, puedan ser representados. De esta manera estamos diciendo que el todo está conformado en *compartimentos*, y de allí la expresión de modelos compartimentados.

2.4. Método de los Compartimentos

El *método de los compartimentos* consiste en un sistema con cierto número de compartimentos o subsistemas que están ligados o relacionados, tal el caso de dos especies que conviven en un mismo hábitat, o personas de una comunidad que durante un cierto tiempo recorren diversos estados de salud respecto a una determinada enfermedad. Para el caso de un único compartimento llamamos *modelo unicompartmentado*, inicialmente asociamos al mismo con ecuaciones en diferencias lineales con coeficiente constante de primer orden, en el caso de considerar un retraso corresponde a una de segundo orden, y cuando consideramos un carácter estable en un valor no nulo, se toma el crecimiento inhibido cuadrático llamado *ecuación logística discreta*. En todos estos casos con un valor inicial se conforma el problema con valor inicial discreto y se realiza la simulación con el software EED.

Con los modelos unicompartmentados se permite justificar el supuesto para una partición en dos compartimentos, donde la forma del modelo puede ser lineal en un sistema de ecuaciones en diferencias con dos sucesiones y dos ecuaciones de primer orden lineales con coeficientes constantes, siendo que la única forma que adquiere una estabilidad no nula la da el caso de aquellos modelos que se asocian a procesos de Markov. Con estos sistemas se propone también un modelo cuadrático, en donde participan términos que contienen ambas sucesiones, consecuencias del tipo de modelo, donde dicho término proviene del supuesto de la participación de ambas sucesiones, tal el caso de modelos de tipo presa depredador, donde el contacto entre especies puede ser el determinante del comportamiento del sistema. La forma logística de alguna o ambas sucesiones es también una posibilidad que se plantea, a fin de hallar otro tipo de estabilidades. Estos modelos compartimentados, llamamos *bicompartmentados* a fin de aclarar la cantidad de compartimentos que posee. La aplicación de dinámica poblacional, competencias entre negocios, vista aquí, puede rápidamente extenderse a tres o más compartimentos al igual que los de tipo procesos de Markov.

En el caso de modelos de tres compartimentos, denominados *tricompartimentados*, se presenta el modelo epidemiológico tipo SIR, que no es lineal, justamente por los términos de contactos, por lo que se prevé la extensión del software, aunque las de tipo lineal son fácilmente simulados con el software.

Tal vez el aporte didáctico más importante de los modelos compartimentados está en su visión para generalizar y *representar gráficamente* a los distintos modelos a partir de los más simples. En efecto la correspondencia de los modelos compartimentados con sus interpretaciones gráficas se muestra a continuación, acompañando de ejemplos de aplicaciones con software de la simulación.

2.5. Modelos Unicompartmentados

Mencionamos en el apartado anterior, que al considerar un solo compartimento, lo llamamos unicompartmentado a tales modelos matemáticos. Aun así, la variable en estudio puede tener dos posibilidades, estar contenida o no ese compartimento, con lo cual la variación a lo largo del tiempo, puede provenir de un cambio de posición o pertenencia, al compartimento. Otra variación posible puede provenir en el caso de ser la cantidad de seres vivientes, que estos se procreen o su defunción. Creación o destrucción para el caso de otros elementos que se representen con esa variable. Por ello distinguimos esa relación con el exterior del compartimento a dos casos:

2.5.1. Modelo Unicompartmentado Cerrado

Se entiende como Modelo Unicompartmentado cerrado, con la única especie X que se modifica en el tiempo en forma densodependiente con multiplicidad a , al expresado mediante la ecuación recursiva $X_{t+1} = aX_t$. Esto se representa en la figura 2.1.

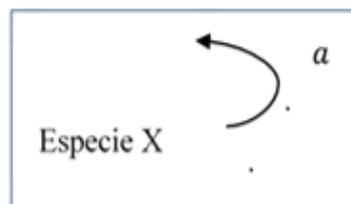


Figura 2.1: Modelo Unicompartmentado cerrado

Con la ecuación en diferencias que se dio, y si además tiene un valor inicial C , queda determinado el problema con valor inicial discreto que se debe simular:

$$\begin{cases} X_{t+1} - aX_t = 0 \\ X_0 = C \end{cases}$$

Aplicación I: Modelo de Capitalización

Realizaremos a continuación aplicaciones de algunos de los casos presentados:

PROBLEMA: Se coloca un monto inicial de veinte mil pesos a una tasa mensual de cinco por ciento durante ocho meses. Encuentre la expresión que modela el problema y calcule el monto durante los ocho meses que se desarrolla.

SOLUCIÓN: El monto en cada tiempo t lo indicaremos con M_t . Así el monto inicial es $M_0 = 20000$, y el crecimiento del monto es dependiente de la cantidad inicial en un 5%, es decir el nuevo monto se obtiene como $M_{t+1} = 1,05M_t$, con lo que la ecuación resulta $M_{t+1} - 1,05M_t = 0$, y el problema con valor inicial que modela el problema es:

$$\begin{cases} M_{t+1} - 1,05M_t = 0 \\ M_0 = 20000 \end{cases}$$

Esto lo podemos representar en la siguiente tabla:

Mes	0	1	2	3	4	5	6	7
Monto	20000	21000	22050	23152,50	24310,13	25552,63	26801,91	28142,01

Ahora para simular el modelo usamos el software obteniendo:

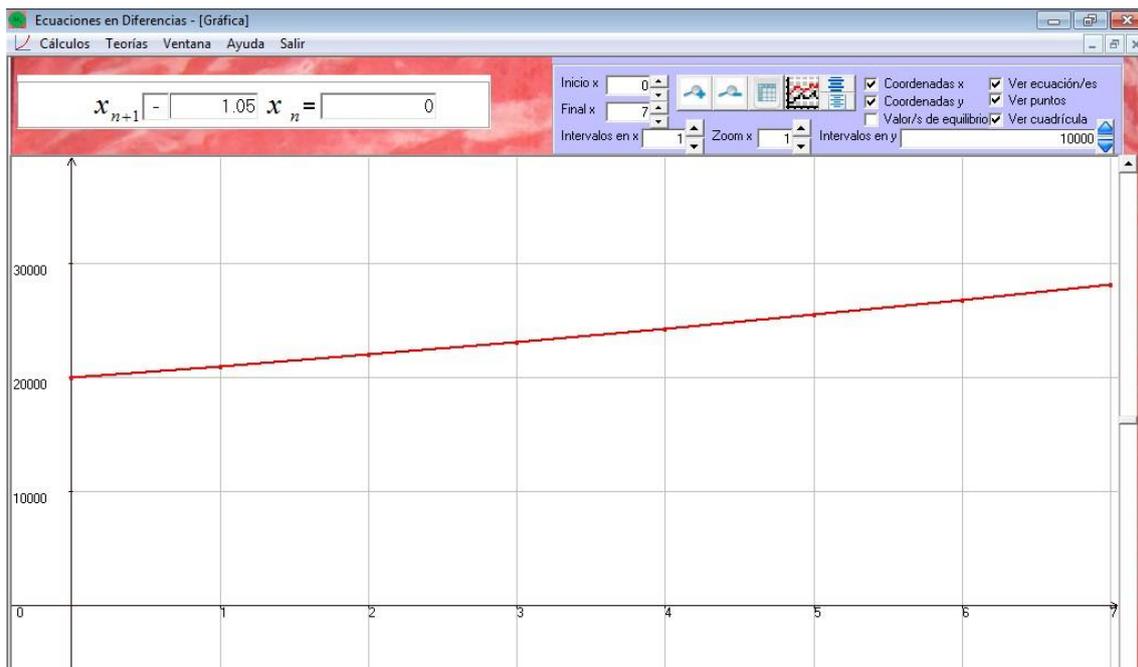


Figura 2.2: Simulación de la aplicación I (realizada con software libre de EED)

2.5.2. Modelo Unicompartimentado No Cerrado

Modelo Unicompartimentado no cerrado, con la única especie X que se modifica en el tiempo en forma densodependiente con multiplicidad a , y por una cantidad constante que incluye ingresos o egresos al compartimento, expresados con una variable b . Así la expresión está dada por la ecuación en diferencia que resulta de la forma recursiva $X_{t+1} = aX_t + b$. Vemos la representación en la figura 2.3.

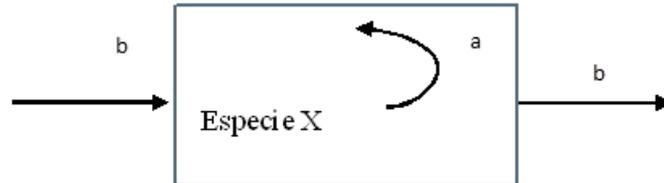


Figura 2.3: Modelo Unicompartimentado no cerrado

Si además tiene un valor inicial C dado, el problema con valor inicial discreto que se debe simular es el siguiente:

$$\begin{cases} X_{t+1} - aX_t = b \\ X_0 = C \end{cases}$$

Aplicación II: Modelo Lineal en Dinámica Poblacional

PROBLEMA: La población de una pequeña localidad a partir de un año dado considerado como base, con unos 2.500 habitantes varía en los siguientes años con una tasa de natalidad de 35 por ciento, con una mortalidad de 19 por ciento. Además el movimiento migratorio es de 60 personas que ingresan anualmente y 20 que emigran. Considere un modelo de esta dinámica poblacional e indique el tamaño poblacional durante diez años.

SOLUCIÓN: Esto es, una población inicial $P_0 = 2500$ habitantes. En Demografía las variables natalidad se denota con b (born) y la mortalidad con d (o defunción death). Las tasas de natalidad b y mortalidad d son densodependientes, por los que su diferencia contribuye al parámetro de la ecuación en diferencias, esto es $a = 1 + b - d = 1 + 0,35 - 0,19 = 1,16$. Aquí los valores de migración son absolutos, o sea no son densodependientes, y conforman el término constante de la ecuación en diferencias, es decir: $b = 60 - 20 = 40$

Con esto el modelo compartimentado es
$$\begin{cases} X_{t+1} - 1,16X_t = 40 \\ X_0 = 2500 \end{cases}$$

Los tamaños poblacionales en los años solicitados están en la siguiente tabla:

Año	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Población	2500	2940	3450	4042	4729	5525	6450	7522	8765	10208

Simulados con el software se verifican los valores y lo graficamos.

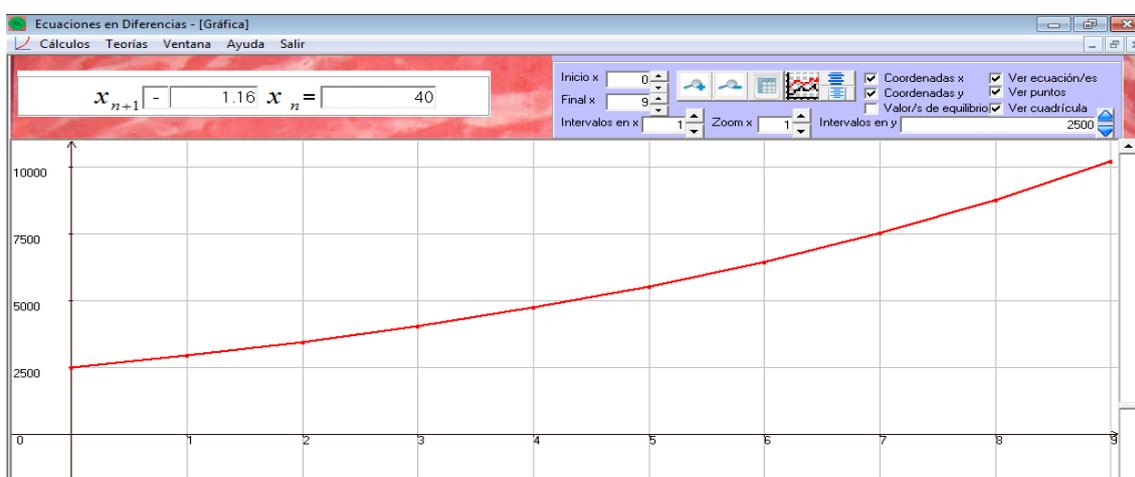


Figura 2.4: Simulación de la aplicación II (realizada con software libre de EED)

Aplicación III: Modelo Cuadrático en Dinámica Poblacional

En algunos casos nos interesa modelar un problema donde la única especie alcanza un valor el cual permanece estable en adelante. Tal modelo en Ecología se conoce como *logístico*. Para nuestro caso hablaremos de un crecimiento inhibido cuadrático o logístico discreto. En efecto, el comportamiento variacional dado por una ecuación en diferencias de primer orden lineal con coeficientes constantes, es o bien constante, o de crecimiento indefinido o un decrecimiento a cero.

La limitación de ese modelo llamado *malthusiano* (Thomas Robert Malthus, 1766-1834, economista y demógrafo inglés, su teoría demográfica se resume en: “la población tiende a crecer en progresión geométrica, mientras que los alimentos solo aumentan en progresión aritmética, por lo que la población se encuentra siempre limitada por los

medios de subsistencia”) y que luego fue completado por Verhulst en 1837, proponiendo una tasa de variación relativa proporcional al tamaño de población y a la diferencia de esta a un tamaño de equilibrio dado previamente, con lo cual impone un freno al crecimiento ilimitado del modelo de Malthus. Eso termina definiendo al crecimiento logístico discreto por el PVID:

$$\begin{cases} N_{t+1} = (1 + Ka)N_t - aN_t^2 \\ N_0 = N(0) \end{cases}$$

Aquí la EED es cuadrática de primer orden. En efecto, el número de individuos de una población está determinado no solo por el potencial reproductor sino por otras variables tales la que el ambiente señala un tope de crecimiento, sea ya por el recurso alimenticio o por el espacio disponible. Tal valor se conoce como *capacidad de carga del ambiente*, se lo representa con K , y se interpreta como el número promedio de individuos que puede soportar el ambiente. Además con a expresaremos a la tasa de crecimiento, y así la expresión logística surge de la tasa de crecimiento proporcional a su tamaño y al que resta para alcanzar la capacidad de carga es decir: $N_{t+1} - N_t = a(K - N_t)N_t$

PROBLEMA: Consideremos una población inicial de cuatro ejemplares que crece a ritmo acelerado en un principio para luego reducir su intensidad de crecimiento hasta alcanzar el valor estable de 80 individuos.

SOLUCIÓN: Plantearemos el modelo logístico discreto, en donde la constante a de la tasa de crecimiento sea 0,01, es decir:

$$\begin{cases} N_{t+1} = (1 + 80 \times 0,01)N_t - 0,01N_t^2 \\ N_0 = 4 \end{cases}$$

Los primeros valores de la simulación obtenida con el software se muestran a continuación:

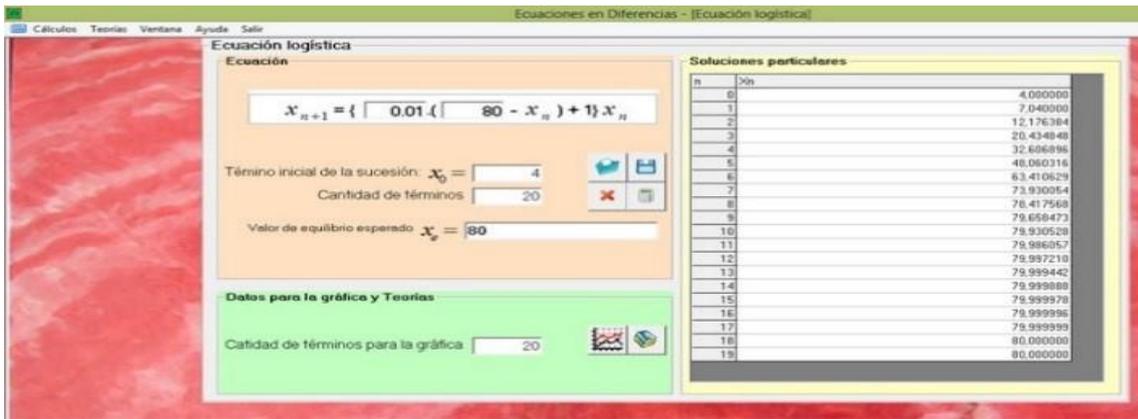


Figura 2.5: Simulación numérica de la aplicación III (realizada con software libre de EED)

La representación gráfica de esta simulación, se expresa en la figura 2.6, donde se observa la expresión de la ecuación en diferencias no lineal, y se detallan los valores iniciales y finales del periodo solicitado.

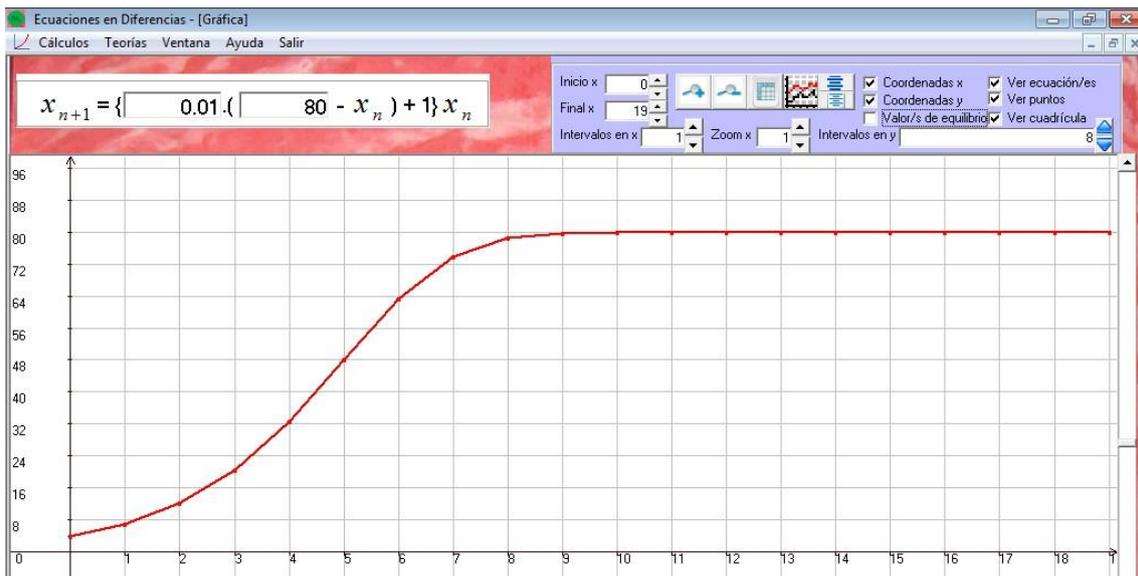


Figura 2.6: Simulación de la aplicación III (realizada con software libre de EED)

Aplicación IV: Modelo Lineal con Retardo en Dinámica Poblacional

Otro caso de un modelo compartimentado de una especie, es aquel donde la variación no solo depende del tamaño anterior de la población sino de uno más atrás. Se suele denotar

como crecimiento con retraso o retardo (delay), y lo representaremos con una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

El tamaño de la población de la única especie que estamos considerando hasta este momento puede variar no solo respecto del tamaño en el estado anterior sino de otro estado previo a éste. Una enfermedad congénita puede aparecer en una generación intermedia, o un recurso como el alimento puede depender de la depredación dada por la generación anterior la cual es consecuencia de la tasa de reproducción de la generación anterior a ella. En cualquiera de los casos, x_{n+1} depende tanto de x_n como de x_{n-1} . Esto se puede expresar mediante una ecuación en diferencias de segundo orden, aquí consideramos con coeficientes constantes, lineal, es decir de la forma:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = d.$$

En consecuencia podemos modelar el comportamiento de nuestra población unicompartmentada mediante el PVID:

$$\begin{cases} x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = d \\ x_0 = A \\ x_1 = B \end{cases}$$

Tal vez el problema más famoso es el que generó la sucesión de Fibonacci, por ello podemos recrearla en sus primeros quince términos.

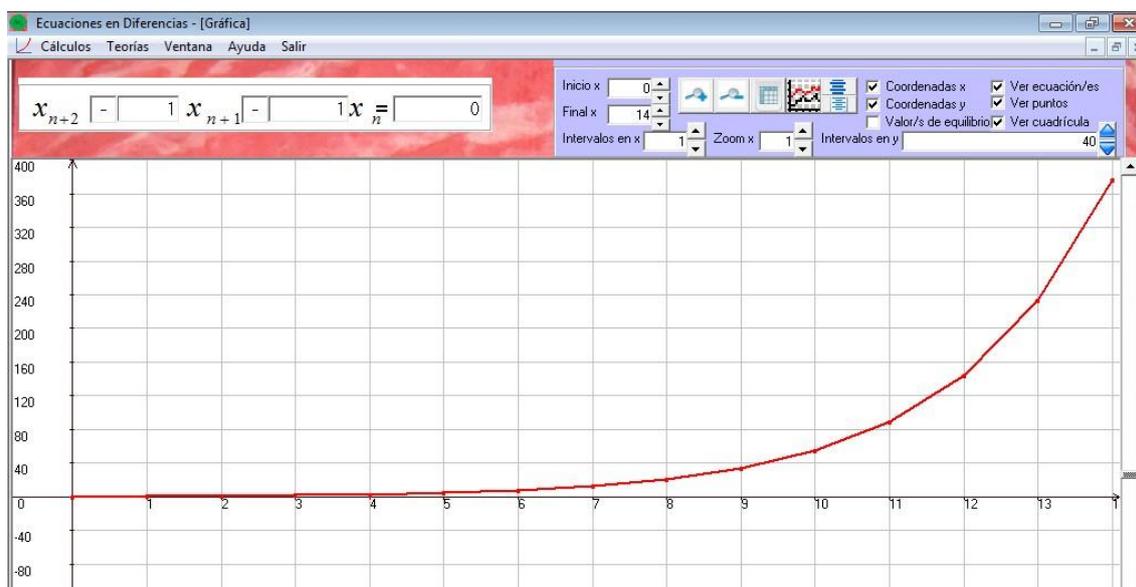


Figura 2.7: Simulación de la aplicación IV (realizada con software libre de EED)

2.6. Modelos Bicompartimentados

En este caso tenemos dos variables que se hallan en distintos compartimentos, y que a lo largo del tiempo varían o no de posición, teniendo ahora tres posibilidades, estar en alguno de los compartimentos o fuera de ambos. Es decir la idea de cerrados o no cerrados se repite de los unicompartimentados.

Esto lo podemos representar mediante el siguiente esquema:

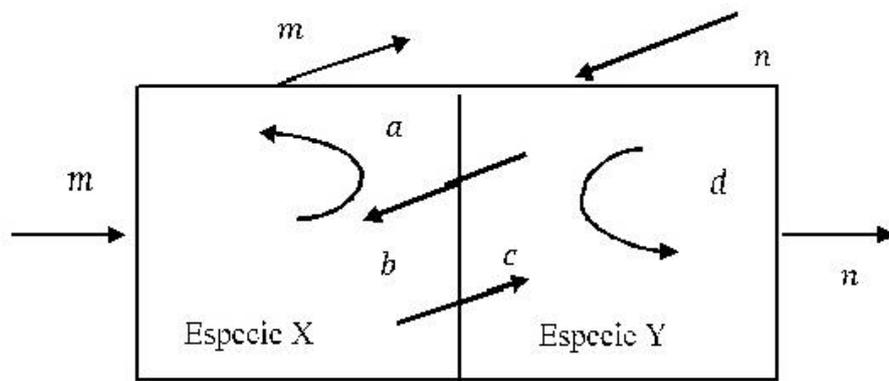


Figura 2.8: Modelo Bicompartimentado

Para el caso lineal con dos especies X e Y, en donde las tasas de contribución de cada especie siguen siendo constantes, se tiene el sistema de ecuaciones en diferencias asociado al modelo bicompartimental de la figura 2.8, donde se indica en la expresión siguiente:

$$\begin{cases} X_{t+1} = aX_t + bY_t + m \\ Y_{t+1} = cX_t + dY_t + n \end{cases}$$

Aplicación V: Modelo Lineal No Cerrado en Dinámica Poblacional de dos Especies

Consideremos dos especies de las cuales la primera evaluada en un tiempo t , (X_t) actuando como presa, ante la ausencia de la segunda, que actúa como depredador, crece en forma natural a una tasa de 4%, es decir que la variación es $1+0,04=1,04$, que colocaremos como coeficiente en el sistema, pero que ante la presencia del depredador (Y_t) disminuye, si por cada 25 depredadores desaparecen 2 presas, esto da un 8% de

disminución, siendo $-0,08$ el coeficiente del sistema. Por otro lado ante la falta de las presas el depredador disminuye en un 62% , así la variación es $1 - 0,62 = 0,38$. Además la presencia de la presa, aumenta la supervivencia del depredador en un 25% , como consecuencia que nace un depredador por cada cuatro presas. Para regular la población se retiran 4 ejemplares del depredador anualmente mientras que de las presas se trata de mantener lo existente. Inicialmente se tiene 100 ejemplares de la primera especie y 5 de la depredadora. Este modelo se expresa como:

$$\begin{cases} X_{t+1} = 1,04X_t - 0,08Y_t + 0 \\ Y_{t+1} = 0,25X_t + 0,38Y_t - 4 \end{cases}$$

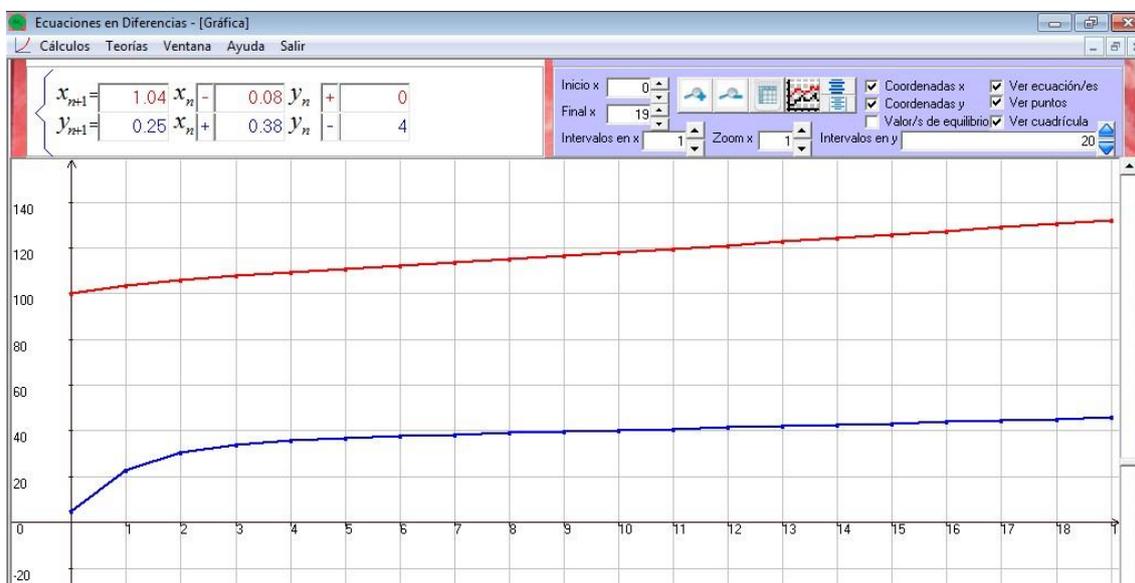


Figura 2.9: Simulación de la aplicación durante 20 años (realizada con software libre de EED)

Aplicación VI: Modelo Lineal Cerrado en Dinámica Poblacional de dos Especies

Con m y n nulos, el modelo es cerrado, además aplicando algebra de matrices, puede reconocerse que la estabilidad del modelo bicompartimentado cerrado se da mediante el proceso de Markov, con el cual los escalares a , b , c y d deben variar entre cero y uno y las sumas siguientes se deben de cumplir: $a + c = 1$ y $b + d = 1$.

PROBLEMA: Dada la población de una provincia, donde distinguimos por un lado la población de la Capital (X_t) y por otro el resto de la provincia (Y_t), deseamos modelar la dinámica de tal población durante quince años, considerando que se deprecia el movimiento migratorio externo, aquel que emigra o inmigra de la provincia. Si inicialmente hubo 15.000 habitantes en la capital y 40.000 en el interior, y se observa que el 8% va de la capital al interior mientras que el 24% va del interior a la capital, simule la dinámica en la cual se desprecia el crecimiento natural, es decir, natalidad y mortalidad. Finalmente, con el modelo obtenido, observe que sucede en los siguientes quince años. Con los valores dados, el sistema de EED que corresponde es:

$$\begin{cases} X_{t+1} = 0,92X_t + 0,24Y_t \\ Y_{t+1} = 0,08X_t + 0,76Y_t \end{cases}$$

Simulando los quince años con los valores iniciales dados se obtiene:

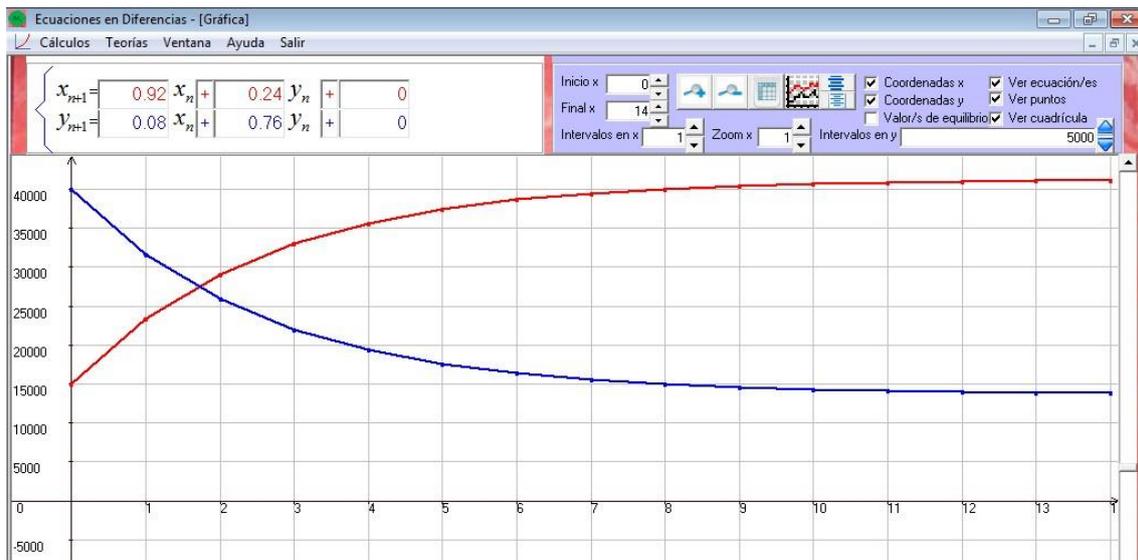


Figura 2.10: Simulación de la aplicación VI (realizada con software libre de EED)

Aplicación VII: Modelo Cuadrático en Dinámica Poblacional de dos Especies

Para los modelos bicompartimentados, existe la posibilidad de plantear modelos no lineales, en particular consideramos aquí los cuadráticos. Esto se debe a que la variación que sufre una especie respecto de la cantidad que posee la otra es dependiente de ella

también, esto es, que existe un *factor de contacto* entre ambas, que influye como factor de cambio cuantitativo. Por ello el modelo bicompartimentado cuadrático lo expresamos en forma general mediante:

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + by_t + px_t y_t + m \\ y_{t+1} = cx_t + dy_t + qx_t y_t + n \end{cases}$$

En particular tomaremos un caso reducido del mismo, dado por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + bx_n y_n \\ y_{n+1} = cy_n + dx_n y_n \end{cases}$$

Este modelo es conocido en *ecología* como *presa depredador*, aunque los bicompartimentados lineales también lo son.

2.7. Modelos tricompartmentados

Es decir, consideramos modelos con tres compartimentos, y al igual que antes podemos tomar casos cerrados o no, lineales o no, y con retraso o no. Por un momento pensemos en los lineales con coeficientes constantes, el sistema de ecuaciones en diferencias queda:

$$\begin{cases} X_{t+1} = a_1 X_t + b_1 Y_t + c_1 Z_t + m \\ Y_{t+1} = a_2 X_t + b_2 Y_t + c_2 Z_t + n \\ Z_{t+1} = a_3 X_t + b_3 Y_t + c_3 Z_t + p \end{cases}$$

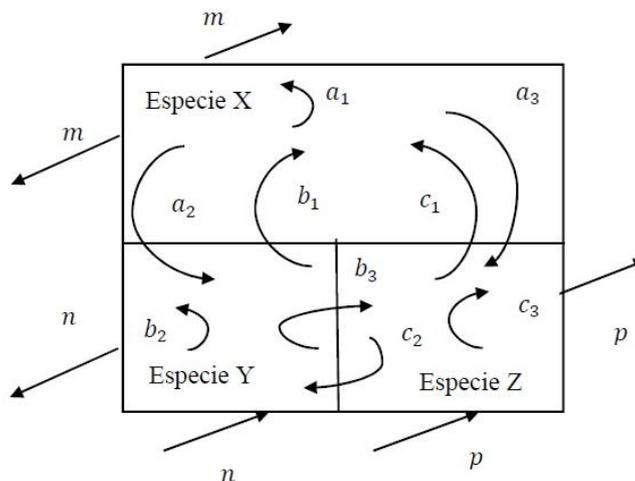


Figura 2.11: Modelo Tricompartmentado

Para el caso en que el modelo es de tipo procesos de Markov, donde todos los coeficientes de las variables tienen valores entre cero y uno y la suma de las columnas es igual a uno, y el sistema es homogéneo o sea $m = n = p = 0$, tenemos asegurada una estabilidad.

Aplicación VIII: Modelo Lineal Cerrado en Competencia de Negocios

PROBLEMA: Supongamos que una determinada gaseosa se vende en un barrio en tres tipos de negocios: kiosco, almacén y supermercado. Se observa que por distintos motivos, los integrantes de esa comunidad todos compran, los fines de semana, al menos un envase en un local, pero que por motivos de atención, precio, horarios u otra comodidad, recurren a diferentes locales en la siguiente semana, aunque a veces repiten el lugar de compra. Si suponemos que inicialmente los que compran en el kiosco son 40, en el almacén 120 y otros 70 en el supermercado, y que de los que compran una semana en el kiosco el 10% a la semana siguiente compran en el almacén y el 15% pasa a comprar en el supermercado. De los que un fin de semana compran en el almacén a la semana siguiente 15% pasan a comprar en el kiosco y el 15% en el supermercado. Y de los que compran en un fin de semana en el supermercado, al fin de semana siguiente el 25% compra en el kiosco, el 10% pasa a comprar en el almacén. ¿Cómo varía la clientela entre los tres locales de venta durante el mes? Plantee el modelo y simule durante tres meses con la condición inicial dada.

El sistema de ecuaciones en diferencias que modela el problema es:

$$\begin{cases} K_{t+1} = 0.75K_t & +0.15A_t & +0.25S_t \\ A_{t+1} = 0.10K_t & +0.70A_t & +0.10S_t \\ S_{t+1} = 0.15K_t & +0.15A_t & +0.65S_t \end{cases}$$

Ahora simulemos el problema con valor inicial discreto durante los doce fines de semana.

MODELOS MATEMATICOS COMPARTIMENTADOS

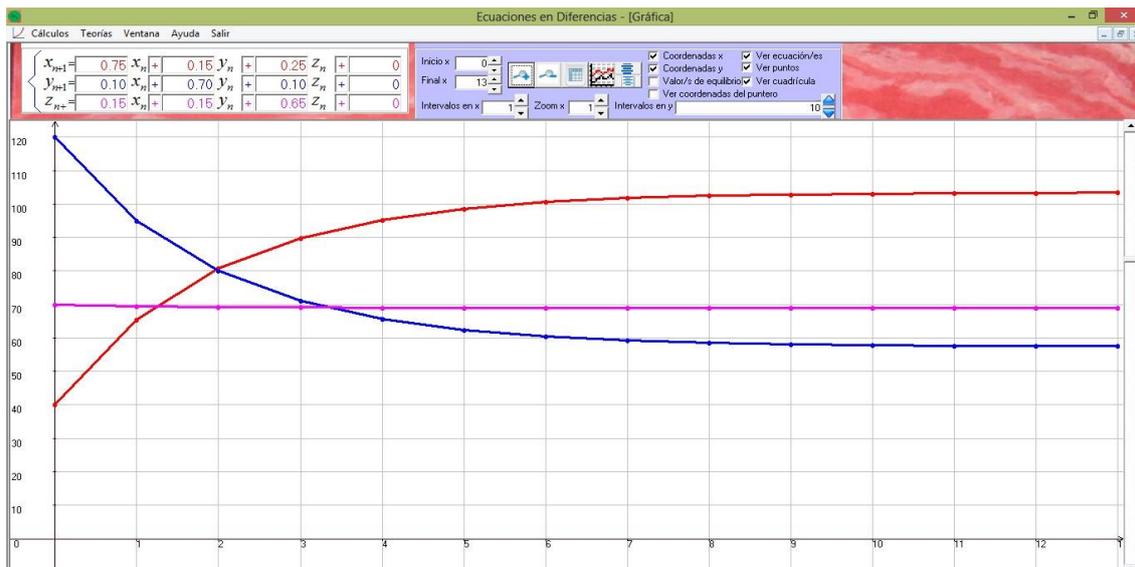


Figura 2.12: Simulación de la aplicación VIII (realizada con software libre de EED)

CAPÍTULO 3:
MODELOS MATEMÁTICOS
COMPARTIMENTADOS CONTINUOS

María Luz del V. Quiroga

Sonia L. Mascareño

Silvia Inés del V. Navarro

Gustavo A. Juarez

3.1. Introducción a los Modelos Compartimentados Continuos

Habiendo ya abordado la modelización dinámica en forma discreta mediante EED con el enfoque de compartimentos, ahora pretendemos extender esta propuesta al caso continuo mediante tales compartimentos. Considerando el habitual paso desde lo discreto hacia lo continuo, que se da en los sistemas numéricos, pero que en las ecuaciones variacionales no suele suceder, al extremo de no enseñarse en muchas oportunidades las ecuaciones en diferencias. Nuestra experiencia, en forma aplicada en la modelización, luego de conocer ambas herramientas, se muestra la eficiencia de esta propuesta. Por otro lado el método de los compartimentos consiste en lo siguiente, dado un sistema donde el todo se compone de un cierto número de compartimentos o subsistemas, estos están ligados o relacionados entre sí. Para ello estudiamos en forma continua ese número de ejemplares o cantidades a lo largo del tiempo mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (en adelante EDO), pretendiendo que cada compartimento tenga su propia ecuación y por ello en su totalidad, el todo, el sistema, se representa por las ecuaciones diferenciales simultáneas o sistema de ecuaciones diferenciales.

Aquí el objetivo fundamental de la propuesta es presentar la modelización matemática dinámica continua, presente en problemas interdisciplinarios, planteándolos mediante modelos compartimentados. Para alcanzar este objetivo, una forma es reconocer que a partir de la enseñanza efectuada de las EED, en la formación de Profesores de los últimos años de las Carreras de Matemáticas y Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad Nacional de Catamarca, y en el Instituto de Estudios Superiores Andalgalá-Provincia de Catamarca, se propuso este tipo de enfoque en los modelos dinámicos discretos mediante compartimentos (Valdez, Romero, Navarro, Juarez, 2016), y actualizado en el capítulo anterior.

Por ello, ahora extendemos este último enfoque al tratamiento continuo considerando problemas con valor inicial continuos para expresar la modelización compartimentada continua mediante EDO.

Es frecuente observar modelos matemáticos dinámicos en la forma continua, tanto a nivel educativo como en investigación. Sin embargo el paso de lo discreto a lo continuo

dado en los sistemas numéricos parece escapar al estudio de la variación en las ecuaciones, por ello en la formación de profesores de matemática en los últimos años, nos permitimos aplicar la creación de modelos matemáticos discretos mediante EED y posteriormente mediante EDO. Las mencionadas EED presentan una ventaja importante, pues posibilita iniciarse en el pensamiento matemático interdisciplinario mediante el planteo de problemas de diversas áreas, donde la matemática asume su carácter instrumental, proporcionando además de la modelización, la simulación de los mismos, de las cuales se obtienen como resultado el comportamiento del problema asumido. Tales ecuaciones en diferencias se aplican sin necesidad del Cálculo, por lo que en Biología es aprovechado (Jeffers, 1991). Esto llevo a realizar la tarea desde compartimentos donde las variaciones resultaban más representativas al cambio temporal.

Ahora extendemos esta modalidad compartimentada a las EDO para tratar problemas con valores iniciales continuos que modelan problemas interdisciplinarios. Es decir, lo que se propone como trabajo, son problemas interdisciplinarios que puedan simularse mediante ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Por ello se consideran problemas motivadores y de aplicación en física, ecología, economía, dinámica poblacional y epidemiología, todos ellos bajo el concepto de modelos compartimentados.

3.2. Modelo Unicompartimentado

Este trabajo se enmarca dentro de la matemática y la física aplicada, en particular en la modelización matemática y dentro de ellas, más específicamente a los denominados *modelos matemáticos dinámicos continuos*. Por ello, trabajaremos con EDO y más precisamente con sistemas de ecuaciones diferenciales.

Su evolución y posible estabilidad del sistema, se logró mediante la modelización, siendo ésta la propuesta final, es decir, el comportamiento del modelo. Para ello escribiremos, nuestro planteo como un Problema con Valor Inicial Continuo (PVIC), comúnmente llamado PVI, pero denominado así para distinguirlo del PVID, esto es Problema con Valor Inicial Discreto (Juarez, Navarro, 2013).

Por esto es que comenzamos mencionando la utilización de un PVIC para representar una situación real en donde una, dos o más especies, o tipos de elementos, que conforman un

todo, o sea un sistema desde el punto de la teoría general de sistemas, y que evolucionan conjuntamente de tal forma que uno de ellos depende, no solo de sí mismo, sino también de los otros componentes con los que comparten su medio, puedan ser representados.

De esta manera estamos diciendo que el *todo* está conformado en *compartimentos*, y de allí la expresión de **modelos compartimentados**. El *método de los compartimentos* consiste en un sistema con cierto número de compartimentos o subsistemas que están ligados o relacionados, tal el caso de dos especies que conviven en un mismo hábitat, o personas de una comunidad que durante un cierto tiempo recorren diversos estados de salud respecto a una dada enfermedad.

Llamamos **modelo unicompartimentado**, cuando existe un único compartimento, a él asociamos una ecuación diferencial lineal con coeficiente constante de primer orden. A partir de los modelos unicompartimentados se permite justificar el supuesto para una partición del todo en dos compartimentos, donde la forma del modelo puede ser lineal en un sistema de ecuaciones diferenciales con dos funciones y dos ecuaciones de primer orden lineales con coeficientes constantes. Con estos sistemas se propone también un modelo cuadrático, en donde participan términos que contienen ambas sucesiones, consecuencias del tipo de modelo, donde dicho término proviene del supuesto de la participación de ambas sucesiones, tal el caso de modelos de tipo *presa-depredador*, donde el contacto entre especies puede ser determinante del comportamiento del sistema. La forma *logística* de alguna o ambas sucesiones es también una posibilidad que se plantea, a fin de hallar otro tipo de estabilidades. Estos modelos compartimentados, los llamamos **modelos bicompartimentados** a fin de aclarar la cantidad de compartimentos que posee. La aplicación de dinámica poblacional, competencias entre negocios, vista aquí, puede rápidamente extenderse a tres o más compartimentos.

En el caso de modelos de tres compartimentos se cuenta con el modelo epidemiológico tipo SIR, que no es lineal, justamente por los términos que representan el contacto entre especies.

Tal vez el aporte didáctico más importante de los modelos compartimentados está en su visión para generalizar y representar gráficamente a los distintos modelos a partir

de los más simples. En efecto la correspondencia de los modelos compartimentados con sus interpretaciones gráficas se muestra en cada caso, acompañado de aplicaciones.

3.2.1. Modelo Unicompartimentado Cerrado

Modelo Unicompartimentado cerrado, con la única especie X que se modifica en el tiempo t en forma densodependiente con multiplicidad a , por lo que la ecuación diferencial que expresa la variación instantánea es de la forma $\frac{dX(t)}{dt} = aX(t)$. Esto se representa en la figura 3.1.

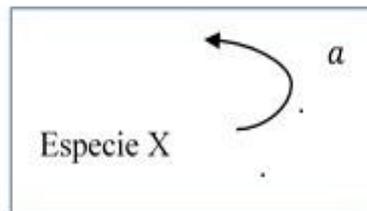


Figura 3.1: Modelo Unicompartimentado cerrado

Si además tiene un valor inicial C conocido, el problema con valor inicial continuo que se debe simular es el siguiente PVIC:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} - aX(t) = 0 \\ X(0) = C \end{cases}$$

Tal PVIC tiene solución en términos de la constante:

$$X(t) = Ce^{at}, \text{ para todo tiempo } t.$$

Esta expresión corresponde a la ley lineal del crecimiento de Malthus para un crecimiento de una población, donde a se denomina usualmente **parámetro de Malthus** o **Potencial Biológico**. Así una especie que crece según esta ley, varía exponencialmente con el tiempo. Este modelo simple, solo puede darse en condiciones extremas, pues es independiente de otros factores, tales como el hábitat, alimento, etc. Estos últimos son factores determinantes para la subsistencia. Cuando la constante a es mayor a uno, se tiene un crecimiento, si es positivo pero menor a uno se tiene un decrecimiento que tiende

a cero, y siendo igual a uno la cantidad permanece constante durante todo su dominio. El ejemplo típico del decrecimiento es el *decaimiento radiactivo*, usado para determinar la edad de un fósil ante pruebas realizadas con material radiactivo, tal el caso del carbono 14, entre otros, según sea el tiempo estimado a determinar es el *isotopo* usado.

Aplicación IX: Modelo Exponencial en Dinámica Poblacional

PROBLEMA: Una población de bacterias crece de manera tal que su tasa de crecimiento en horas, en el tiempo t , es igual al décimo de la población en ese instante.

SOLUCIÓN: Describiremos la ED que exprese este crecimiento. Siendo $P(t)$ el tamaño de la población en el tiempo t . Entonces su variación está dada por $\frac{dP(t)}{dt}$. Sabiendo que es un décimo de la población resulta:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{P(t)}{10}$$

Aplicación X: Modelo Exponencial en Dinámica Poblacional

PROBLEMAS: En un cierto cultivo de bacterias la velocidad de crecimiento es directamente proporcional al número presente, y se ha observado que se duplica al cabo de cuatro horas. Establezca el modelo diferencial que determina tal crecimiento poblacional. Finalmente aplique el modelo obtenido para hallar el número de bacterias que habrá en el cultivo transcurridas diez horas.

SOLUCIÓN: Llamemos al número de bacterias presentes en un tiempo t como $N(t)$. La velocidad de crecimiento en ese instante t , expresado como $\frac{dN}{dt}$, es proporcional al número presente, sea la constante de proporcionalidad indicada por k . Así el modelo diferencial está dado por un solo compartimento al cual la tasa de variación es denso dependiente de la cantidad dada por la variable del problema. Resulta entonces:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden. Además nos dice que se duplica el número de población al cabo de cuatro horas, esto es: $N(4) = 2N(0)$. O sea, tenemos un valor inicial, por lo que resolveremos este PVIC.

Como la solución de la ecuación diferencial está dada por $N(t) = Ce^{kt}$, y así $N(0) = C$, pero $N(4) = 2C$ por un lado y también es $N(4) = Ce^{4k}$. De los segundos miembros resulta: $2 = e^{4k}$

Con ello $k = \frac{\ln 2}{4} \approx 0,173287$. Esto es $N(t) = Ce^{0,173287 t}$. Finalmente a las diez horas

la población de bacterias será: $N(10) = Ce^{10 \cdot 0,173287}$. Esto es 5,656854 veces la población inicial.

Aplicación XI: Modelo de Tensión Superficial

Aplicación del tipo de *modelo unicompartimentado*, analizado desde la Física: el modelo de *Tensión superficial*.

Para ello, se presenta la propuesta experimental de éste fenómeno; que desde el punto de vista microscópico, la tensión superficial de una molécula en el interior de un líquido está sometida a la acción de fuerzas atractivas o de cohesión, en todas las direcciones, siendo la resultante de todas ellas nula. Pero si la molécula está situada en la superficie del líquido, sufre un conjunto de fuerzas de cohesión, cuya resultante es perpendicular a la superficie, experimentando pues una fuerza dirigida hacia el líquido. De aquí que sea necesario realizar cierto trabajo para mover las moléculas hacia la superficie venciendo la resistencia de estas fuerzas, por lo que las moléculas de la superficie tienen más energía que las del interior y tiende a contraerse y ocupar el área más pequeña posible.

Una molécula en el seno de un líquido experimenta fuerzas atractivas debido a todas sus vecinas, esto disminuye su energía potencial. Una molécula en la superficie no tiene tantas vecinas, y su energía potencial no es tan baja. Por tanto, las moléculas de la superficie se disponen de forma que tengan el máximo número posible de vecinas. En este proceso, hacen mínima el área de la superficie y la energía potencial, que producen la tensión superficial, tal se muestra en la figura 3.2. Siendo su expresión matemática más general:

$$\gamma = \frac{F_a}{L} \quad (3.1)$$

Donde F_a es la fuerza que ejerce la superficie del líquido, L es la longitud de la superficie libre del líquido y γ es la tensión superficial, siendo su unidad $\left(\frac{N}{m}\right)$.

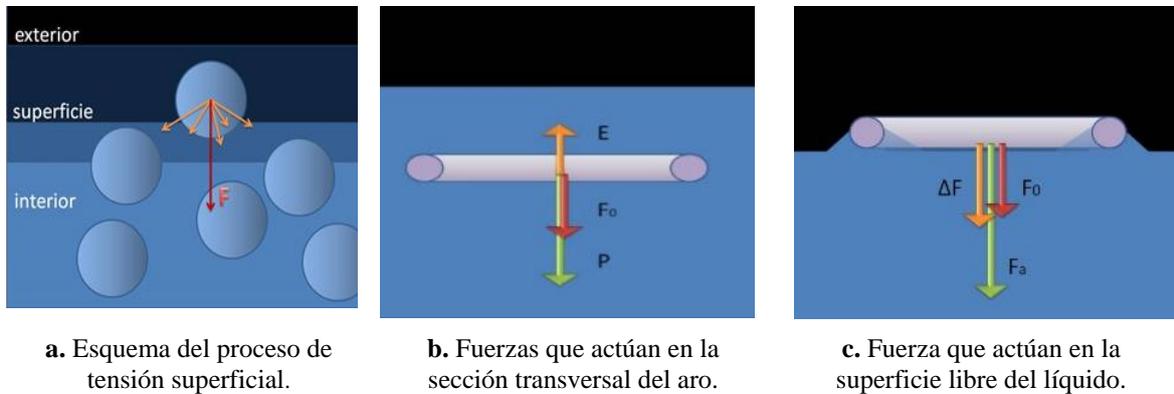


Figura 3.2: Descripción del proceso de tensión superficial

En la figura 3.2b., se muestra la sección transversal de un aro, donde se encuentran representadas las fuerzas que actúan sobre él cuando está totalmente sumergido en el líquido, la fuerza E representa el empuje del líquido sobre el aro, w el peso del mismo, F_0 la fuerza resultante, o sea el peso aparente del aro en el líquido. Mientras en la figura 3.2c., se muestra cuando el aro se encuentra próximo a la superficie, éste experimenta otra fuerza que se debe a la tensión superficial de la película del líquido sobre y debajo de él, siendo que la fuerza resultante F_a , se puede medir por medio de un dinamómetro. Por lo tanto, la fuerza debido a la tensión superficial será:

$$\Delta F = F_a - F_0 \quad (3.2)$$

Ya que la tensión superficial se debe a las dos superficies de la película del líquido en contacto directo con el aro, la longitud del mismo será $2L$ donde $L = \pi d$. Reemplazando en la ec. (3.1), se obtiene:

$$\gamma = \frac{\Delta F}{2L} = \frac{F_a - F_0}{2(\pi d)} \quad (3.3)$$

De acuerdo a nuestro experimento el modelo matemático que hemos de considerar es de tipo exponencial, el cual se caracteriza por ser modelos de crecimiento muy rápido,

en donde la variable independiente x es el exponente de una constante b con $b > 0$ y $b \neq 1$ llamada *base*; k es el coeficiente que mantiene un crecimiento o decrecimiento respecto a la base $k \neq 0$; d es la *asíntota* de la función y c una *constante de desplazamiento horizontal*. Si $0 < b < 1$ la función es decreciente mientras que si $b > 1$ la función es creciente.

$$y = kb^{x+c} + d \quad (3.4)$$

El dispositivo experimental consistió de un aro de metal suspendido de un dinamómetro por medio de un hilo de masa despreciable. El aro se encuentra sumergido totalmente sobre un recipiente inicialmente con agua destilada. Por medio de una manguera se extrae el agua destilada del recipiente. Se usó una jeringa para medir la cantidad de jabón líquido que se agrega al agua destilada, un vaso graduado para medir la cantidad de agua destilada y con un calibre se midió el diámetro del aro, figura 3.3.



Figura 3.3: Dispositivo experimental de tensión superficial¹

Tal lo definido y teniendo en cuenta el fenómeno estudiado, el mismo responde a un *modelo unicompartimentado* cuya función es de tipo exponencial. Se buscó determinar la ecuación de la curva que mejor se ajusta a los datos obtenidos, en el sentido que la

¹ Trabajo experimental realizado por la Lic. Sonia Laura Mascareño, Prof. Néstor Vega, Lic. César Rubén Nieva, de la carrera Licenciatura en Enseñanza de las Ciencias Experimentales-FACEN-UNCA.

misma capture la *tendencia básica de los puntos dados*, de modo que la relación funcional entre las variables satisfaga a la ec. (3.4), obteniéndose la siguiente expresión:

$$\gamma(c) = \gamma_f + k(\gamma_i)^c \quad (3.5)$$

Donde γ_f es la tensión superficial límite, γ_i la tensión superficial del agua destilada, c la concentración de detergente en porcentaje variable y k la constante de estimación del jabón líquido. Reemplazando los valores obtenidos experimentalmente, se tiene:

$$\gamma(c) = 0,04 + k(0,13599)^c \quad (3.6)$$

Para calcular el valor de la constante k se despeja de (3.6), tomando a $c = 0$ representa que el agua destilada no tiene agregado de jabón líquido, entonces:

$$k = \frac{0,13 - 0,04}{(0,13)^0} = 0,09 \quad (3.7)$$

En consecuencia, tomando en cuenta el valor fiable de la cantidad x y su incertidumbre, se calcula los valores de tensión superficial a medida que se varían los agregados en porcentajes de concentración de jabón líquido c en el agua destilada. Por tanto, los valores obtenidos figura 3.4., donde los valores obtenidos de la tensión superficial al medir las fuerzas que actúan sobre el aro metálico, en el momento que se rompe la película del líquido con un error del 5%, corroboran el modelo matemático propuesto que verifica el decrecimiento exponencial a medida que crece la proporción de jabón líquido diluido en agua destilada, hasta alcanzar un valor constante.

Asimismo las fluctuaciones existentes al realizar el trabajo experimental pueden ser causadas por factores externos, ya que la tensión superficial varía con la temperatura, donde se destaca que cada uno de los puntos obtenidos en los distintos gráficos representan una situación en particular, la cual se la puede analizar de manera secuencial ya que la experiencia corresponde a un modelo matemático estático.

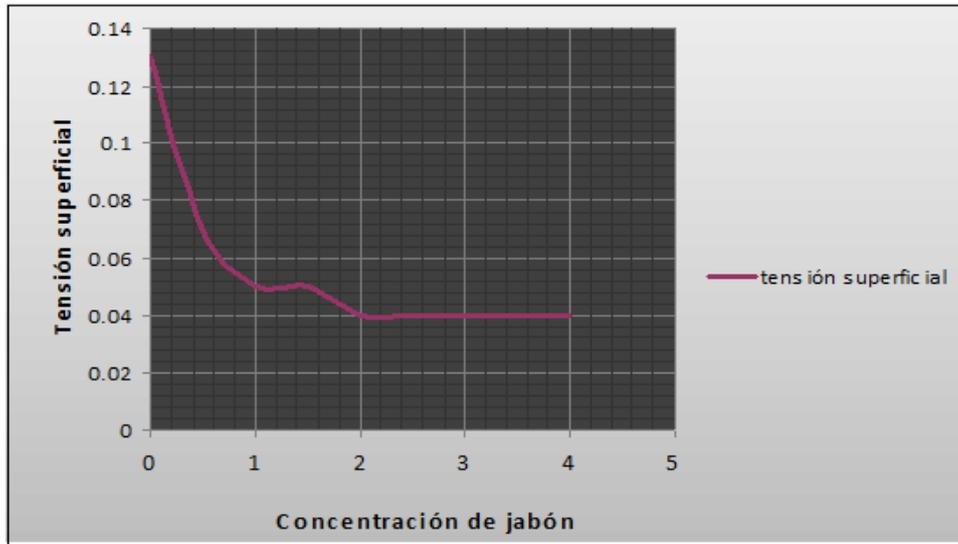


Figura 3.4: Curva de tensión superficial en función de la concentración de jabón líquido según el modelo matemático planteado.

3.2.2. Modelo Unicompartimentado no cerrado

Reconocemos la misma figura que se utilizó en el caso discreto:

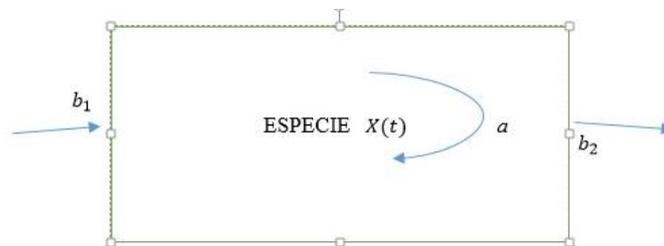


Figura 3.5: Modelo Unicompartimentado no cerrado

Si además tiene un valor inicial C conocido, el problema con valor inicial continuo que se debe simular es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} - aX(t) = b \\ X(0) = C \end{cases}$$

En ciertos casos, como en *dinámica poblacional*, estamos interesados en funciones que evolucionan en forma continua respecto del tiempo. A partir de una población inicial cuyo número de individuos está dado en un tiempo t por $N(t_0)$, la evolución se suele describir por una función $N(t)$, a lo largo del tiempo t . Para estudiar el crecimiento continuo de la población debemos buscar definir la tasa de crecimiento, así la variación poblacional por unidad de tiempo es: $\frac{dN(t)}{dt}$

Si se determina que la tasa de crecimiento es constantes, podemos decir: $\frac{dN(t)}{dt} = k$

Siendo k la tasa de crecimiento instantánea de tiempo. Y para encontrar la función continua que indica el número de individuos, resulta:

$$N(t) = kt + C$$

Con C constante de integración. Si además conocemos la población inicial $N(t_0)$, es precisamente éste valor, pues:

$$N(0) = k(0) + C = C$$

Aplicación XII: Modelo en Producción

PROBLEMA: Si en un mercado el número de un cierto producto que se modifica por la compra y venta de los mismos, sin ser dependientes de la cantidad existentes, y se observa que en promedio semanal, para un ingreso de 100 unidades se venden 87, es decir se tiene 13 unidades que se incrementan en forma constante, esto lo podemos modelar con la expresión anterior, es decir:

$$\frac{dN(t)}{dt} = 13$$

SOLUCIÓN: Suponiendo inicialmente 250 unidades del producto, al cabo de 45 semanas tendremos: $N(45) = 45 \times 13 + 250 = 585 + 250 = 835$ unidades.



Aplicación XIII: Modelo Exponencial en Dinámica Poblacional

PROBLEMA: La población de una pequeña localidad a partir de un año dado considerado como base, con unos 2.500 habitantes varía en los siguientes años con una tasa de natalidad de 35 por ciento, con una mortalidad de 19 por ciento. Además el movimiento migratorio es de 60 personas que ingresan anualmente y 20 que emigran. Considere un modelo de esta dinámica poblacional e indique el tamaño poblacional durante ocho años. Se tiene una población inicial $P(0) = 2500$ habitantes. Las tasas de natalidad y mortalidad son denso dependientes, por los que su diferencia contribuye al parámetro de la ecuación diferencial, esto es $a = 0,35 - 0,19 = 0,16$, mientras que los índices de migración no son denso dependientes, y conforman el término constante de la ecuación diferencial, es decir: $c = 60 - 20 = 40$.

SOLUCIÓN: Con esto, el modelo compartimentado es:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} - 0,16P(t) = 40 \\ P(0) = 2500 \end{cases}$$

La solución es de la forma: $\frac{dP(t)}{dt} = 0,16P(t) + 40$

O bien: $\frac{dP}{0,16P+40} = dt$

Integrando queda: $\ln(0,16P + 40) = t$

De aquí: $P(t) = \frac{e^t - 40}{0,16} + C$

Como tenemos un valor inicial:

$$P(0) = \frac{e^0 - 40}{0,16} + C = 2500$$

Así: $C = 2743,75 \cong 2744$. Finalmente nuestro modelo está dado por la función:

$$P(t) = \frac{e^t - 40}{0,16} + 2743,75$$

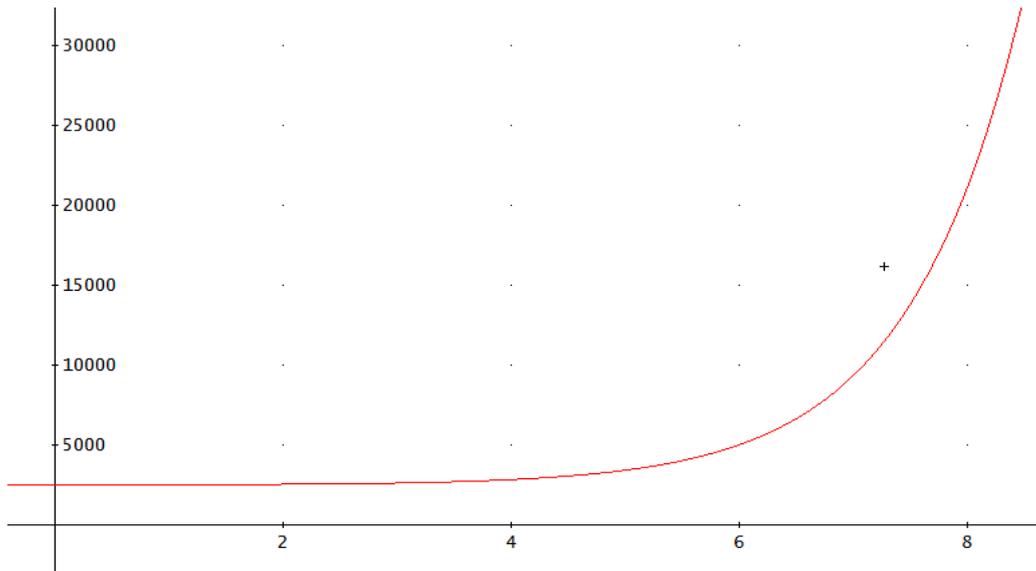


Figura 3.6: Simulación de la aplicación XIII



Aplicación XIV: Modelo Unicompartimentado No Cerrado del Análisis Físico-Acústico del Comportamiento de un Aerófono

El término *Acústica*, tiene su concepción terminológica griega *Akousticós* y a su vez de *Akuein*, que significa *oír*. Ella se deriva de la Física, específicamente de la mecánica clásica, y tiene por esencia el estudio de todos los fenómenos sonoros (*sonido*); entendiéndose como una oscilación mecánica de ondas que se propagan a través de un medio material (sólido, líquido y/o gas), en condiciones normales de presión y temperatura; a excepción del vacío.

Existe una gran variedad de sonido, pero el oído humano es capaz de discernir unos sonidos de otros, debido a su alta sensibilidad a las diferencias que pueden coexistir entre los mismos; por ello la percepción subjetiva del mismo, viene caracterizada por tres cualidades:

- *La intensidad: Es la diferencia entre el valor máximo de la potencia que es capaz de generar y el valor mínimo que produce. La intensidad de un sonido depende de la amplitud de la oscilación de la onda y está relacionada con la energía transportada por la misma.*
- *El tono o altura: permite diferenciar los sonidos de baja frecuencia y los de alta frecuencia. Es la diferencia entre el valor límite superior de la frecuencia fundamental y el valor límite inferior capaz de producir el instrumento. La*

frecuencia fundamental es la que define al tono, y la nota musical.

- *Timbre:* el timbre de un instrumento depende de la forma de la onda; este nos permite diferenciar dos sonidos, en los que la intensidad y la frecuencia son iguales, que han sido emitidos por focos sonoros diferentes.

Generalmente, los sonidos no son puros, cuando las ondas no son del tipo senoidal, sino que es la consecuencia de varios movimientos periódicos superpuestos a la onda fundamental, que se denominan *armónicos* o *sobretonos*. Los sonidos monotonales (un solo tono) están compuestos, por un sonido principal que determina el tono (*frecuencia fundamental*) y por otros secundarios, con frecuencia igual a un múltiplo entero de la fundamental (*armónico*). La contribución relativa de cada armónico determina la calidad tonal del sonido, siendo este *el espectro acústico instantáneo del instrumento sonoro*.

El sonido, se representa mediante una onda senoidal o cosenoidal a través de las magnitudes físicas: frecuencia, período, velocidad de propagación, longitud de onda, amplitud, intensidad sonora, potencia sonora, presión sonora y oscilación periódica.

Un instrumento musical es una combinación de uno o más sistemas resonantes y un principio de organización, capaces de concebir uno o más tonos. Los instrumentos musicales presentan como características acústicas, los intervalos de octavas que puede ejecutar el tipo de escala seleccionada para su diseño y construcción, y la clave de afinación elegida en su ejecución.

El instrumento musical aerófono “*la quena*”, consta de un cuerpo tubular recto y abierto en ambos extremos. En uno de sus extremos, presenta una embocadura, con un corte recto y una muesca que provee el filo que corta la insuflación de aire, generado por el ejecutante para producir el sonido. Este instrumento, presenta una parte frontal y posterior, respecto a la embocadura; a lo largo del cuerpo se distribuyen siete (7) orificios (agujeros tonales) para su digitación, seis (6) en la parte frontal disperso equidistantes que permite obtener la escala musical natural, y un (1) orificio superior en la parte posterior que sirve para armonización, figura 3.7a.

Los tubos sonoros, contienen una columna de aire capaz de originar sonido al ser excitada. Las columnas de aire contenidas en los tubos sonoros se comportan como cuerdas vibrantes, por lo tanto, las columnas de aire poseen nodos, puntos donde la

vibración es nula; y vientres donde la vibración alcanza su máxima amplitud. Las vibraciones generadas en el tubo, son de tipo longitudinales pudiendo ser en toda su longitud o divididas en segmentos. Al obstruir todos los agujeros, la quena se comporta como un tubo sonoro abierto en sus extremos donde la presión total del aire generada es igual a la presión sonora. Al tapar y destapar parcialmente los agujeros, mediante una combinación, generan una frecuencia de resonancia distinta debido a la variación en la longitud efectiva de vibración generada por el flujo de aire que circula a lo largo del cuerpo de la quena, creando de este modo una variación en la frecuencia de resonancia que dan origen a las notas musicales del instrumento. La velocidad del flujo de aire que circula por el tubo, depende de la intensidad con la cual insufla el intérprete. Si la ejecución es de poca intensidad, el aire introducido vibra lento y con menos recorrido. Al aumentar la intensidad, se produce un sonido de mayor percepción. Si el aire es muy intenso, se produce un sonido tosco (sucio), lo que se conoce como *growl*, figura 3.7b.

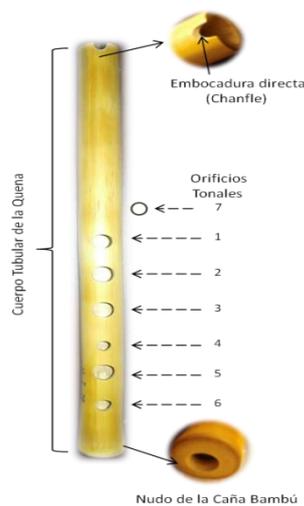


Figura 3.7 a) Partes del instrumento musical

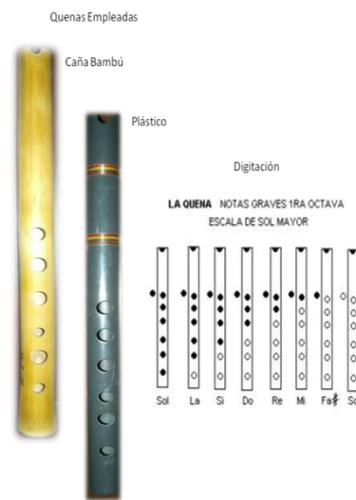


Figura 3.7 b) Digitación de la quena

Propuesta experimental: se utilizó dos quenas de diferentes materiales, uno de caña de bambú y otra de plástico, luego se confrontó los resultados experimentales aplicando la función de transferencia como es la serie de Fourier. La diferencia del timbre entre los dos instrumentos musicales, es que en la misma se producen vibraciones con la misma frecuencia fundamental, donde cada uno de ellos genera armónicos, cuyas intensidades relativas dependen del instrumento y de la forma en que se ejecuta.

El registro de las notas musicales, se realizó por medio de los Softwares *Audacity* de código libre, el cual permite visualizar el tipo de onda generada, además el análisis de frecuencia de las notas ejecutadas, la afinación se realizó por medio del *Ap Tuner 3* y *Room EQ Wizard* empleado como sonómetro digital. La nota musical elegida para la experiencia fue la Nota G4 (Sol), realizada con las quenenas, de frecuencias:

- ✓ *Frecuencia Temperada de la nota:* 392 Hz.
- ✓ *Frecuencia Temperada alcanzada:* 383 Hz. (Quena de Caña), figura 3.8a.
- ✓ *Frecuencia Temperada alcanzada:* 383 Hz. (Quena de Plástico), figura 3.8b.

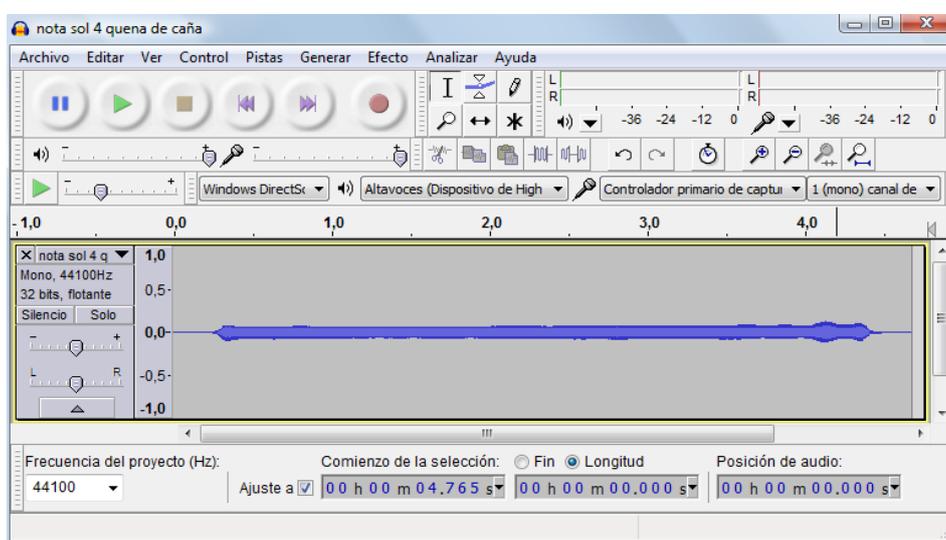


Figura 3.8 a) Registro de nota musical (Quena de Caña)²

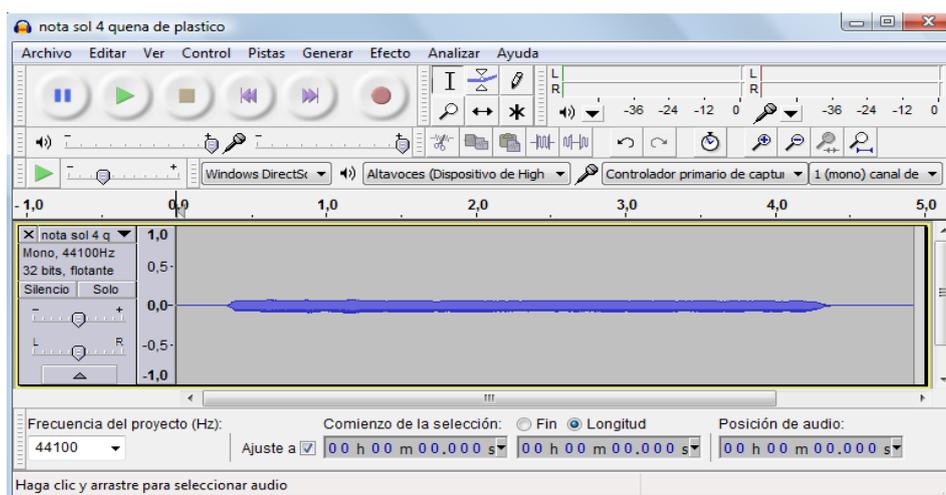


Figura 3.8 b) Registro de nota musical (Quena de Plástico)²

² Trabajo experimental realizado por la Prof. Quiroga María Luz V. de la carrera Profesorado en Física (FACEN-UNCA).

Lo que nos permite distinguir una nota de la misma frecuencia e intensidad producida por instrumentos diferentes es la forma de su onda. Cuando a un sonido se le aplica el análisis de Fourier, se obtiene una serie de componentes llamados armónicos, estos son múltiplos entre sí, el primero es la propia frecuencia fundamental, el segundo el doble ($2f$), el tercer armónico el triple ($3f$), etc. La razón de que estos armónicos sean múltiplos, se debe a que al insuflar el instrumento produce una onda transversal viajera con cierta *amplitud*, y se propaga produciendo reflexión del sonido.

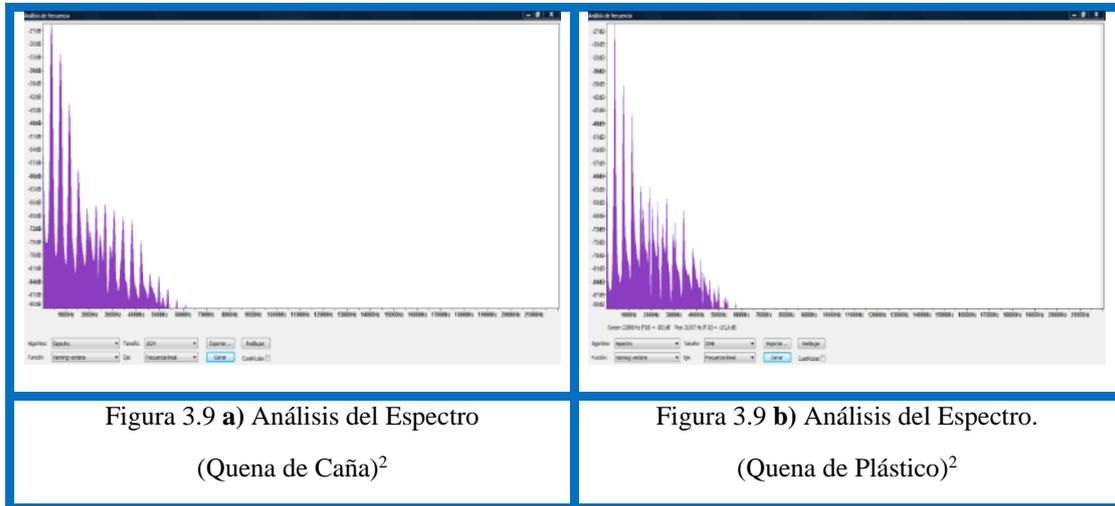
De tal manera, que la expresión matemática puede representarse teniendo en cuenta los coeficientes f_n que han de elegirse adecuadamente para que satisfaga la serie de Fourier en un período de tiempo:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}(nx) \cos(nt) \quad (3.8)$$

La forma de onda de la Nota G4 (Sol), viene determinada por los armónicos, que son una serie de vibraciones subsidiarias que acompañan a una vibración fundamental del movimiento ondulatorio, dicho análisis recibe el nombre de *análisis espectral o de Fourier*. De acuerdo con la ec. (3.8) tenemos que la frecuencia más baja y de pico más predominante es la frecuencia fundamental o primer armónico. Las frecuencias restantes, de frecuencias superiores a la fundamental y de picos descendente son las frecuencias parciales o armónicas; a medida que las frecuencias son más altas, los segmentos en vibración son más cortos y los tonos musicales están más próximos los unos de los otros. En consecuencia, los armónicos se explican por el orden de sus consonancias, mediante una relación de múltiplos enteros, con la frecuencia del fundamental $f_n = n \cdot f_1$ En este caso, la frecuencia del segundo armónico es el doble del primer armónico, el tercero el triple del primero, y así sucesivamente; de modo que la relación es: $n_1 \rightarrow f_1$ Primer armónico o frecuencia fundamental; $n_2 \rightarrow f_2$ Segundo armónico o primer sobretono; $n_3 \rightarrow f_3$ Tercer armónico o segundo sobretono, figura 3.9a y 3.9b.

En las figuras 3.9a y 3.9b., se muestran los espectros en cuyo eje horizontal se representa los valores de frecuencia y el eje vertical la amplitud, siendo la gráfica una sucesión de barras que constituyen los armónicos de los sonidos producidos por ambos instrumentos; en él se observa que no hay una única frecuencia, sino una superposición de infinitas frecuencias. La cantidad de sobretonos que hay en la ejecución de la nota; de

manera descendente de los picos son: 1° Pico: Frecuencia Fundamental Sol₄, 2° Pico: Primer Armónico, 3° Pico: Quinta Justa, 4° Pico: Segundo Armónico, 5° Pico: Tercera Mayor y 6° Pico: Quinta Justa (del segundo armónico).



Realizando el ajuste de curva, cuyo coeficiente de correlación manifiesta igual valor para ambos instrumentos, donde la cantidad de sobretonos que hay en la ejecución de la nota Sol₄ para la primera octava, muestra la complejidad de este instrumento musical donde se necesita una mayor insuflación en la boquilla de la quena, ya que el instrumento tiene tapado todos los agujeros tonales, lo cual exige una variación de presión del aire, figura 3.10a y 3.10b. De éste análisis se distinguió una similitud entre el espectro de ambos aerófonos, esto es debido a que la quena presenta una característica sonora distinta, haciéndola un instrumento único; así la quena de caña otorga un timbre suave y hondo, mientras que la quena de plástico presenta un timbre brillante y estridente.

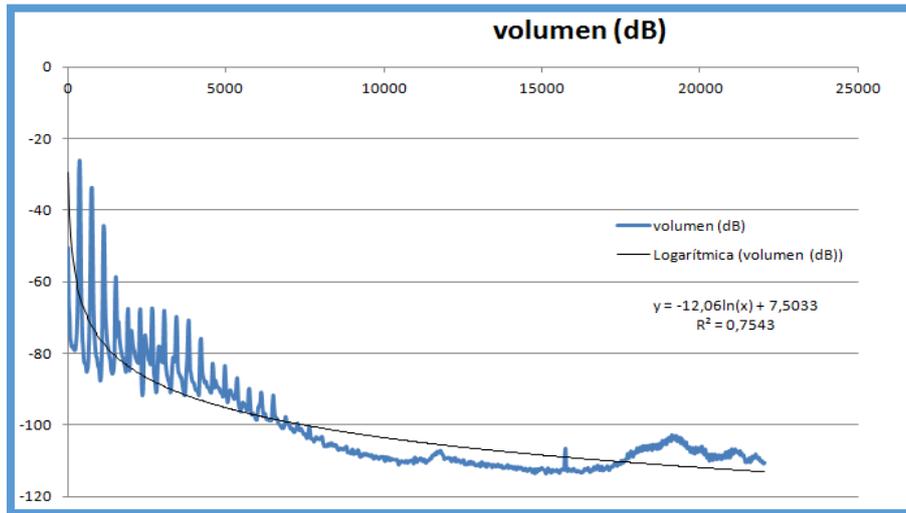


Figura 3.10 a): Ajuste de Curva. (Quena de Caña)²

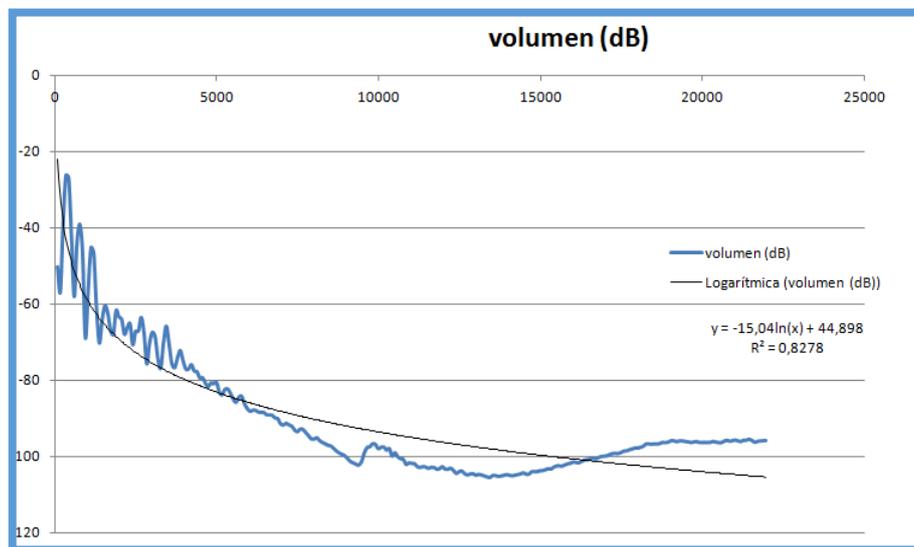


Figura 3.10 b): Ajuste de Curva. (Quena de Plástico)²

Aplicación XV: Modelo Unicompartimentado de la Dinámica Poblacional

PROBLEMA: Si bien los datos de un censo o investigación nos llevan a pensar que la representación y estudio de la dinámica población debe ser discreta, la gran cantidad de información lleva al planteo continuo. Además casi toda las investigaciones han generado una amplia cantidad de referencias dentro de la matemática en forma continua y por ello la herramienta está dada en forma infinitesimal, llevando a que las ecuaciones diferenciales sean la expresión natural de los modelos dinámicos poblacionales. Nosotros

podemos partir del planteo discreto dado en el capítulo anterior, pero sin dejar de lado el estudio generalizado por la literatura del tema.

En algunos casos nos interesa modelar un problema donde la única especie alcanza un valor que permanece estable a partir de un cierto momento en adelante. Tal modelo en Ecología se conoce como *modelo logístico*. Para nuestro caso hablaremos de un crecimiento inhibido cuadrático o logístico continuo. En efecto, el comportamiento variacional dado por una ecuación diferencial de primer orden lineal con coeficientes constantes es, o bien constante, o de crecimiento indefinido o un decrecimiento a cero, tal lo visto en el problema anterior. La limitación de ese modelo llamado malthusiano o de Malthus, fue completado por Verhulst en 1837, proponiendo una tasa de variación relativa proporcional al tamaño de población y a la diferencia de esta a un tamaño de equilibrio dado previamente, definiendo así al crecimiento logístico discreto por el PVIC.

En general el número de individuos de una población, está determinado no sólo por el potencial reproductor, sino por otros factores: mortalidad, natalidad, migración, inmigración, recursos, etc. Así un ambiente dado puede soportar sólo a un número limitado de individuos de una población bajo ciertas circunstancias. El tamaño de la población oscila alrededor de este número, que se conoce como la *capacidad de carga del ambiente*. Es el número promedio de individuos de la población que el ambiente puede soportar bajo un conjunto particular de condiciones. Para las especies animales, la capacidad de carga puede estar determinada por el suministro de alimento o por el acceso a sitios de refugio. Para las plantas, el factor determinante puede ser el acceso a la luz solar o la disponibilidad de agua. Estos factores limitantes pueden variar estacionalmente. Los patrones de crecimiento de la población observados en la naturaleza son muchos y complejos. Uno de los patrones más simples, que ilustra claramente el efecto de la capacidad de carga, es descrito aproximadamente en el siguiente modelo. Si consideramos a la tasa de variación r del modelo exponencial, en términos ahora de la diferencia entre un tamaño estable esperado de la población y del número actual de la población, será $r = a(K - N(t))$, quedando la siguiente expresión:

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(K - N(t)) N(t)$$

Donde a es una constante positiva, $N(t)$ el número de individuos de la población en el tiempo t , y K es la capacidad de carga, o sea el tamaño estable esperado.

Obsérvese que ésta ecuación diferencial de primer orden no es lineal, en efecto, al reescribirla toma la forma siguiente:

$$\frac{dN(t)}{dt} = aK N(t) - aN^2(t)$$

Por otro lado, de la forma primeramente mencionada se puede hacer el análisis siguiente: Cuando $N(t)$ es muy pequeño, la diferencia $(K - N(t))$ tiende a (K) y así el crecimiento tiende al modelo exponencial con tasa (Ka) , y la curva se aproxima a la curva del crecimiento exponencial del modelo de Malthus. A medida que $N(t)$ se incrementa, $(K - N(t))$ disminuye, así el crecimiento se hace más lento, hasta anularse cuando ambos toman el mismo valor: $K = N(t)$. Esta desaceleración del crecimiento poblacional representa una declinación en la tasa de incremento de la población, debida tal vez a la competencia entre los individuos de la población por algún curso limitado.

Si el número de organismos excede la capacidad de carga, la tasa de incremento de la población se hace negativa y la población disminuye. Finalmente la población se estabiliza y oscila alrededor del tamaño máximo que el ambiente puede soportar. Este modelo de crecimiento presentado por Verhulst en 1837, se conoce como *logístico*.

SOLUCIÓN: Así el P.V.I. continuo correspondiente al modelo se escribe como:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = aKN(t) - aN(t)^2 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Siendo la solución la función:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-Ka(t-t_0)}}$$

En efecto, la primera derivada se anula en: $N = K$, máximo valor para la población, la cual ocurre en un tiempo t lo suficientemente grande como para probarse que el *comportamiento es estable*.

Por otro lado la segunda derivada se anula en los puntos K y $\frac{K}{2}$. El primero de ellos no nos permite concluir nada por criterio de segunda derivada, mientras que el segundo punto nos indica un cambio de concavidad, o sea, de la intensidad del crecimiento de la población. En efecto, si partimos de una población inicial menor que el valor estable K , al atravesar la mitad de ese tamaño, se desacelera la intensidad de cambio, mientras que si la población inicial es mayor que la mitad del valor K , la población crece desaceleradamente. Por otro lado, si la población inicial es mayor que la población límite K la población decrece al valor límite en forma asintótica. En biología la forma de esta gráfica con apariencia a una S lleva mnemotécnicamente al otro nombre conocido como *Sigmoidea*, así como la gráfica exponencial tiene la forma de J, con la que se asocia en Biología.

PROBLEMA: Consideremos una población inicial de cuatro ejemplares que crece a ritmo acelerado en un principio para luego reducir su intensidad de crecimiento hasta alcanzar el valor estable de 80 individuos. Plantearemos el modelo logístico discreto, en donde la constante a de la tasa de crecimiento sea 0,01, es decir:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = 0.01 \times 80N(t) - 0,01N(t) \\ N(0) = 4 \end{cases}$$

$$N(t) = \frac{80 \times 4}{4 + (80 - 4)e^{-80 \times 0,01t}} = \frac{320}{4 + 76e^{-0,8t}}$$

Gráficamente esta función es:

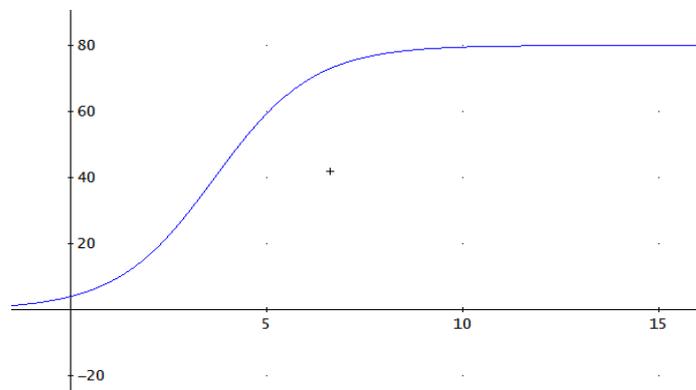


Figura 3.11: Función logística solución del problema de la actividad XV

3.3. Modelos Bicompartimentados

En forma análoga a lo presentado en el capítulo 2, los modelos con dos compartimentos se denominan bicompartimentados, pudiendo existir la posibilidad de ser no cerrado o cerrado. Por ello utilizamos el mismo esquema grafico de tal modelo, dado aquí como figura 3.10.

3.3.1. Modelo Bicompartimentado No Cerrado

Para los casos de modelos con dos compartimentos, consideramos primero el caso lineal con dos especies X e Y , en donde las tasas de contribución de cada especie son constantes. Cuando las dos especies se hallan presentes en un mismo sistema, ellos interactúan de manera que los cambios pueden ser mínimos en estos términos, en algunos casos puede decirse que resultan despreciables. En tal caso se dice que las especies son independientes. Esto se consideró en el caso del enfriamiento del café, en donde el ambiente por ser de un volumen mucho mayor al de la taza, se considera que la temperatura del ambiente permanece constante.

Aplicación XVI: Modelo Bicompartimentado de la Dinámica Poblacional

En otros casos, la interacción entre las dos especies puede ser determinada mediante un cierto coeficiente, para ello podemos interpretar tres tipos de interacción para el caso de especies animales y vegetales, que conforman un sistema ecológico. Estos son:

1. **Depredación:** Si la especie N_1 es depredadora de la otra especie N_2 entonces la especie N_2 alimenta a la especie N_1 . La depredación es absoluta cuando tiene por única fuente de alimento a N_2 . Por el contrario, cuando N_2 es sólo una de las tantas fuentes de alimento de N_1 , entonces la depredación es relativa.
2. **Competencia:** las especies N_1 y N_2 compiten cuando ambas deben recurrir al mismo recurso natural. Así, N_1 y N_2 pueden competir por alimentos, espacio físico habitable, etc.

3. Simbiosis: cuando la población de la especie N_1 depende de algún modo de la especie N_2 , y a su vez N_1 estimula el crecimiento de la especie N_2 , entonces N_1 y N_2 viven en simbiosis.

Permitimos que el crecimiento de una especie dependa de las poblaciones de ambas especies. En síntesis, sugerimos algunos modelos específicos.

Primero, vamos a discutir las clases de interacción que pueden ocurrir entre dos especies, ¿qué tipo de efectos puede N_1 tener en N_2 , y viceversa? No estamos tan interesados en qué efectos tiene N_1 en sí mismo pues esto es lo que ocurre para una sola especie. En general, los efectos de la especie N_1 para el aumento o disminución de la población de la otra especie. Asimismo la especie N_2 puede afectar a la especie N_1 en dos direcciones distintas. Así tenemos cuatro posibles tipos de interacción entre dos especies, representado por cuatro conjuntos de símbolos: + -; + +; - -; - +. Sin embargo por simetría, una de estas interacciones es equivalente a otra, es decir, (+ -) es equivalente a (- +), dando tres tipos distintos de interacciones. Así expresamos lo que ocurre en las clasificaciones antes mencionadas:

- Si ambas poblaciones aumentaran (+ +) entonces la interacción biológica es de *mutualismo* o *simbiosis*.
- Si ambas poblaciones afectan negativamente cada una sobre la otra (- -), entonces decimos que son dos especies en competencias, el simple ejemplo de tal tipo de interacción es cuando dos especies compiten por la misma fuente de alimento.

La interacción entre tiburones y los pequeños peces que ellos los comen, es un ejemplo de este tercer tipo de interacción (+ -) llamada *presa-depredador*. La existencia de una especie, la presa realza la otra, mientras que el depredador podría amenazar la propia existencia de la presa. Otros ejemplos de interacción del tipo presa-depredador incluyen al sistema herbívoro-planta y al par huésped-parásito.

En tal caso, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales asociado al *modelo bicompartimental* (figura 3.12), se indica en la expresión siguiente:

$$\begin{cases} X'(t) = aX(t) + bY(t) + m \\ Y'(t) = cX(t) + dY(t) + n \end{cases}$$

Si ambos coeficientes m y n son nulos el sistema se dice *homogéneo*, en otro caso no homogéneo. Gráficamente podemos expresar este modelo por:

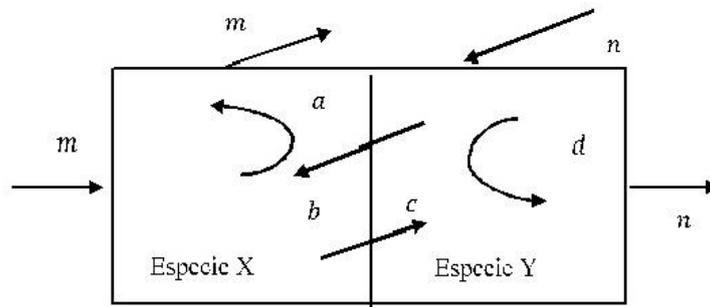


Figura 3.12: Modelo Bicompartimentados

Consideremos dos especies de las cuales la primera actúa como presa, ante la ausencia de la segunda, que actúa como depredador, crece en forma natural a una tasa de 4%, es decir que la variación es 0,04 que colocaremos como coeficiente en el sistema, pero que ante la presencia del depredador disminuye, si por cada 25 depredadores desaparecen dos presas, esto da un 8% de disminución siendo $-0,08$ el coeficiente del sistema. Por otro lado, ante la falta de las presas el depredador disminuye en un 62%, así la variación es $-0,62$. Además la presencia de la presa, aumenta la supervivencia del depredador en un 25%, como consecuencia que nace un depredador por cada cuatro presas. Para regular la población se retiran cuatro ejemplares del depredador anualmente, mientras que de las presas se trata de mantener lo existente. Inicialmente se tiene 100 ejemplares de la primera especie y 5 de la depredadora. Este modelo se expresa como:

$$\begin{cases} X'(t) = 0,04X(t) - 0,08Y(t) + 0 \\ Y'(t) = 0,25X(t) - 0,62Y(t) - 4 \end{cases}$$



Aplicación XVII: Modelos de la Ley de Enfriamiento de Newton

Aquí presentamos la aplicación analizada desde la Física, como es el modelo de la ***Ley de Enfriamiento de Newton***. Esto es, si colocamos un objeto que tiene una temperatura T que varía a lo largo del tiempo t , en un ambiente que posee una temperatura supuesta constante expresada por T_a , la temperatura del objeto cambia en términos de su

temperatura y la diferencia con la temperatura ambiental en forma proporcional a la tasa de transferencia, dada por la conductividad de aire del ambiente, el recipiente que contiene al objeto y del objeto mismo. Se expresa a tal tasa con k , y en tal caso la *ley de enfriamiento* se expresa como:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_a)$$

Esta ley puede aplicarse a problemas variados, como el del enfriamiento de una taza de café, de un cuerpo humano en la Física Forense, etc.

- **Propuesta Experimental: Enfriamiento de una taza de café con leche**

Este tradicional problema de Física, abordado en el libro *An introduction to computer simulation methods*, fue desarrollado y aplicado en el Instituto de Física de la Universidad Católica de Valparaíso, según nos comenta Ricardo Buzzo Garrao en su obra *Tópicos de Física Contemporánea con ayuda del Microcomputador*. Además se halla contenido además como ejemplo en el software de simulación Stella, lo consideramos oportuno para ser presentado aquí a continuación:

El problema original es el siguiente, nos sirven una taza de café y al primer sorbo nos damos cuenta que está demasiado caliente. Podemos tomar dos opciones: esperar que se enfríe para luego echarle leche a una temperatura dada, o bien recurrir a agregar la leche a dicha temperatura para que proceda al enfriado. Si deseamos que el café se enfríe lo más rápido posible, ¿cuál de las dos posibles opciones tomaremos?

Reduciremos el problema al enfriado del café sólo, y en el análisis de este nuevo problema planteamos una simulación mediante un método numérico simple para el planteo de la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden, pero solo lo haremos mediante expresiones de recurrencia y gráficas. La naturaleza del flujo de calor desde el café hacia el aire que lo rodea es complicada y en general envuelve los mecanismos de convección, radiación, evaporación y conducción. Sin embargo, si la diferencia de temperatura entre un objeto y su alrededor no es muy grande, la rapidez de cambio de la temperatura del objeto es proporcional a esta diferencia de temperatura. Podemos formular esta aseveración en términos de una EDO:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (3.9)$$

Para complementar esta propuesta se considera el siguiente experimento, que servirá para estudiar el comportamiento del enfriamiento de la taza de café colocada en el interior de una caja cerrada donde se produce transferencia de calor en el interior de la caja variando su temperatura interior. Se considera la temperatura ambiente inicial desde el momento en que se coloca la taza de café y a partir de los 15min se agrega leche haciendo variar la energía interna en la misma, donde el valor de transferencia de calor depende de la nueva composición interna de la caja, pues varía la densidad conjunta interna. A partir de ese momento, comienza el enfriamiento hasta alcanzar la temperatura donde el sistema se estabiliza. Se destaca la comparación de la temperatura del ambiente que se registra a 21,7°C, y las temperaturas del aire contenido en el interior de la caja durante el experimento.

Antes de iniciar el experimento se cierra la caja y se la sella con cinta para evitar pérdidas de calor. La taza de café colocada en el interior del sistema genera por efecto Joule una transferencia de calor por convección forzada. Se registra la toma de datos por intervalos de tiempo preestablecido hasta lograr el estado estacionario, según la información dada por la termocupla oportunamente colocada. Luego se agrega leche a la taza de café a fin de conjeturar la relación entre las variables t y T para escribir la ecuación que mejor describe la situación experimental, figura 3.13.



Figura 3.13: Caja rectangular de poliuretano expandido conteniendo la taza de café y termocupla³.

³ Trabajo experimental realizado por el Prof. Schlittler Ernesto y la alumna Coria Hanne D. de la carrera Profesorado en Física (FACEN-UNCA).

Para obtener el modelo matemático que describiera el enfriamiento del café en el tiempo, se supuso que la razón de enfriamiento es directamente proporcional a la temperatura inicial del cuerpo menos la temperatura del medio ambiente, tal lo expresa la ec. (3.9). Si resolvemos dicha ecuación diferencial, obtenemos:

$$\int \frac{dT}{(T - T_a)} = -K \int dt$$

$$\ln(T - T_a) + \ln C_1 = -Kt$$

Donde en C_1 están incluidos las dos constantes de integración: $(T - T_a) = \frac{1}{C_1} e^{-Kt}$

Haciendo $C_2 = \frac{1}{C_1}$ entonces: $(T - T_a) = C_2 e^{-Kt}$

Despejando $T(t)$ obtenemos:

$$T(t) = C_2 e^{-Kt} + T_a \quad (3.10)$$

Esta función representa el modelo matemático más general del enfriamiento del cuerpo, bajo nuestras condiciones experimentales. De la solución se ve que existen un número infinito de posibilidades. Para que este modelo matemático describa el fenómeno en estudio, se requiere obtener una solución particular; para hacerlo es necesario utilizar las condiciones iniciales del experimento.

En nuestro experimento observamos que cuando el tiempo transcurre desde que iniciamos las mediciones este es muy grande, la temperatura del café tiende a igualarse con la del medio. Por tanto, cuando iniciamos el experimento la temperatura era la inicial; expresando estas condiciones matemáticamente: $T(\infty) = T_a = 22,3^\circ\text{C}$ y $T(0) = T_0 = 80^\circ\text{C}$.

Introduciendo las condiciones iniciales a nuestra solución general (3.10), obtendremos la solución específica:

$$T(t) = C_2 e^{-Kt} + T_a$$

$$T(0) = C_2 e^{-K \cdot 0} + 22,3^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C}$$

$$\text{Despejando } C_2, \text{ se obtiene: } C_2 + 22,3^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C} \Rightarrow C_2 = 57,7 \quad (3.11)$$

Introduciendo la segunda condición:

$$T(\infty) = C_2 e^{-Kt} + T_a = 22,3^\circ\text{C} \Rightarrow T_a = 22,3^\circ\text{C} \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.11) y (3.12) en (3.10), obteniéndose:

$$T(t) = 57,7 e^{-Kt} + 22,3 \quad (3.13)$$

A continuación se determina el valor de la constante K , a partir de los datos experimentales obteniéndose:

$$K = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{67,3}{T(t) - 21,7^\circ\text{C}} \right] = 0,0124 \text{min}^{-1}$$

Así nuestro modelo matemático particular queda:

$$T(t) = 67,3 e^{-0,0124t} + 21,7^\circ\text{C}$$

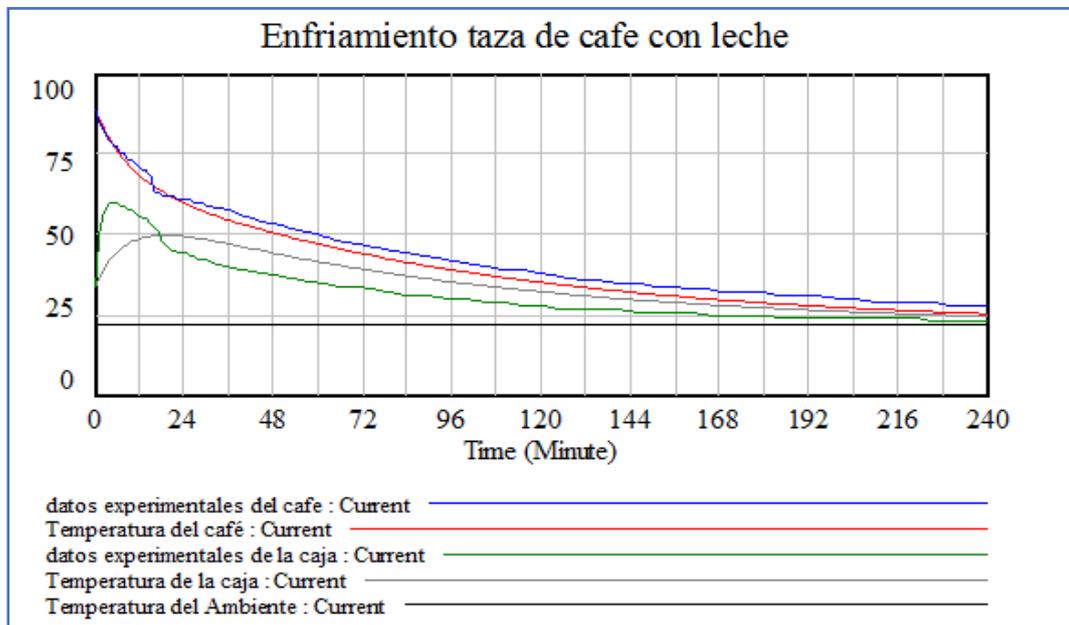


Figura 3.14: Simulación del proceso de enfriamiento de la taza de café con leche
(Realizado con el software VensimPle)

Esta función verificada la solución que describe el fenómeno físico en cuestión. Ahora procedemos a realizar una comparación entre el experimento y el modelo teórico para comparar su analogía. En la figura 3.14, muestra la simulación realizada con el

software VensimPle del enfriamiento de la taza de café con leche medida en el tiempo, cuya transferencia de calor se realiza tomando en cuenta las temperaturas del interior de la caja como la temperatura ambiente, que comienza a medirse desde el momento en que se coloca la taza de café y a partir de los 15 min que se agrega leche, donde se inicia el enfriamiento hasta alcanzar la temperatura que se estabiliza.

3.3.2. Modelo Bicompartimentado Cerrado

Con m y n nulos, el modelo es *cerrado*. En términos de población se dice que no existe movimiento migratorio: ni emigración ni inmigración.

Aplicación XVIII: Marcapaso Cardíaco

Para este tipo de *modelo bicompartimentado*, consideremos el ejemplo analizado desde la Física el *marcapaso cardíaco*. Actualmente las afecciones cardíacas y cardiovasculares constituyen una de las principales causas de muerte en el mundo, como son los problemas relacionados con la obstrucción de arterias coronarias principales o fallos en el sistema de conducción eléctrica del corazón que pueden implicar un bombeo inadecuado de sangre al resto del cuerpo.

En el siglo pasado, son muchos los avances que han adquirido las ciencias biológicas y, en particular la fisiología humana con la utilización de modelos matemáticos, para acercarnos a la comprensión fenomenología fisiológica, en especial, las EDO aplicando Transformada de Laplace, que permiten estudiar, analizar la dinámica y el comportamiento de las descargas eléctricas, en particular, la carga y descarga de un condensador, las Reglas de Kirchhoff y Ley de Coulomb, que son base para entender el fenómeno de la fibrilación, deducida desde este punto de vista como una cardiopatía originada por una producción desordenada de potenciales eléctricos en diferentes puntos del corazón. Obviamente la naturaleza e intensidad de la estimulación eléctrica necesaria, para normalizar una falencia o suplir al marcapaso natural depende de cada patología, por lo que su disponibilidad en tiempo y forma deberá permitirle el mismo circuito que la provee, dentro de ciertos márgenes predeterminados. Para demostrar esto, se ha considerado necesario ilustrar todos esos fenómenos juntos, de modo que a su vez se pueda realizar la variación de la frecuencia con que se produce la carga y la descarga del

condensador y por lo tanto, la del *marcapaso artificial*, en función de las necesidades del corazón.

El diseño del dispositivo experimental figura 3.15, permite variar la frecuencia e intensidad del proceso de carga y descarga y visualizar con el encendido de una lámpara el momento en que el músculo cardíaco recibiría el impulso eléctrico; su funcionamiento es analizado con el recurso del osciloscopio para observar las curvas de carga - descarga y calcular la frecuencia con que se realiza ese proceso. Dicho circuito electrónico consta de una fuente de alimentación $V_{CC} = 9(V)$, conexiones en paralelo de resistencias $R1 = 1(k\Omega)$, resistencia variable $RV1 = 20(k\Omega)$, una resistencia en serie $R2 = 470(\Omega)$, un capacitor electrolítico en paralelo $C1 = 100(\mu F)$, un diodo en paralelo $D1 = LED$ y un $C1 = 555$.

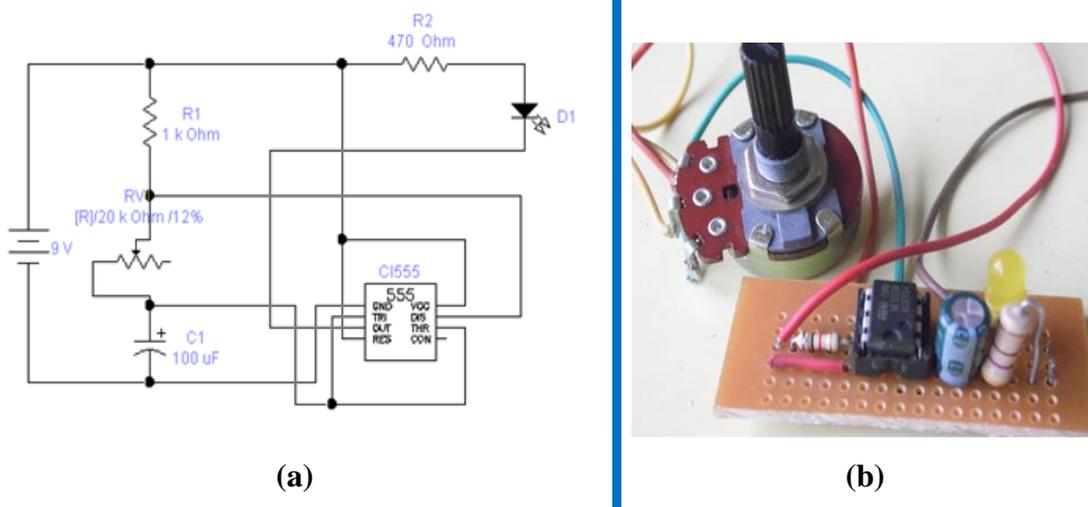


Figura 3.15: (a) Esquema del diseño del circuito electrónico, (b) Circuito experimental del marcapaso cardíaco⁴

Se presenta el problema con valor inicial (PVI) que describe el funcionamiento de un marcapaso cardíaco que consta de un condensador C , una batería de voltaje V y un interruptor que se mueve periódicamente con un período de carga $t_1 < t < t_2$ y un período de descarga $t_2 < t < t_1$ durante el cual el condensador envía un estímulo eléctrico al corazón, el cual actúa como un resistor de resistencia R , figura 3.15.

⁴ Trabajo experimental realizado por el Lic. César Rubén Nieva, de la carrera Licenciatura en Enseñanza de las Ciencias Experimentales-FACEN-UNCA.

Para resolver este PVIC, se utilizará a la Transformada de Laplace herramienta que permite transformar este problema, en un problema algebraico aplicando las distintas propiedades que presenta dicha transformada y, una vez resuelto se calcula a partir de la solución del problema algebraico la solución del problema de EDO.

Para ello, se considera que el circuito eléctrico definido contiene una diferencia de potencial unitaria que se desconecta a un tiempo determinado, esto se expresa a través de la llamada *función de Heaviside* o *función de escalón unitario* ($u_a(t)$) definida por:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases} \quad (3.14)$$

Físicamente, la *función de Heaviside* realiza la función de interruptor, de manera que si $f: [0, +\infty) \rightarrow X$ es una función continua, se tiene que $(u_a \cdot f)$ se define como la función:

$$(u_a \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t) & t \geq a \end{cases} \quad (3.15)$$

Lo que representa que la función u_a “enciende” a la función o señal f en el intervalo de tiempo $t = a$. Si tomamos ahora la función $(u_a \cdot f - u_b \cdot f)$, la función u_b tiene el efecto físico de “apagar” la función f , pues:

$$(u_a \cdot f - u_b \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ f(t) & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases} \quad (3.16)$$

Entonces, la función $u(t - a) - u(t - b)$ con $a < b$ sirve como un filtro que selecciona los interruptores para obtener la carga y/o descarga respectiva, donde la tensión $v(t)$ oscilará entre 0 y V .

$$v(t) = V[u(t - a) \cdot f - u(t - b) \cdot f] \quad (3.17)$$

Tomando la expresión diferencial que define la onda cuadrada unipolar, se tiene:

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{c} = Ri(t) + \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t) \quad (3.18)$$

Reemplazando (3.16) en (3.17) y aplicando las distintas propiedades de la Transformada de Laplace, se obtiene:

$$RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V}{s} [e^{-as} - e^{-bs}] \quad (3.19)$$

Resolviendo algebraicamente (3.18), se tiene:

$$I(s) \left[R + \frac{1}{sC} \right] = \frac{V}{s} (e^{-as} - e^{-bs})$$

$$I(s) = \frac{V/R}{s + 1/RC} (e^{-as} - e^{-bs})$$

$$I(s) = F(s) (e^{-as} - e^{-bs})$$

Aplicando la transformada inversa, se obtiene:

$$L^{-1}\{I(s)\} = \frac{V}{R} e^{-t/RC} [L^{-1}(e^{-as}F(s)) - L^{-1}(e^{-bs}F(s))]$$

Cuya solución es:
$$i(t) = \frac{V}{R} \left[e^{-(t-a)/RC} u(t-a) - e^{-(t-b)/RC} u(t-b) \right]$$

Con este resultado matemático se procede a la creación del Modelo Matemático Dinámico del proceso de carga y descarga de un capacitor, y su verificación se realiza mediante la simulación dinámica, que corrobore los resultados experimentales obtenidos. Para ello, se requiere una variable que mida la carga del capacitor en cada instante, llamo a tal variable: *nivel de carga del capacitor*.

El proceso de carga y descarga se define a través de las variables *carga del capacitor* y *descarga del capacitor*. Si bien cada una de ellas se define por medio de:

- Carga del capacitor: $Q_f (1 - e^{-t/RC})$ donde Q_f es la carga final del proceso, y es donde el nivel de carga toma su máximo valor, t es el tiempo que transcurre para el proceso de cargado, y RC es una medida de la velocidad de carga del capacitor y por ello se llama *constante de tiempo*.
- Cuando RC es pequeña, el capacitor se carga rápidamente; cuando es más grande, el proceso de carga toma más tiempo.
- En forma análoga se define la Descarga del capacitor como: $Q_f e^{-t/RC}$
- Por lo tanto, pretendemos definir al nivel de carga en términos de los dos procesos como:

$$rQ_f (1 - e^{-t/RC}) + (1 - r)Q_f e^{-t/RC}$$

Donde la carga se produce cuando r es 1 y la descarga cuando r es 0.

- Además, el proceso carga - descarga se da en forma alternada desde la carga nula hasta la máxima Q_f . Queremos que esto se de entre un valor mínimo que llamaremos Q_m , por lo que las definiciones anteriores se ven modificadas en ese valor:

$$r [(Q_f - Q_m) (1 - e^{-t/RC}) + Q_m] + (1 - r) [(Q_f - Q_m) e^{-t/RC} + Q_m]$$

- Por otro lado, debió reemplazarse esta constante r por una alternativa en la función nivel mediante la aplicación de la función IF THEN ELSE:
 - *Nivel de carga del capacitor*: IF THEN ELSE (Time<21, *carga del capacitor*, *descarga del capacitor*). Suponiendo que durante los primeros 20(s), carga y luego descarga.
- Además el proceso de carga - descarga continúa, por lo que fue necesario volver a cero el tiempo después de la descarga, y esto se logra con una variable auxiliar:
 - *Tiempo modular*: Time-40*INTEGER (Time/40). Donde 40 es el tiempo de carga - descarga.

- De esa manera la descarga luego de la carga se expresa con la variable *demora*:
Demora: IF THEN ELSE (*tiempo modular*<20, 0, *tiempo modular*-20).

Por tanto, el diagrama de Forrester de los flujos de carga y descarga sobre un nivel que acumula las cargas, tal se muestra en la figura 3.16.

Al realizar la corrida del programa se obtiene la carga y descarga del condensador figura 3.17., donde al alimentarse el circuito con una tensión continua de 9V estando el condensador descargado, el LED no conduce y el condensador empieza a cargarse a través de la resistencia de carga; al llegar éste a un cierto valor de tensión de carga, el LED empieza a conducir y el condensador se descarga a través de la resistencia de descarga; cuando la tensión del condensador ha descendido hasta un cierto valor crítico de tensión, el LED deja de conducir y se inicia un nuevo proceso de carga y de descarga. Por tanto, al cabo de un tiempo igual a RC , la corriente en el circuito ha disminuido a $\frac{1}{e}$ (0.368) de su valor inicial. En este momento la carga del capacitor ha alcanzado una fracción $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ (0,632) de su valor final.

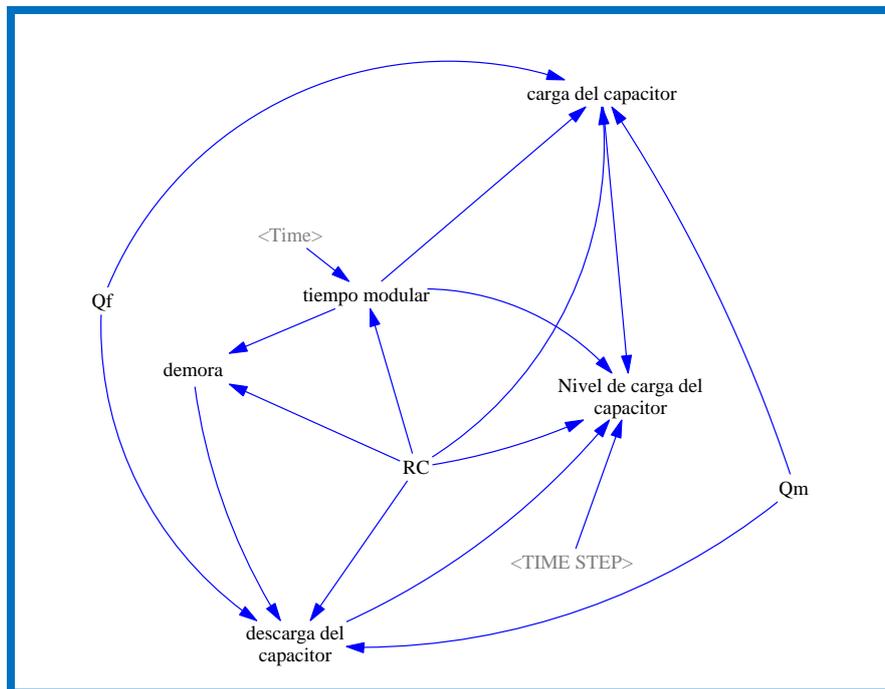


Figura 3.16: Diagrama de Forrester en Dinámica de Sistemas de la carga y descarga del condensador⁵
(Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)

⁵ Colaboración del Prof. Lic. Juárez Gustavo Adolfo –FACEN-UNCA.

Así, la *constante de tiempo* $\tau = RC$ es en consecuencia una medida de la velocidad de carga del capacitor, cuando RC es pequeña el capacitor se carga rápidamente y cuando es más grande, el proceso de carga toma más tiempo.

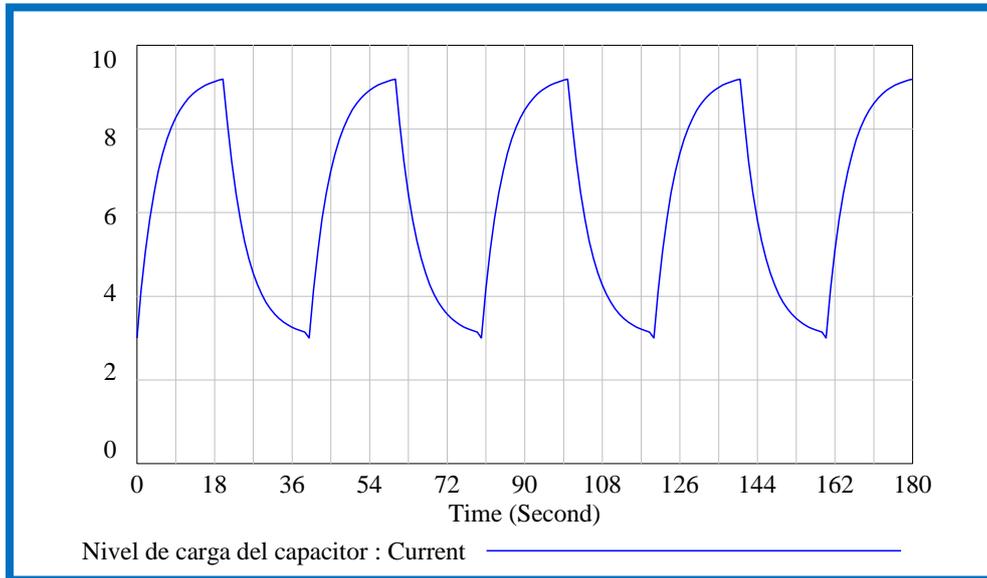


Figura 3.17: Simulación de la carga y descarga del condensador (Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)

Ajustando a los valores reales obtenidos experimentalmente, se toma 180(s) o sea 3 (min), donde se busca lograr los niveles de carga y descarga y el módulo de congruencia del tiempo dependiente de la constante de tiempo, figura 3.18.

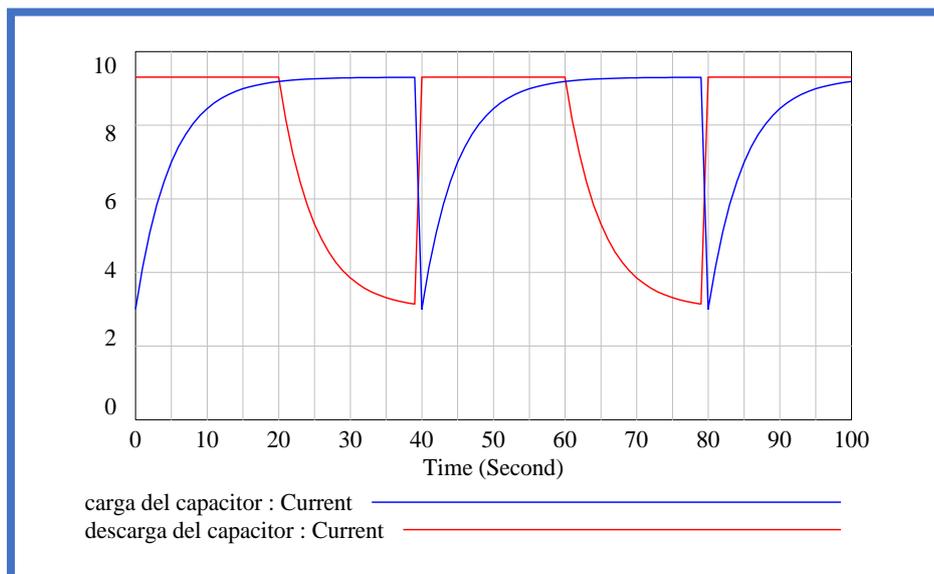


Figura 3.18: Carga y Descarga del condensador que simula el marcapaso cardíaco (Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)

Por tanto, se comprueba que el circuito electrónico construido genera una onda en forma de dientes de sierra, donde el tiempo crece conforme la carga y descarga del condensador varíe en un rango entre 3 y 9,3 pulsaciones, que se determina por el valor de la constante de tiempo del circuito.

De acuerdo, a las distintas afecciones cardiacas que hemos tenido en cuenta al registro de los datos experimentales obtenidos, en relación a los pulsos generados en un periodo de tiempo de 60(s), se procede a realizar las correspondientes simulaciones dinámicas usando el software Vensim PLE 5.11, cuyos resultados del modelo bicompartimentado se obtuvo lo siguiente:

- ♦ **Automatismo:** Para una pulsación de 79 latidos por minuto correspondiente al latido cardiaco normal se tiene con $\tau = RC = 0,095$, la generación de las ondas de carga y descarga al inicio del proceso de activación cardiaca, el cual se lo registra en término de 30(s), figura 3.19.

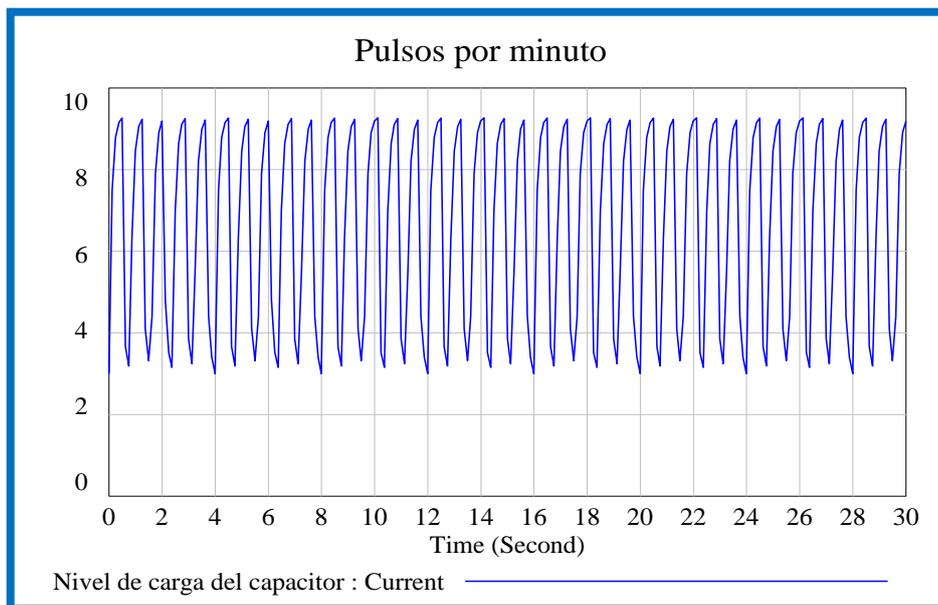


Figura 3.19: Simulación Dinámica de la pulsación normal que genera el Marcapaso Cardíaco durante 30(s). (Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)

- ♦ **Bradycardia sinusal:** Para una pulsación menor a 60 latidos por minuto se tienen con $\tau = RC = 0,123$, la generación de las ondas de carga y descarga al inicio del proceso de activación cardiaca, figura 3.20.

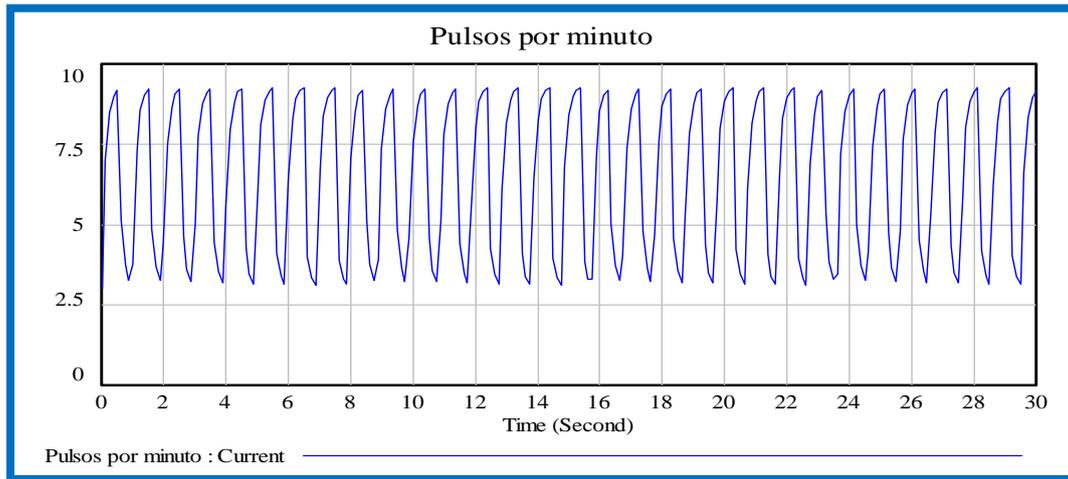


Figura 3.20: Simulación Dinámica de una bradicardia en el tiempo de 30(s)
(Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)

- ◆ **Taquicardia:** Para una pulsación de 115 latidos por minuto se tienen con $\tau = RC = 0,065$, la generación de las ondas de carga y descarga, figura 3.21.

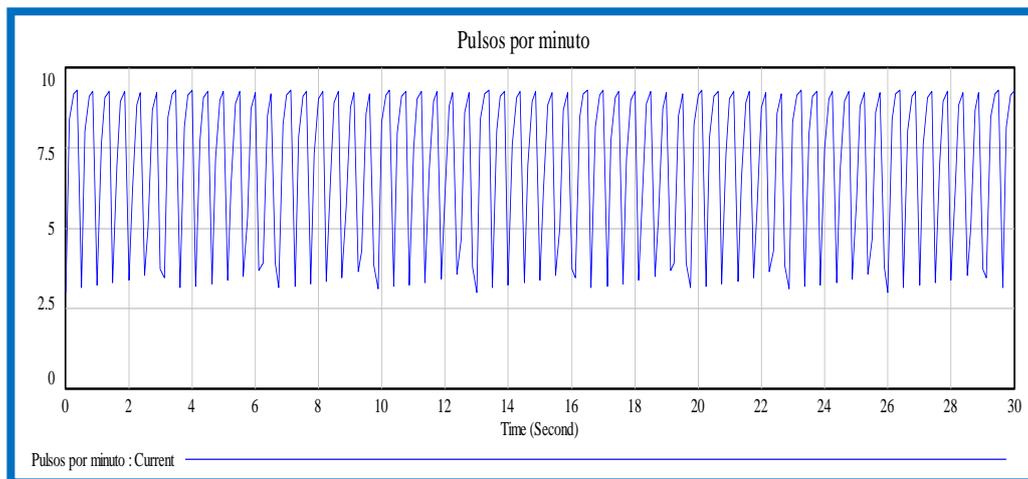


Figura 3.21: Simulación Dinámica de una taquicardia en el tiempo de 30(s).
(Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)

- ◆ **Arritmia:** Para una pulsación de 94 latidos por minuto se tienen con $\tau = RC = 0,08$, la generación de las ondas de carga y descarga, figura 3.22.

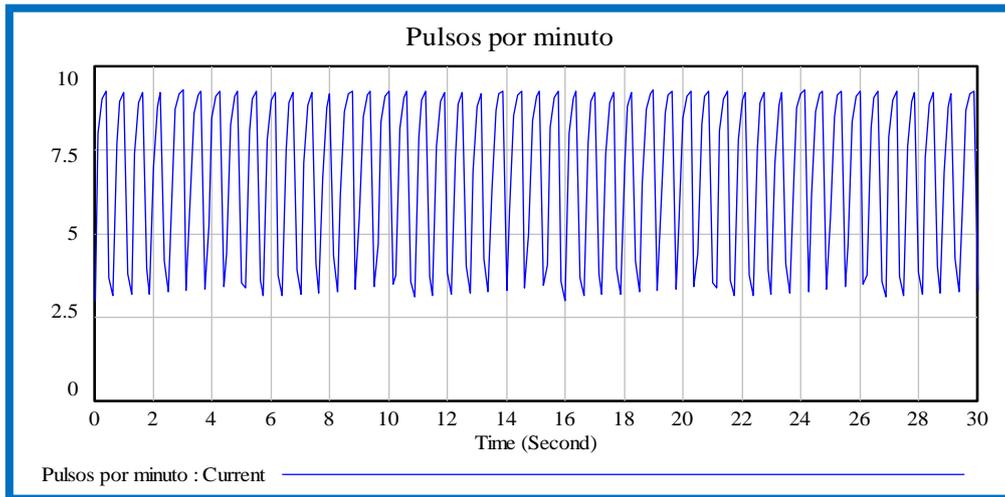


Figura 3.22: Simulación Dinámica de una arritmia cardíaca en el tiempo de 30(s).
(Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)

3.3.3. Modelo Bicompartimentado Cuadrático

Para los *Modelos Bicompartimentados*, existe la posibilidad de plantear términos no lineales, en particular consideramos aquí los cuadráticos. Esto se debe a que la variación que sufre una especie respecto de la cantidad que posee la otra es dependiente de ella también, esto es, que existe un factor de contacto entre ambas, que influye como factor de cambio cuantitativo.

Aplicación XIX: Modelo Bicompartimentado Presa Depredador

Por ello el *modelo bicompartimentado cuadrático* lo expresamos en forma general mediante:

$$\begin{cases} X'(t) = aX(t) + bX(t) + pX(t)Y(t) + m \\ Y'(t) = cX(t) + dY(t) + qX(t)Y(t) + n \end{cases}$$

En particular tomaremos un caso reducido del mismo, dado por:

$$\begin{cases} X'(t) = aX(t) + pX(t)Y(t) \\ Y'(t) = dY(t) + qX(t)Y(t) \end{cases}$$

Este modelo es conocido en ecología como *presa-depredador tipo Lotka-Volterra*, aunque los bicompartimentados lineales también lo son.

3.4. Modelos Tricompartimentados

Seguidamente, consideramos modelos con tres compartimentos, y al igual que antes podemos tomar casos cerrados o no, y además según los términos puede ser lineales o no.

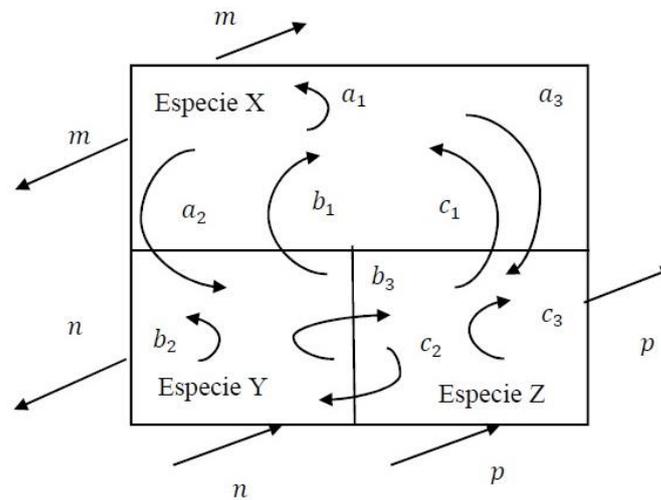


Figura 3.23: Modelo Tricompartimentado

Por un momento pensemos en los lineales con coeficientes constantes, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales queda:

$$\begin{cases} X'(t) = a_1X(t) + b_1Y(t) + c_1Z(t) + m \\ Y'(t) = a_2X(t) + b_2Y(t) + c_2Z(t) + n \\ Z'(t) = a_3X(t) + b_3Y(t) + c_3Z(t) + p \end{cases}$$

Aplicación XX: Movimiento Oscilatorio Vibratorio Masa-Resorte

En el estudio de sistemas oscilatorios es indispensable representar en forma aproximada el comportamiento de la dinámica del sistema para comprender sus características. En las aplicaciones de *sistemas oscilatorios*, se utilizan con frecuencia las funciones de transferencias, con el fin de caracterizar las relaciones entre las variables de entrada–salida del sistema, que se pueden describir con el empleo de ecuaciones diferenciales lineales. Por lo tanto, se considera que la función de transferencia de un sistema es un modelo matemático que se define como la relación de la Transformada de Laplace entre las variables de salida (respuesta del sistema) y las variables de entrada (perturbación del

sistema) en tiempo continuo, bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero.

Propuesta experimental: el objetivo fue determinar un movimiento oscilatorio vibratorio: masa – resorte, tal se muestra en la figura 3.24, considerándose los distintos casos que provocan dichas oscilaciones, a partir del registro de valores experimentales y de valores simulados se confrontaron las gráficas que caracterizan los distintos casos del movimiento oscilador armónico.



Figura 3.24: Dispositivo experimental⁶

Aplicando la segunda ley de Newton para un oscilador armónico con amortiguamiento viscoso expresamos a la EDO de segundo orden:

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0 \quad (3.20)$$

Dividiendo por la masa (m), y considerando las condiciones iniciales, se obtiene:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0 \quad x(0) = 0; \dot{x}(0) = v_0 \quad (3.21)$$

⁶ Trabajo experimental realizado por la Lic. Teresita Elisabet Humana de la carrera Licenciatura en Física (FACEN-UNCA) con la colaboración del Lic. Guillermo Leguizamón.

Resultando conocida la ecuación diferencial del oscilador armónico amortiguado. La constante $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la *frecuencia propia* del oscilador. Equivale a la frecuencia natural con la que oscilaría el resorte si no tuviera rozamiento. Como veremos, la presencia de rozamiento reduce la frecuencia de las oscilaciones. La segunda constante $\beta = \gamma/2m$ es la *constante de amortiguamiento*. Mide la magnitud de la fricción, siendo mayor cuanto más intensa sea ésta. Tanto la frecuencia propia ω_0 como la constante de amortiguamiento β tienen unidades de (s^{-1}). Para interpretar la solución matemática de la ecuación diferencial, esta debe reflejar un cambio de comportamiento dependiendo de cómo sea la constante de amortiguamiento comparada con la frecuencia propia, así tenemos:

- ✓ *Caso subamortiguado*: si ($\beta < \omega_0$) las dos soluciones son complejas conjugadas.
- ✓ *Caso sobreamortiguado*: si ($\beta > \omega_0$) las dos soluciones son reales y diferentes.
- ✓ *Caso amortiguado crítico*: si ($\beta = \omega_0$) existe una solución son real doble.

A continuación se procedió a realizar la experiencia, la cual permitió confrontar los valores experimentales y simulados con el modelo matemático propuesto.

- **Determinación de la constante de elasticidad:** Se procedió a determinar la constante de elasticidad k , figura 3.25.

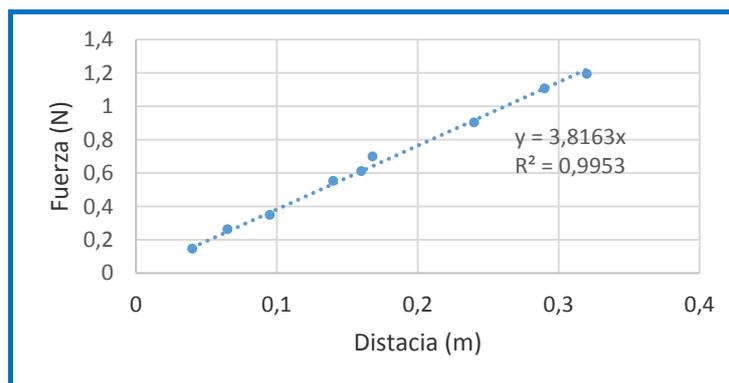


Figura 3.25: Obtención del valor de la constante de elasticidad⁶

- **Determinación Experimental del Movimiento Oscilatorio Subamortiguado:** se procedió a seleccionar el objeto de prueba de forma cilíndrica, el cual se lo introdujo en un recipiente que contenía agua para luego hacer que oscile dentro

del mismo. Aplicando el Sensor Explorer GLX-Pasco se registraron los valores de fuerza en función del tiempo, figura 3.26.

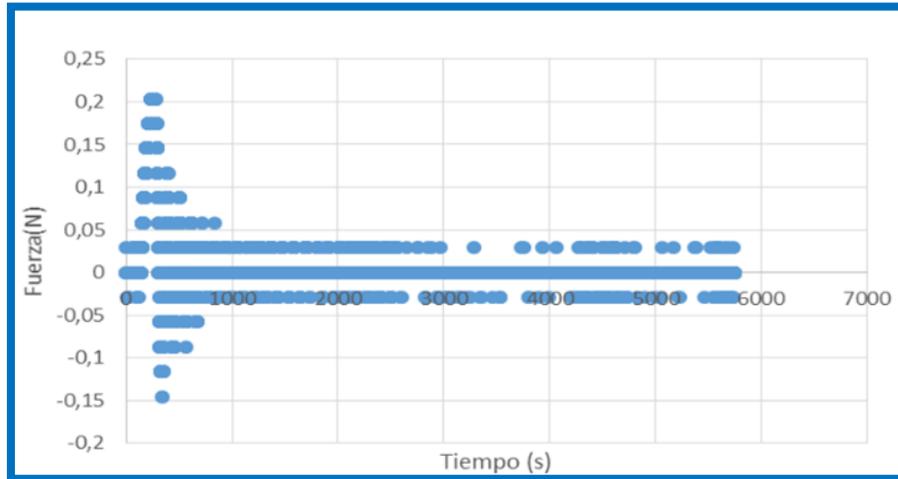


Figura 3.26: Grafica fuerza vs tiempo del movimiento oscilatorio Subamortiguado (utilizando agua)⁶

- **Determinación Experimental del Movimiento Oscilatorio Sobreamortiguado:** siguiendo el procedimiento precedente, con la diferencia de que al cuerpo se lo hizo oscilar dentro del recipiente que contiene glicerina, figura 3.27.

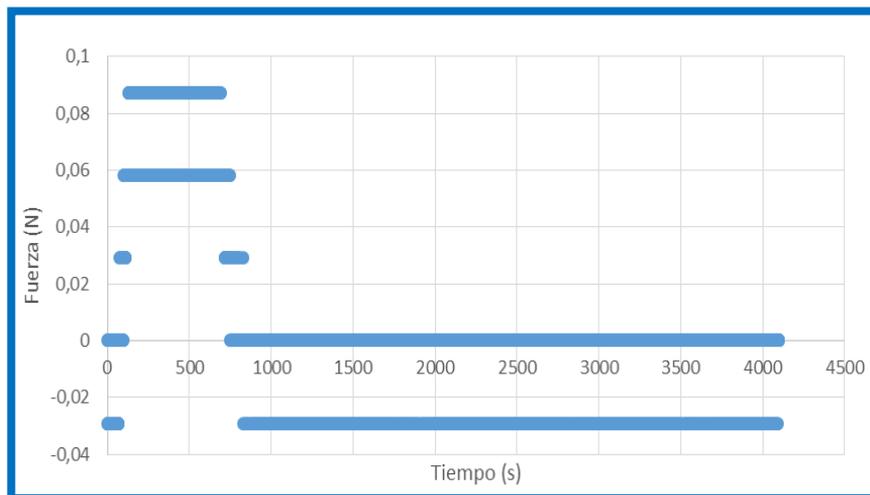


Figura 3.27: Grafica fuerza vs tiempo del movimiento oscilatorio Sobreamortiguado (utilizando glicerina)⁶.

- **Determinación Experimental del Movimiento Oscilatorio Crítico Amortiguado:** continuando con el mismo dispositivo experimental y siguiendo

los procedimientos precedentes, con la diferencia que al cuerpo se lo hizo oscilar en un recipiente que contenía aceite para vehículo Castrol GTX de alto kilometraje, figura 3.28.

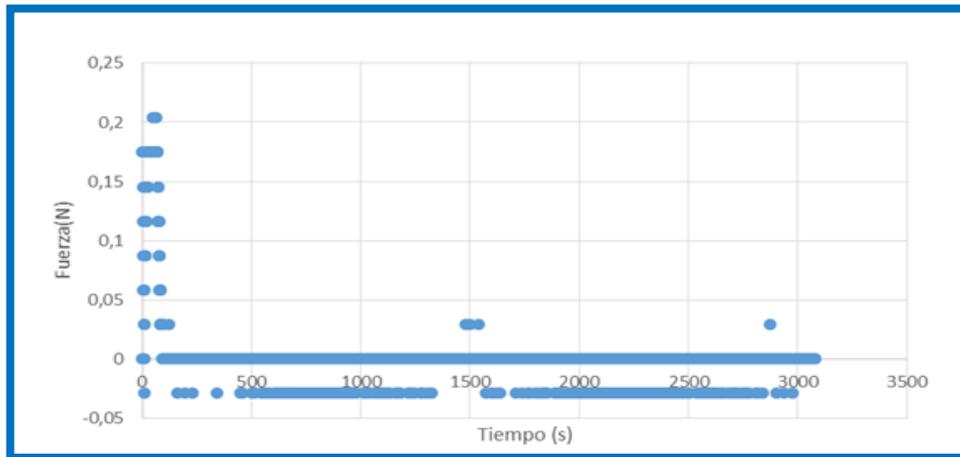


Figura 3.28: Grafica fuerza vs tiempo del movimiento oscilatorio crítico amortiguado (Utilizando aceite para vehículo Castrol GTX de alto kilometraje)⁶

A partir de las experiencias realizadas, se realizó las siguientes observaciones:

- ✓ **Experiencia I:** se utilizó agua como mecanismo de amortiguación, para la cual se observó que la amplitud del movimiento oscilatorio disminuía progresivamente con el tiempo, en concordancia con lo previsto por los modelos teóricos.
- ✓ **Experiencia II:** se utilizó glicerina como mecanismo de amortiguación, el movimiento resultante presenta las características propias del movimiento sobreamortiguado.
- ✓ **Experiencia III:** aquí se utilizó aceite viscoso como mecanismo de amortiguación, dado que el amortiguamiento es muy grande se logró obtener experimentalmente un movimiento crítico amortiguado.

Se considera fundamental analizar el parámetro β . Si bien, existen tres características generales de amortiguación, aquí haremos referencia al *Movimiento Oscilatorio Subamortiguado*, el cual se ajusta a las condiciones iniciales para la aplicación de las funciones de transferencias. Se reconocen entonces la entrada y salida del sistema, que son la fuerza aplicada y la deformación producida respectivamente para un instante de tiempo.

$$x''(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.22)$$

Con condiciones iniciales: $\varphi = 0$ y $\cos(\omega t) = 1$, cuya ecuación queda definida:

$$x''(t) = Ae^{-\beta t} \quad (3.23)$$

Resolviendo (3.23) y evaluando los parámetros de A y β . De acuerdo a los resultados obtenidos, los cuales se ajustan a las condiciones iniciales que nos conducen a la aplicación de las transformadas respectivas, lográndose el valor de $k = 3,8163(\frac{N}{m})$; $m = 0,0744721(kg)$; $F = 0,2038(N)$ analizándose valores máximos de fuerza en función del tiempo, calculando el parámetro b , se obtiene el mejor valor con su correspondiente error:

$$b = (\bar{b} \pm \Delta b) = (0,0236 \pm 0,0001) \left(\frac{kg}{s}\right)$$

Del sistema experimental diseñado, consideramos el modelo matemático de la función de transferencia $Q(s)$ del sistema masa – resorte subamortiguado que describe su comportamiento dinámico, el cual se define como el cociente de la Transformada de Laplace de la variable de salida $Y(s)$ respecto a la Transformada de Laplace de la variable de entrada $R(s)$, con las condiciones iniciales cero, donde la EDO de segundo orden puede escribirse en términos de la frecuencia angular ω_0 con la cual el sistema oscilará libremente, y el factor de amortiguamiento relativo β , obteniéndose:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\omega_0 \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = b_0\omega_0^2 R(s) \quad (3.24)$$

Aplicando la Transformada de Laplace y considerando la salida de éste sistema cuando está sujeto a una entrada escalón unitario en el dominio s , se obtiene que la fracción parcial es:

$$X(s) = \frac{b_0\omega_0^2}{s(s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2)} = \frac{b_0\omega_0^2}{s(s-m_1)(s-m_2)} \quad (3.25)$$

Donde m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación característica. Para este caso, el tipo de respuesta que se presenta depende del valor del factor de amortiguamiento relativo cuando $\beta < 1$, dichas raíces son complejas: $m_{1,2} = -\beta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{(1 - \beta^2)}$

Reemplazando en (3.23) por los valores obtenidos en la experiencia, teniendo en cuenta el ajuste de datos y la entrada escalón unitario, se tiene:

$$X(s) = \frac{49b_0}{s(s^2 + 6s + 49)}$$

Aplicando la Transformada Inversa, se obtiene:

$$x(t) = 0,0236[1 - e^{-3t} \text{sen } 6t] \tag{3.26}$$

Esta ecuación representa la solución de la función de transferencia que satisface las condiciones iniciales establecidas, y mediante la simulación dinámica permite confronta los resultado con los datos experimentales, figura 3.29.

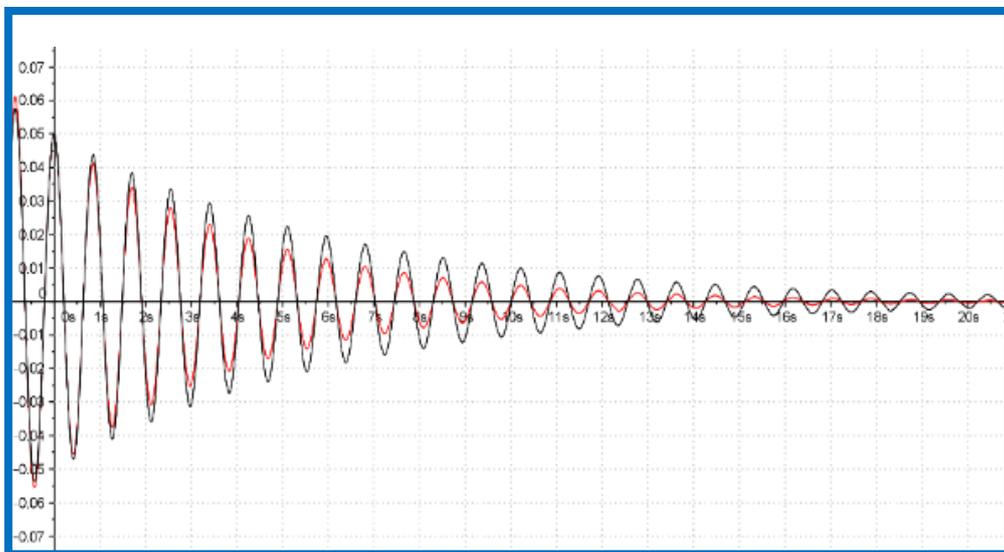


Figura 3.29: Simulación dinámica del movimiento subamortiguado en tiempo continuo (Utilizando el software libre GeoGebra)⁶



Aplicación XXI: Modelo Epidemiológico

El siguiente desarrollo está basado en un trabajo realizado por Verónica Grünfeld (†), Doctora en Física del Instituto Balseiro, Bariloche, Argentina, titulado ***Ciencia en Tiempos de Cólera***.

Supongamos una población de tamaño S inicialmente sana, en la cual se introduce un cierto número I de infectados. El objeto de estudio de la mayor parte de estos modelos lo constituyen individuos, en un sentido figurado y matemáticamente tratable, vinculados con su entorno generalmente constituido por los vecinos más cercanos. La interacción con sus vecinos es modelada matemáticamente en forma abstracta y despojada de todo aspecto psicológico o social, y está asociada al hecho de que es la proximidad espacial entre dos individuos lo que hace más probable la transmisión de la enfermedad entre ellos, en caso de ser contagiosa. Así, la distribución espacial determinará cuál es el grupo de individuos a los cuales un sujeto podrá transmitir o de los cuales podrá contagiarse la enfermedad. Existen modelos que contemplan individuos inmóviles, otros sujetos que migran desplazando la infección.

Durante el proceso infeccioso y dependiendo del tipo de enfermedad, los individuos pueden pasar por todos o algunos de los siguientes estadios:

- **Susceptibles (S):** estado en el cual el individuo puede ser contagiado por otro agente que esté infectado;
- **Infectado (I):** estado durante el cual el individuo se halla infectado y puede además infectar;
- **Removido o Recuperado (R):** estado durante el cual el individuo no puede ni ser infectado por haber adquirido inmunidad (temporal o permanente) ni afectar (por haber recuperado o haber pasado la etapa contagiosa de la enfermedad).

Entre las enfermedades infectocontagiosas encontramos dos grupos principales:

- ✓ Las que confieren inmunidad al infectado (temporal o permanente) una vez recuperado, la mayoría de origen viral (sarampión, varicela, poliomielitis); y

- ✓ Las que, una vez recuperado, el individuo vuelve a ser susceptible inmediatamente, entre las que encontramos las causadas por agentes bacterianos (enfermedades venéreas, peste, algunas meningitis) o protozoos (malaria).

Teniendo en cuenta los distintos estadios relacionados con un proceso infeccioso, los modelos epidemiológicos matemáticos se dividen en tres grandes grupos:

1. **SIR:** El modelo *susceptible-infectado-removido*, relacionado con las enfermedades que confieren inmunidad permanente y un ciclo típico incluye los tres estadios.

Esto no quiere decir que todos los individuos de una población deban pasar por estos, algunos no serán infectados y permanecerán sanos, o sea siempre en estado S , otros serán inmunizados artificialmente por vacunación, o algún otro método y pasarán a ser R sin haber estado infectados. Es justamente el interés del modelo tener en cuenta todas estas posibilidades y tratar de predecir el comportamiento de una epidemia.

2. **SIRS:** El modelo *susceptible-infectado-removido-susceptible*, idéntico al anterior, pero aplicable a casos en que la inmunidad no es permanente y el individuo vuelve a ser susceptible después de un cierto periodo, tal como la gripe, y el COVID-19.

3. **SIS:** El modelo *susceptible-infectado-susceptible*; se usan en casos en que la enfermedad no confiere inmunidad y el individuo pasa de estar infectado a susceptible nuevamente, saltando la etapa R .

Un modelo puede o no tener en cuenta la dinámica vital de la población (nacimientos, muertes, movimientos migratorios) dependiendo sobre todo de los tiempos involucrados en el proceso descrito, determinados principalmente por las características propias de la enfermedad y de la sociedad en estudio.

Consideraremos el modelo **SIR** y usaremos el modelo continuo de Kermack y Mc Kendrick, que es uno de los más elementales de la Teoría Epidemiológica, el cual se expresa como:

$$\begin{cases} S' = -cSI \\ I' = cSI - rI \\ R' = rI \end{cases}$$

Donde S es la población susceptible a enfermar, I la población infectada y R la población que se ha recuperado de la enfermedad. Además existen dos constantes que son las tasas de infección o contagio y la de recuperación: c y r , respectivamente.

Tal modelo responde a un sistema de ecuaciones diferenciales, y se complementa con algunas suposiciones previas a fin de simplificar el problema. Por ejemplo, de que un enfermo, una vez recuperado, ya no contraerá la enfermedad, y que una vez tratado y aislado para su recuperación, no contagiará. Nos tomaremos la libertad de imaginar que no hay muertos, y a los efectos de este modelo no tendremos en cuenta las variaciones de población debida a otros factores, viajes, nacimientos, o sea, una población cerrada.

Así, nuestra población vimos que consta de tres categorías de personas:

- Sanos S
- Infectados I
- Recuperados R

Inicialmente no hay ningún recuperado, (aunque los podría haber), es decir, sólo consideramos sanos e infectados, y la cantidad que existe de cada uno es:

$$S = S_0 \quad I = I_0 \quad R = R_0 = 0$$

Además consideraremos que durante nuestro tiempo de observación la población cumple con el siguiente proceso:

- ✓ Algunos de los sanos enfermarán, de manera que habrá una disminución de la población sana susceptible de contraer la enfermedad. A ésta variación la llamaremos ΔS , y por ser una disminución se definirá negativa.
- ✓ La variación neta ΔI será la diferencia entre dos contribuciones, una debida a los nuevos infectados que será numéricamente igual a ΔS , pero con el signo contrario, y la otra originada en algunos enfermos que se recuperarán, de manera que habrá una disminución en el número de infectados que será igual al aumento en el número de recuperados. Supondremos además, que no hay reinfección.

Lo supuesto hasta aquí, es fácilmente modificable para otras situaciones, como ser que los recuperados pueden infectarse nuevamente, o más aún, en repetidas veces.

Comencemos a hacer funcionar nuestro modelo, para ello deberemos contar periódicamente de mediciones del número de sano, infectados y recuperados en cada instante, como si fuesen tres poblaciones paralelas. Hemos de presentar la forma de obtener esas cantidades que miden cada población, previa presentación de cómo medir las variaciones que sufren, recordando que el total de las poblaciones es constante, por lo tanto:

$$S + I + R = S_0 + I_0 + R_0$$

Y las variaciones de susceptibles, infectados y recuperados, satisfacen:

$$\Delta S + \Delta I + \Delta R = 0$$

Para comenzar a correr nuestro modelo, o sea, realizar nuestra simulación, debemos calcular los valores de las distintas poblaciones. Para ello llamemos a la población inicial de sanos por S_0 , y la correspondiente a los infectados sea I_0 .

Las variaciones ΔS , ΔI y ΔR las supondremos constantes durante todo nuestro experimento, y si denotamos con $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ el número de sanos, infectados y recuperados, respectivamente para el tiempo t , se tiene que para el instante siguiente de observación:

$$S'(t) = S(t) + \Delta S \qquad I'(t) = I(t) + \Delta I \qquad R'(t) = R(t) + \Delta R$$

Ahora bien, la primera variación a calcular es ΔS , que es el número de sanos que se convierten en infectados, esto es, resta a S y suma a I , bajo las suposiciones que es proporcional a ambas cantidades iniciales, y siendo un bucle negativo entre S e I , de esta manera:

$$\Delta S = -cSI$$

Siendo c la tasa de contagio, que mide la probabilidad por unidad de tiempo y por habitante de contraer la enfermedad. Con c sintetizamos todos los factores sociales y sanitarios que intervienen en el contagio: higiene, hacinamiento, pobreza, clima, disponibilidad de servicios públicos, nivel de formación, etc. Claro, hasta aquí vemos que no estamos hilando fino, pero es un modelo primitivo.

La forma óptima de trabajar es dar al modelo la forma más simple posible, lo cual implica que es lo más alejado de la realidad, pues nos desprendemos de variables que en un primer momento pueden resultar molestos; al tiempo que agrupamos otros tantos factores en la cantidad posible de constantes. A partir de la primera aproximación obtenida de este modelo respecto a la realidad, agregamos elementos de acuerdo a los factores que intervienen.

Continuemos analizando los elementos que participan, así ΔI se obtiene de la suma de los nuevos infectados menos los que dejan de estarlo para convertirse en recuperados:

$$\Delta I = cSI - \Delta R$$

Es inmediato que ΔR depende sólo del número de infectados, pues no se relacionan con los sanos, así:

$$\Delta R = rI$$

Con r constante que mide la intensidad de recuperación de los infectados y se denomina *tasa de recuperación*. O sea:

$$\Delta I = cSI - rI$$

Una vez definidos todos los elementos que intervienen, el paso siguiente es hacer correr el modelo, esto se expresa en términos actuales diciendo que se efectúa la simulación del modelo. A tal efecto se muestra la simulación obtenida con el simulador Vensim PLE.

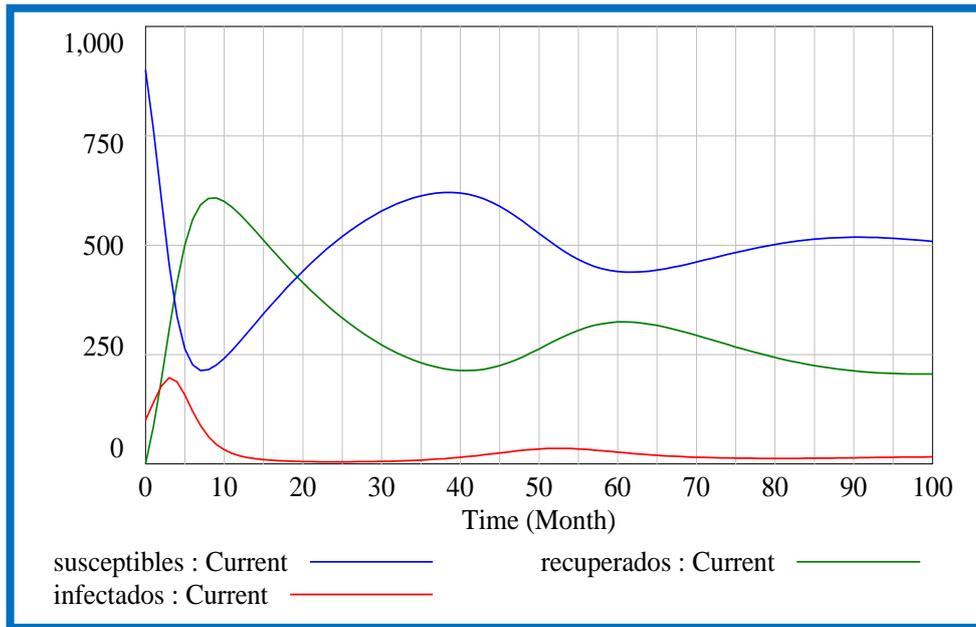


Figura 3.30: Comportamiento de las variables del modelo epidemiológico (Realizado con el software VENSIM PLE 5.11)



CAPÍTULO 4:
SIMULACIÓN DE MODELOS
MATEMATICOS
COMPARTIMENTADOS

María Luz del V. Quiroga

Silvia Inés del V. Navarro

Gustavo A. Juarez

4.1. Introducción

Dijimos en el Capítulo 2 que las EED frecuentemente no se hallan en los contenidos de diversas formaciones. Además por considerarlas oportunas en el estudio variacional previo a la forma continua, o sea a las EDO, fue asumida como propuesta de investigación y divulgación por los integrantes del equipo. En un inicio se formalizó la teoría, luego se propuso la creación de un software que posteriormente fue actualizado, siendo el que se usa en el Capítulo 2. Con dicho software se trabajó con problemas con valores iniciales discretos, donde la EED tratada son de primer y segundo orden, involucrando la forma lineal y la cuadrática dada por la logística y se planteó sistemas de ecuaciones en diferencias de dos o tres sucesiones, lineales y cuadráticas. Considerando en todos los casos que los coeficientes son constantes.

Además surgieron inquietudes en casos particulares como las *Progresiones Geométricas de Oro*, como una generalización de las *sucesiones de Fibonacci y de Lucas*, también con las *Ecuaciones en Diferencias Recíprocas y Semirrecíprocas*, asistidas ya con el software antes mencionado. La limitación del software desarrollado, estuvo en que los coeficientes de las EED son constantes. Para ampliar a coeficientes variables tuvimos la opción de implementar el software VensimPle. En esto último, los resultados han aportado a que se estudie bajo la Dinámica de Sistemas, implicando la construcción de diagramas de flujos, y el uso del software VensimPle, para lo cual se utilizó la versión 6.1.1. Así es como lo presentamos aquí, en donde, a las ecuaciones y sistemas de ecuaciones en diferencias, con valores iniciales, las denominamos problemas con valores iniciales discretos, esto es PVID.

En consecuencia, el presente capítulo pretende difundir simulaciones de PVID, a partir de EED y sistemas de ecuaciones en diferencias con valores iniciales. Tales problemas tienen como soluciones a las denominadas *sucesiones recurrentes*. Los PVID, compuestos por una ecuación o sistema de ecuaciones en diferencias con los correspondientes valores iniciales, fueron estudiados en los últimos años para los casos de coeficientes constantes, de primer y segundo orden, observándose resultados tanto para simulación de modelos aplicados a matemática biológica, matemática financiera, física, ambiente, salud, entre otras, sino también en el estudio teórico de ecuaciones con retardo.

A los efectos de expandir el campo de estudio de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones en diferencias mediante simulaciones desarrollado en el Capítulo 2, se presentan resultados obtenidos con el software VensimPle, donde los coeficientes pueden ser funciones, y los órdenes pueden ser mayores a dos, así también los sistemas de ecuaciones pueden contener más de tres ecuaciones, y en cualquiera de los casos estudiar casos no lineales y no homogéneas con expresiones que incluyen polinomios en una variable.

Para el presente trabajo realizaremos una presentación ordenada, mostrando en cada caso ejemplos y el modelo bajo la Dinámica de Sistemas, utilizando diagramas de flujos que permitan la simulación con el software VensimPle, valiéndonos de ejemplos desarrollados en el texto *Ecuaciones en Diferencias con Aplicaciones a Modelos en Dinámica de Sistemas* (de autoría Juárez y Navarro, 2005); en donde se presentan casos de coeficientes constantes.

4.2. Problemas con valores iniciales discretos

Para determinar en forma única la sucesión solución de una EED debemos adicionar una condición inicial, o mejor aún, tantas como indica el orden de la EED. Tal condición junto a la EED forma un problema con valor inicial, que a fin de distinguir la analogía que tienen el desarrollo del tema de las EED con las EDO, como el lector ya habrá observado, nos permitimos llamar a estos *problemas con valor inicial discretos*, o en forma breve PVID.

Ejemplo 4.1: Hallar la solución al PVID de primer orden:
$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = 4 \\ x_0 = -3 \end{cases}$$

La solución general de la EED lineal de primer orden no homogénea es $x_n = C + 4n$. Se completa con la condición inicial con lo cual resulta la sucesión $x_n = -3 + 4n$. ■

4.3. Simulación bajo Dinámica de Sistemas

Dijimos que la solución de un PVID es una sucesión única. A partir del valor inicial y de la EED se puede obtener los términos de la sucesión.

Para hallar la sucesión única, que es solución del PVID, lo realizaremos por recurrencia mediante una simulación. Para ello antes vamos a señalar los términos de la Dinámica de Sistemas que permiten esta simulación.

Entendemos por "Sistema" un conjunto de elementos independientes con interacciones estables entre sí. El primer paso para comprender el comportamiento de un sistema será lógicamente definir los elementos que intervienen en el mismo y las posibles interrelaciones que existen entre ellos. El dicho aristotélico de que el todo es más que la suma de sus partes cobra aquí un especial significado. La evolución del modelo se realiza sobre la base de la evolución pasada, de las variables denominadas independientes, y se aplica la estadística para determinar los parámetros del sistema de ecuaciones que las relacionan con las otras denominadas dependientes. Estas técnicas, pretenden determinar el comportamiento del sistema sin entrar en el conocimiento de sus mecanismos internos. El objetivo básico de la Dinámica de Sistemas es llegar a comprender las causas estructurales que provocan el comportamiento del sistema.

Para nuestro caso las sucesiones recurrentes, soluciones de EED, se forman a partir de un primer elemento de la sucesión, el llamado *valor inicial* y la ecuación que expresa en términos de los términos ya conocidos, como se genera el siguiente término de la *sucesión*.

Es por ello que nos permitimos usar un diagrama de flujo, pues se utilizará el programa VensimPle para obtener algunos términos de la sucesión. En el diagrama se distingue la variable que expresa el orden del término de la sucesión, en este caso n , y el término de la sucesión, es decir x_n , ambas se toman como variables box, pues los valores se van acumulando.

El conjunto de los elementos que tienen relación con nuestro problema y permiten en principio explicar el comportamiento observado, junto con las relaciones entre ellos, en muchos casos de retroalimentación, forman el Sistema. De ésta manera trataremos a

los PVID como un sistema que varía en el tiempo, más aun como un Sistema Dinámico.

El Diagrama de flujo es un diagrama que recoge los elementos clave del Sistema y las relaciones entre ellos.

Para un PVID con una EED de primer orden podemos partir del siguiente diagrama de flujo, figura 4.1.

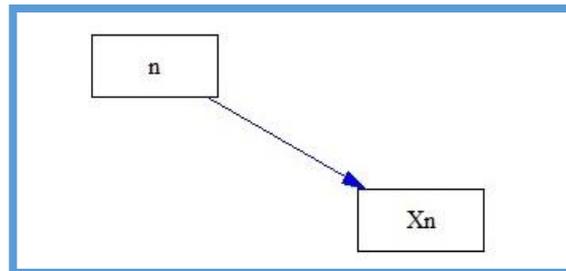


Fig.4.1. Diagrama de flujo de una EED lineal de primer orden con coeficiente constante

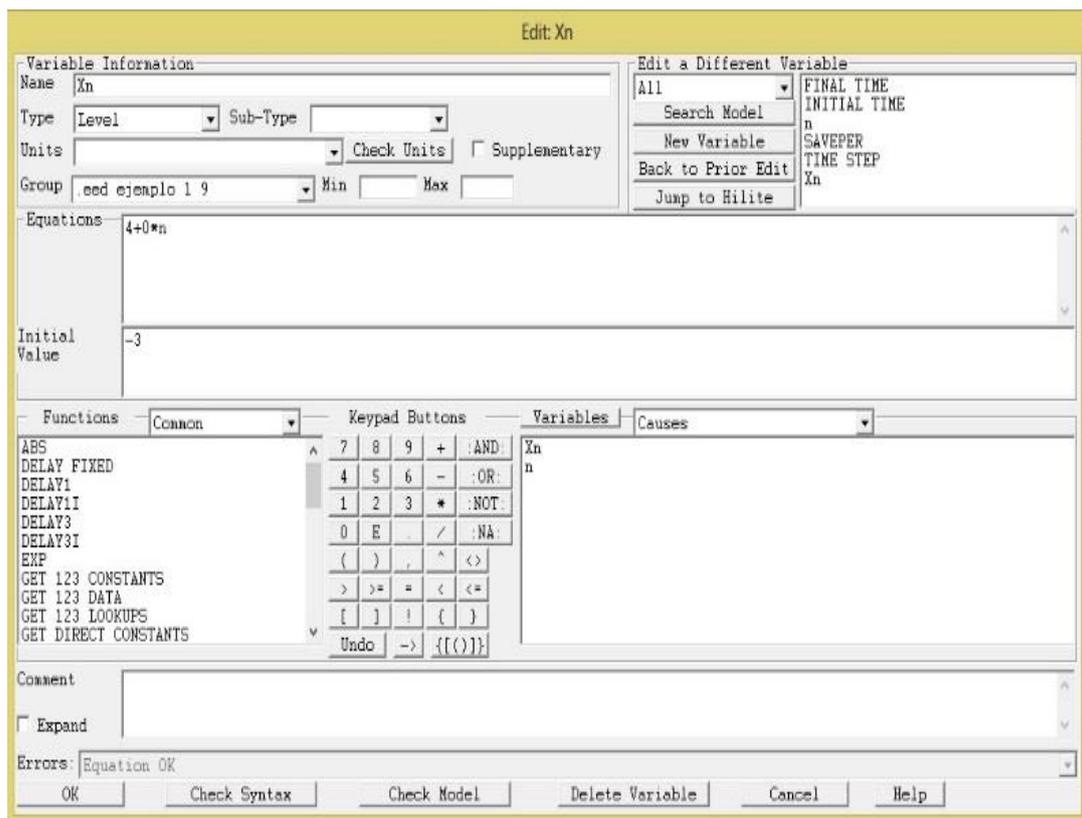


Figura 4.2: Definición de variable box

En cuanto a n , varía desde cero con crecimiento unitario. La variable x_n indica el término de la sucesión, por lo que su valor inicial esta dado en el PVID, mientras que la ecuación

que debemos escribir se relaciona con la llamada *diferencia finita* o sea el crecimiento que presentan dos términos consecutivos de la sucesión, esto es, $x_{n+1} - x_n = 4$, por ello colocamos el segundo miembro, tal se muestra en la figura 4.2.

Al realizar la simulación de algunos términos de esta sucesión del ejemplo 4.1 nos queda:

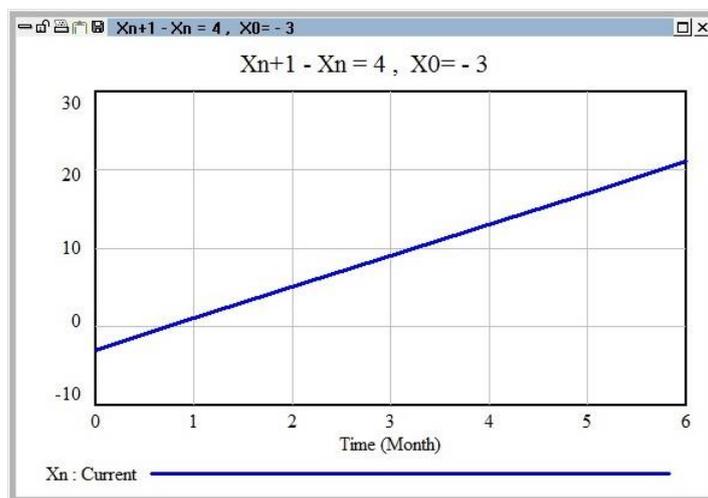


Figura 4.3 Sucesión solución del PVID del ejemplo 3

Ejemplo 4.2: Consideremos el siguiente PVID de primer orden $\begin{cases} x_{n+1} - 3x_n = 5 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

La solución general está dada por la sucesión $x_n = C3^n + \frac{5}{1-3} = C3^n - \frac{5}{2}$

Aplicando ahora la condición inicial dada: $x_0 = C3^0 - \frac{5}{2} = C - \frac{5}{2} = 2$

Así $C = \frac{9}{2}$. Con este valor de C se obtiene la solución particular $x_n = \frac{9}{2}3^n - \frac{5}{2}$



Por nuestro lado proponemos hallar términos de la sucesión solución, para ello ahora debemos escribir en la ecuación de la variable box, el término de la sucesión del segundo miembro de la ecuación dada transformada por la diferencia finita:

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n + 5 + 0 * n$$

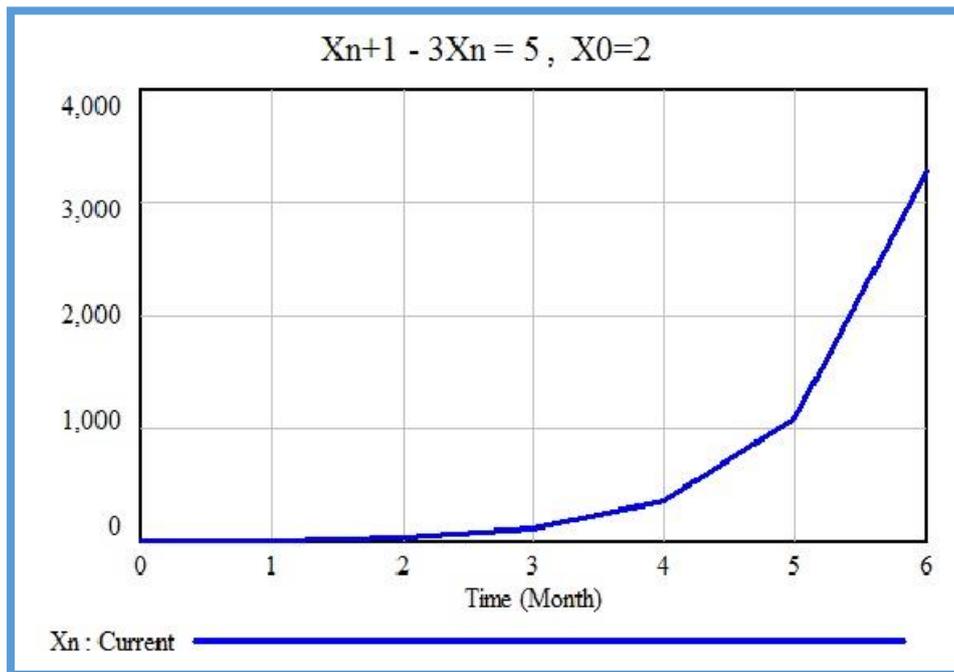


Fig. 4.3 Sucesión solución del PVID del ejemplo 4.2

Ejemplo 4.3: Consideremos el siguiente PVID de primer orden $\begin{cases} x_{n+1} - 2x_n = 3n + 1 \\ x_0 = 4 \end{cases}$

Realizamos el siguiente diagrama de flujo, en donde preferimos definir a la nueva variable que expresa el término $n+1$ de la sucesión, sin ser box o sea no es acumulable:

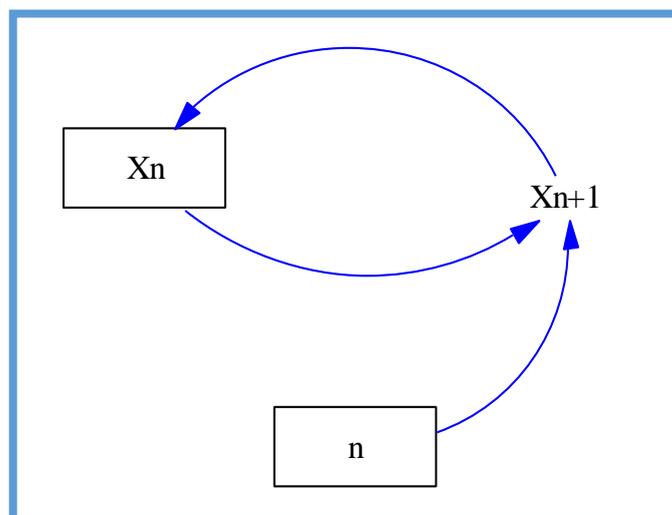


Figura 4.4: Diagrama de flujo del ejemplo 4.3

Donde se presentan como variables box al término general de la sucesión x_n y a la variable n que indica el orden de variación de la misma. Mientras que el término de la variable generada x_{n+1} se da como variable no acumulada.

Además para definir se usa las expresiones:

Figura 4.5: Variable box de nivel x_n con el valor inicial

Figura 4.6: Variable box de nivel n con el valor inicial 0 y crecimiento 1 indicado en la ecuación

Figura 4.7: Variable auxiliar x_{n+1}

Resultando los primeros términos de la sucesión solución del PVID:

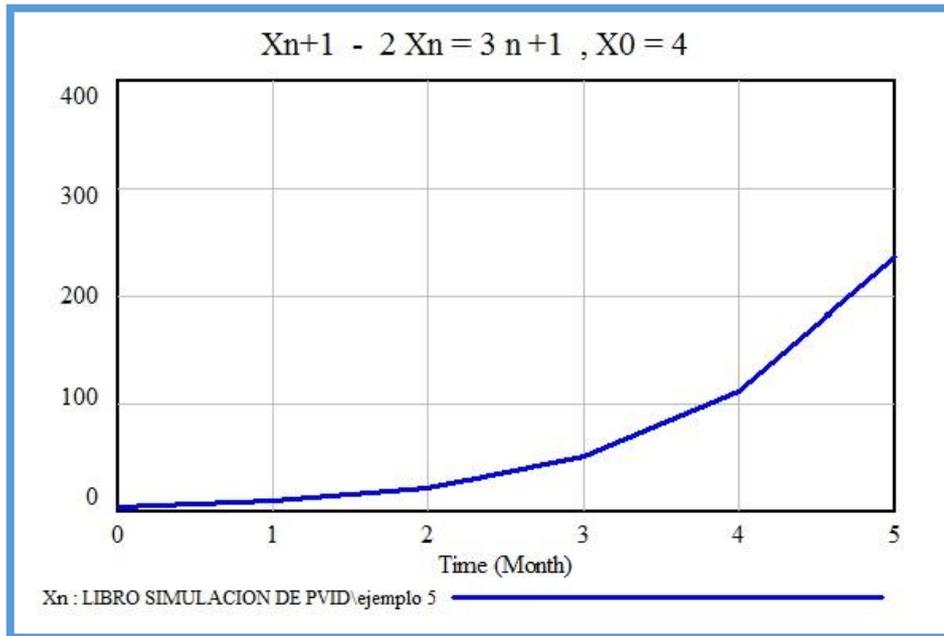


Figura 4.8 Sucesión solución del PVID del ejemplo 4.3

4.4. PVID con EED de Segundo Orden

Para el caso de un PVID con una EED lineal de segundo orden homogéneo con coeficiente constante,

$$\begin{cases} x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \\ x_0 = a \\ x_1 = b \end{cases}$$

El modelo dinámico se expresa mediante el diagrama siguiente:

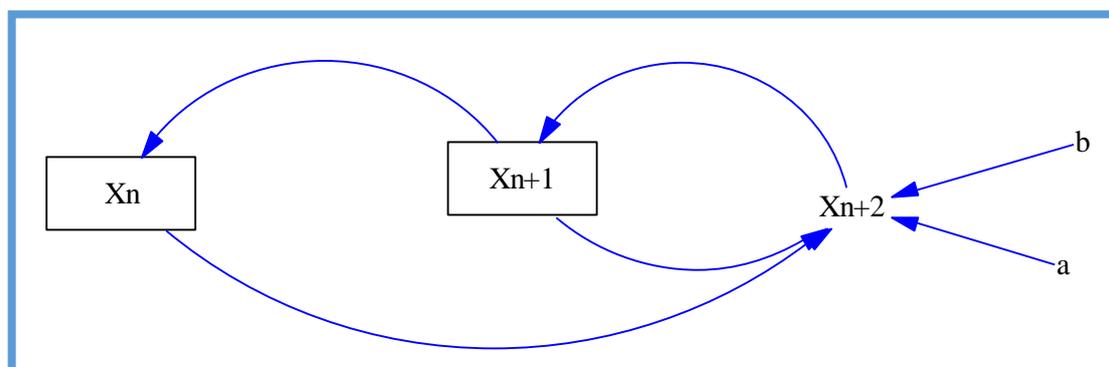


Figura 4.9 Modelo dinámico de una EED homogénea de segundo orden lineal con coeficiente constante

Ejemplo 4.4: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID de segundo orden, sea éste

$$\begin{cases} x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

La ecuación característica asociada a la EED dada es $\rho^2 + 2\rho - 3 = 0$, y sus raíces características son 1 y -3. Así la solución general de la EED es $x_n = C_1 + C_2(-3)^n$.

Para obtener la solución particular usamos los valores iniciales dados quedando el sistema

de dos ecuaciones algebraicas $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 3C_2 = 3 \end{cases}$

Que se satisface para $C_1 = \frac{3}{2}$ y $C_2 = -\frac{1}{2}$

Con lo cual la solución particular del PVID es la sucesión $x_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-3)^n$



Una vez realizado el diagrama de la figura 4.10, debemos cargar las variables box, debido a que son variables que acumulan las variables x_n y x_{n+1} estas deben definirse respectivamente como:

Equations	"Xn+1" - Xn
Initial Value	1

Figura 4.10: Definición de la variable box x_n con el valor inicial 1

Equations	"Xn+2" - "Xn+1"
Initial Value	3

Figura 4.11: Definición de la variable box x_{n+1} con el valor inicial 3

Mientras que la variable x_{n+2} no es acumulable y se define por la fig. 4.12:

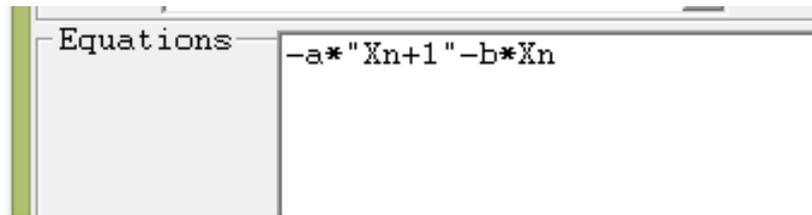


Figura 4.12: definición de la variable no acumulable x_{n+2}

En cuanto a las constantes se les asigna los valores numéricos del PVID. Por lo tanto la sucesión tiene en sus primeros términos el siguiente comportamiento:

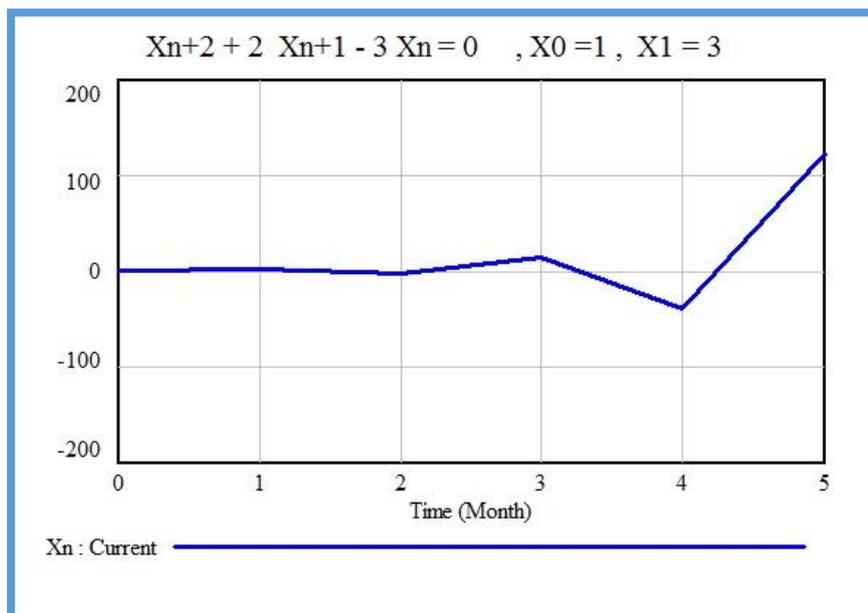


Figura 4.13 Sucesión solución del PVID del ejemplo 4.4

Para el caso de un PVID con una EED lineal de segundo orden no homogénea con coeficiente constante,

$$\begin{cases} x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = R(n) \\ x_0 = X0 \\ x_1 = X1 \end{cases}$$

con $R(n)$ constante o polinomio en n , agregamos la variable n , el modelo dinámico se expresa mediante el diagrama siguiente:

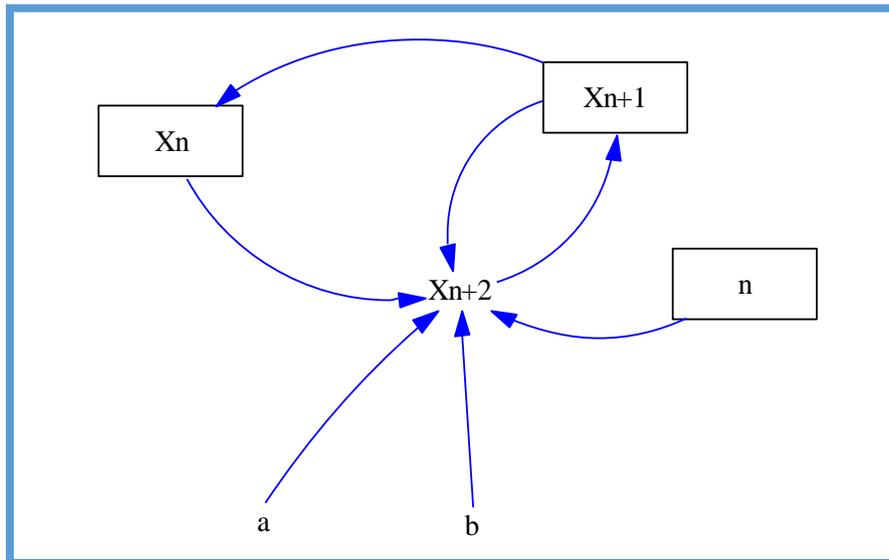


Figura 4.14: Modelo dinámico de una ecuación en diferencias no homogénea de Segundo orden lineal con coeficiente constante

Ejemplo 4.5: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID de segundo orden, sea éste

$$\begin{cases} x_{n+2} - 1,1x_{n+1} + 0,9x_n = 4 \\ x_0 = 6 \\ x_1 = 8 \end{cases}$$

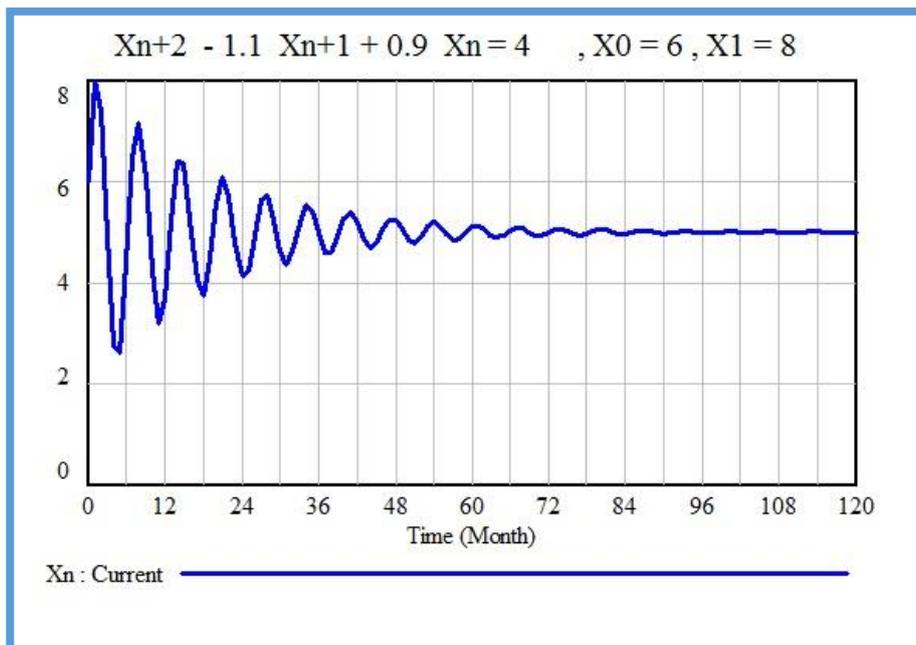


Figura 4.15: Sucesión solución del PVID del ejemplo 4.5

Citamos a continuación una serie de propuestas de ejercicios de PVID con EED de segundo orden donde el segundo miembro contiene la variable n , que pueden resolverse con este caso:

Ejercicio 1: Realice el desarrollo del PVID de segundo orden, siguiente

$$\begin{cases} x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 3^n \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2: Ídem para el PVID de segundo orden:

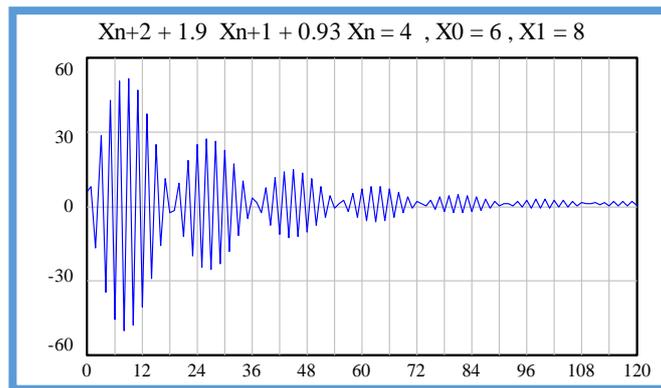
$$\begin{cases} x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = n^2 + n + 1 \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 3: Realice el desarrollo del PVID de segundo orden, siguiente

$$\begin{cases} x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 2^n(n + 1) \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

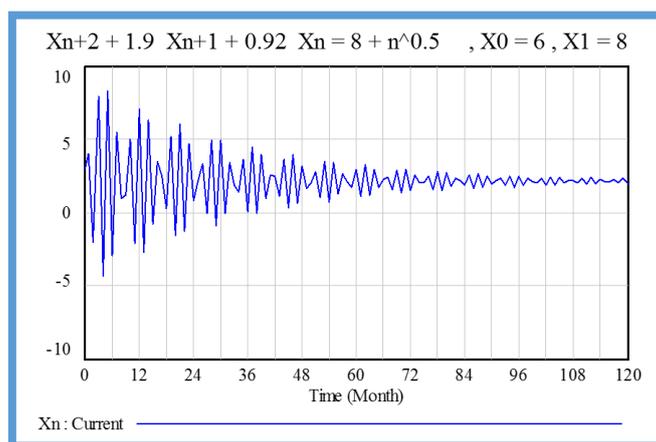
Ejercicio 4: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID de segundo orden, sea éste

$$\begin{cases} x_{n+2} + 1,9 x_{n+1} + 0,93 x_n = 4 \\ x_0 = 6 \\ x_1 = 8 \end{cases}$$



Ejercicio 5: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID de segundo orden, sea éste

$$\begin{cases} x_{n+2} + 1,9 x_{n+1} + 0,92 x_n = 8 + \sqrt{n} \\ x_0 = 6 \\ x_1 = 8 \end{cases}$$



Aplicación XXII: Progresiones Geométricas de Oro

Nos detendremos en las EED de segundo orden con dos valores iniciales, o sea, con un PVID de segundo orden. En particular uno muy famoso, pues la sucesión se forma a partir de dos valores iniciales y los siguientes términos de la sucesión se obtienen sumando los dos anteriores.

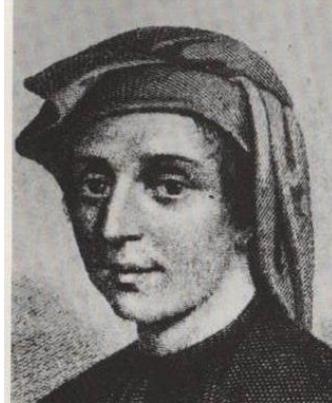
Temporada de conejos: Sucesión de Fibonacci



Figura 4.16: Bugs Bunney el conejo tan famoso como los conejos de Fibonacci.

Dijimos mucho para describir este PVID, pues el lector habrá pensado en el problema muy conocido de los conejos. Famoso tanto como Bugs, pues nos referimos a la sucesión atribuida a **Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo**, o más fácilmente: *Fibonacci* (por *Filius Bonacci*, hijo de Bonacci, sobrenombre de su padre). Así nuestro PVID se puede escribir como:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; n \geq 1 \end{cases}$$



Leonardo de Pisa, inmortalizado como Fibonacci.

Conocida como definición *recurrente de la sucesión de Fibonacci*. Como la solución de la EED del PVID se expresa en términos de las raíces características

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{Y} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La sucesión se puede escribir como $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ para $n \geq 1$.

Expresión conocida como Fórmula de Binet, (Jacques-Phillipe-Marie Binet, matemático francés. 1786-1856), y que en término de las raíces características se expresa como:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

La primera raíz característica, α se conoce como el *Número de Oro*, y se representa con Φ , que es un número irracional y se lo estudia en la razón áurea de un segmento y en el rectángulo áureo.

La *forma de Binet* para el enésimo término de la sucesión de Fibonacci se expresa en términos del número áureo como:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (1-\Phi)^n}{2\Phi - 1}$$

Y Lucas.... y Lucas.... y Lucas



El Pato Lucas Armando

Esta expresión clásica en el pato Lucas Armando, por estar siempre después de Bugs Bunny nos lleva como regla nemotécnica a la segunda sucesión más conocida, que parte de un PVID con igual EED pero con valores iniciales distintos. De allí que la solución general de la EED es la misma en ambas sucesiones.



François Lucas

Aclaremos quien es nuestro Lucas, no nos referimos al personaje de los dibujos animados sino a **François Édouard Anatole Lucas** (Amiens, 4 de abril de 1842 - París, 3 de octubre de 1891), matemático francés. Trabajó en el observatorio de París y más tarde fue profesor de matemáticas en la capital del Sena. Se le conoce sobre todo por sus trabajos sobre la sucesión de Fibonacci y por el test de primalidad que lleva su nombre, también fue inventor de algunos juegos recreativos matemáticos muy conocidos como el de las *Torres de Hanói*. Por otro lado, definió y estudió una sucesión que se conoce como de Lucas, dada por el PVID.

$$\begin{cases} L_1 = & 1 \\ L_2 = & 3 \\ L_{n+1} = & L_n + L_{n-1} \end{cases}$$

La sucesión en términos de las raíces se puede denotar usando la expresión de Binet como

$$L_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \alpha^n + \beta^n, \text{ para } n \geq 1.$$

Esta sucesión tiene valores iniciales muy particulares, en efecto:

$$L_1 = \alpha + \beta \quad \text{Y} \quad L_2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Es decir, estos valores dependen de las raíces características de la EED.

Progresiones Geométricas de Oro

Así las sucesiones de Fibonacci y de Lucas tienen la misma EED en el PVID, generando la misma forma recurrente. Una generalización en forma inmediata podemos realizar para estas sucesiones al escribir como un PVID con igual EED pero con valores iniciales arbitrarios. Las denominaremos *Progresiones Geométricas de Oro*, (PGO), y mencionaremos el porqué.



Ahora busquemos una sucesión de lingotes de oro para satisfacer a Sam Bigotes.

El *número de oro*, cuenta con un gran número de propiedades, y en la sucesión de Fibonacci, una es la que se le adjudica a Barr y Schooling (1912):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

Esta propiedad se verifica en las EED, independiente de los valores iniciales, por ello la extendemos a la sucesión generalizada, o sea a las PGO. Con esta propiedad puede escribirse:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \Phi$$

Por lo tanto, $\Phi_{n+1} = \Phi \cdot \Phi_n$ para $n \rightarrow \infty$, es decir es una progresión geométrica con razón Φ , o PGO. De ésta manera la generalización son las PGO, y la podemos expresar mediante el PVID:

$$\begin{cases} \Phi(1) = & \Phi_1 \\ \Phi(2) = & \Phi_2 \\ \Phi_{n+1} = & \Phi_n + \Phi_{n-1} \end{cases}$$

Simulación bajo Dinámica de Sistemas con Vensim Ple

La solución de un PVID es una sucesión única. A partir de valores iniciales y de la EED se obtienen términos de la sucesión. Para hallar la sucesión única del PVID, lo realizaremos por recurrencia mediante una simulación. Entendemos por "Sistema" un conjunto de elementos independientes con interacciones estables entre sí. El primer paso, para comprender el comportamiento de un sistema será lógicamente definir los elementos que intervienen en el mismo, y las posibles interrelaciones que existen entre ellos. La evolución del modelo se realiza sobre la base de la evolución pasada, de las variables denominadas *independientes*, y se aplica los cálculos para determinar los parámetros del sistema de ecuaciones que las relacionan con las otras denominadas *dependientes*. El objetivo básico de la Dinámica de Sistemas, es comprender las causas estructurales que provocan el comportamiento del sistema.

Vamos a aplicar un diagrama de flujo, pues se utilizará el programa Vensim Ple para obtener algunos términos de la sucesión. En el diagrama se distingue la variable que expresa el término de la sucesión, es decir x_n , así como los dos siguientes x_{n+1} y x_{n+2} . Las dos primeras se toman como variables box, pues los valores se van acumulando y la restante como variable no acumulable. Para el caso de un PVID con una EED lineal de segundo orden homogéneo con coeficiente constante:

$$\begin{cases} x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_n = 0 \\ x_0 = X_0 \\ x_1 = X_1 \end{cases}$$

El modelo dinámico se expresa mediante el diagrama de la figura 4.17:

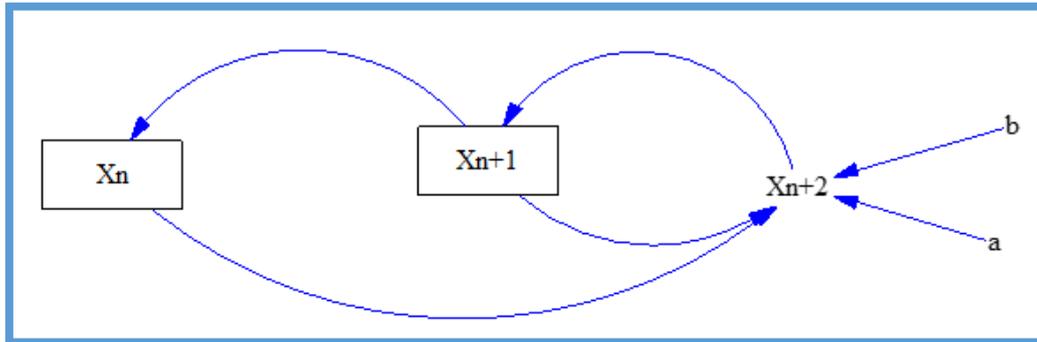


Figura 4.17 Modelo dinámico de una EED homogénea de segundo orden lineal con coeficiente constante

Nuestra EED tiene los escalares $a = b = 1$. Graficando para las dos sucesiones bajo estudio tenemos, se pueden comparar gráficamente en la figura 4.18:

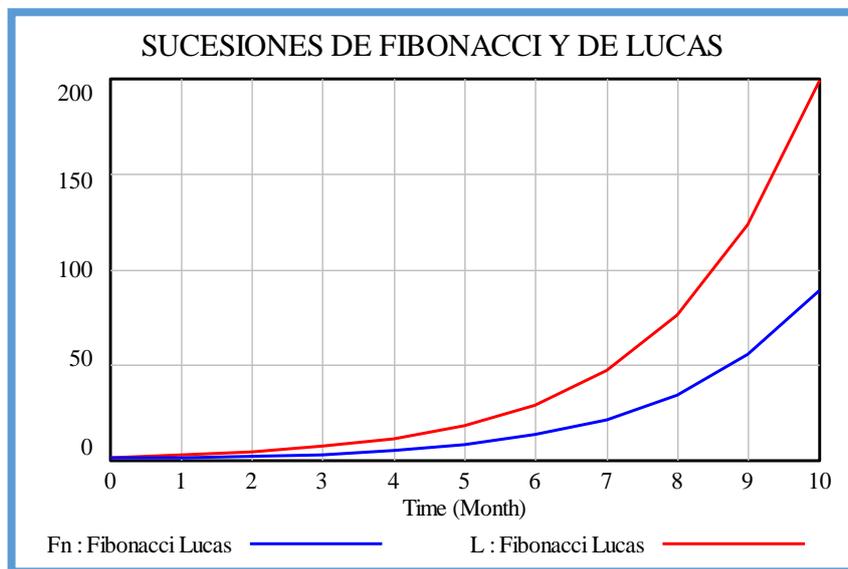


Figura 4.18 Sucesiones de Fibonacci y de Lucas

Por lo tanto, podemos dar valores iniciales diferentes y tendremos distintas sucesiones que responden a las PGO. En consecuencia, esto aporta al estudio y análisis de problemas que se caracterizan por presentar soluciones del tipo sucesiones recurrentes.

4.5. PVID con SEED de Dos Ecuaciones Lineales con Dos Sucesiones Incógnitas

Ahora consideramos dos ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneas con coeficientes constantes en forma simultáneas con iguales sucesiones incógnitas, esto es de la forma,

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$$

Este tipo de problemas con valor inicial, requiere de dos valores iniciales, el primero de cada una de las sucesiones. Uno de los métodos de resolución es el de eliminación de una sucesión con lo cual se restringe a una EED en una sola sucesión de orden dos; salvo el caso de que se verifique en los coeficientes la igualdad $ad = bc$, en cuyo caso el orden es uno.

El estudio aplicado de este tipo de problemas, es el de dos especies que varían en el tiempo sujeto a cambios propios de su especie y de contribuciones de la otra especie. Esto en Biología, más precisamente en dinámica de poblaciones se denomina *modelo lineal de Presa Depredador*, o de *Lotka-Volterra*.

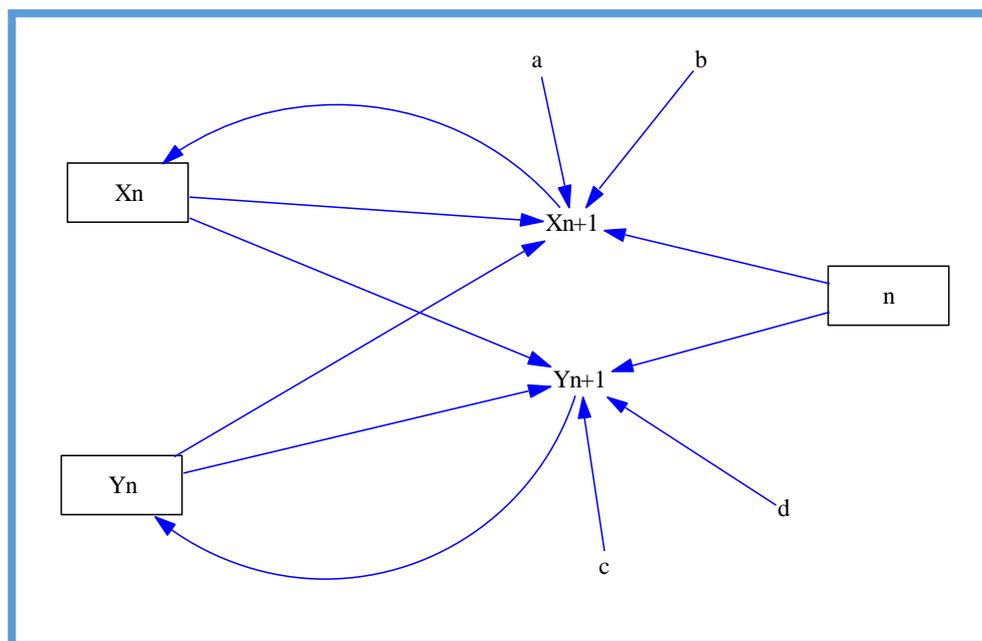


Figura 4.19: PVID con un SEED de dos ecuaciones con dos sucesiones

El diagrama correspondiente que lo podemos extender a un SEED no homogéneo en la figura 4.19.

Ejemplo 4.6: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID compuesto por un SEED de primer orden de dos sucesiones lineales con coeficientes constantes y dos valores iniciales, uno de cada sucesión:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.06x_n - 0.025y_n & -0.25n - 6 \\ y_{n+1} = 0.02x_n + 0.4y_n & +0.04n^2 - 0.01n + 20 \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_0 &= 200 \\ y_0 &= 12 \end{aligned}$$

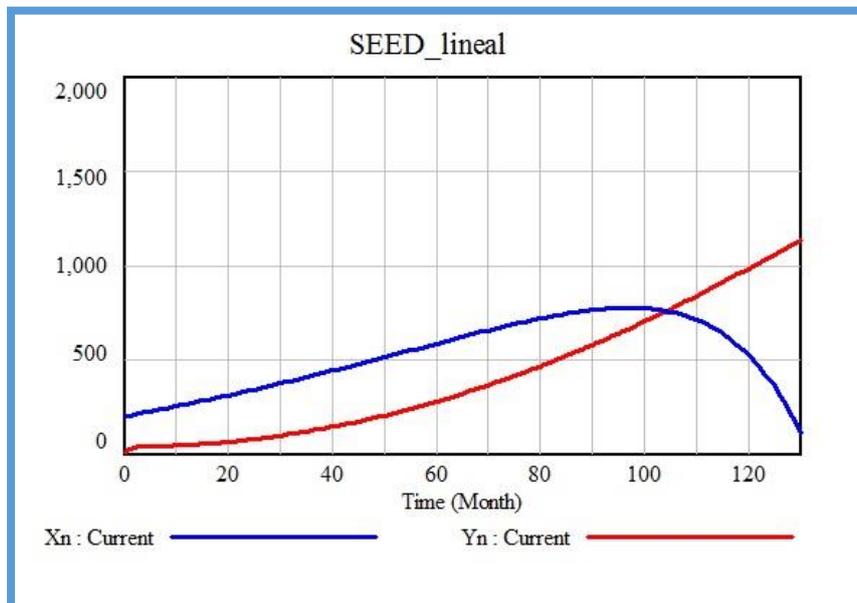


Figura 4.20: sucesiones solución del SEED del ejemplo 4.6

4.6. SEED Cuadrático de Dos Ecuaciones con Dos Sucesiones Incógnitas

El modelo de competencia de especies presentado en el apartado anterior, puede ser mejorado si incorporamos un coeficiente que estudie la interacción entre ambas especies. Esto se manifiesta con la presencia de un término donde participan ambas especies, por lo cual deja de ser lineal, convirtiéndose en cuadrático.

De ésta manera el SEED homogéneo queda de la siguiente manera, pudiendo incorporar términos que expresen la forma no homogénea en cualquiera o en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + ex_ny_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + fx_ny_n \end{cases}$$

El grafico del SEED cuadrático con valores iniciales es:

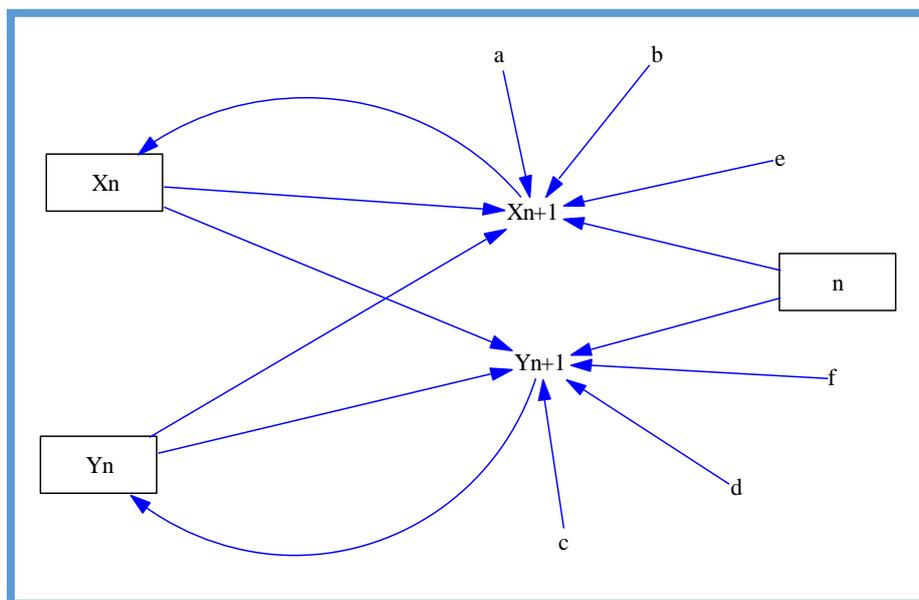


Figura 4.21: SEED cuadrático

Ejemplo 4.7: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID compuesto por un SEED de primer orden de dos sucesiones cuadráticas con coeficientes constantes y dos valores iniciales, uno de cada sucesión:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.06x_n - 0.025y_n - 0.0005x_ny_n - 0.025n + 5 \\ y_{n+1} = 0.02x_n + 0.4y_n + 0.002x_ny_n + 0.02n^2 - 0.01n - 3 \end{cases}$$

MODELOS MATEMATICOS COMPARTIMENTADOS

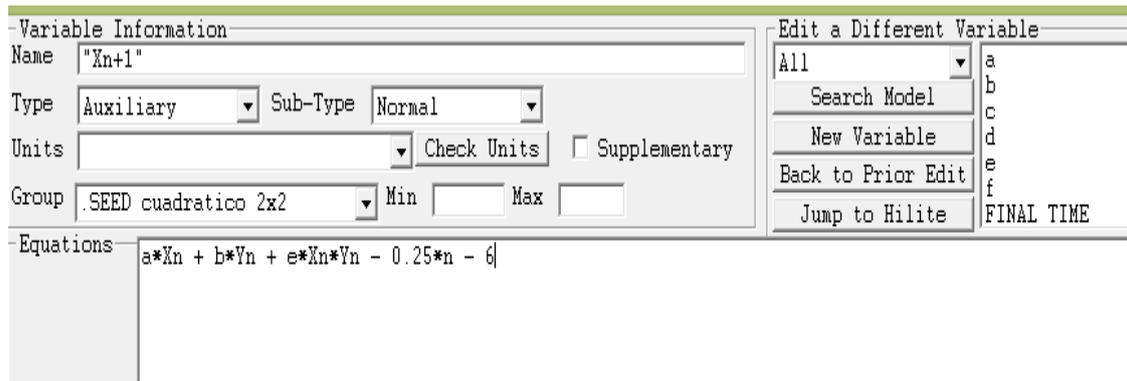


Figura 4.22: Determinación de la variable auxiliar de la primera sucesión

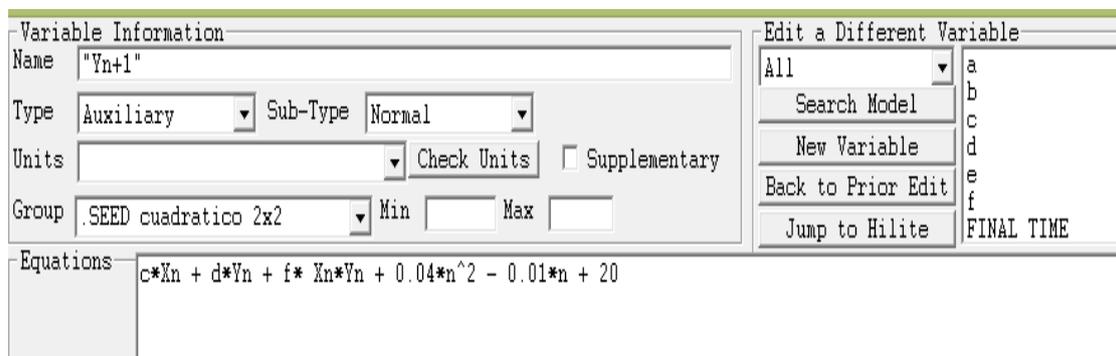


Figura 4.23: Determinación de la variable auxiliar de la segunda sucesión

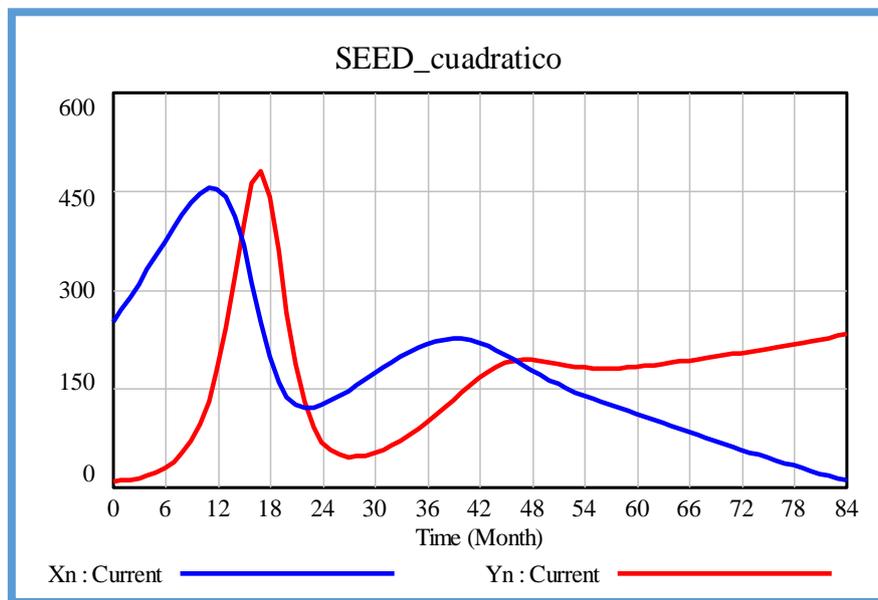


Figura 4.24: Comportamiento del SEED del ejemplo 4.7

4.7. SEED con tres ecuaciones simultáneas

Extendemos el SEED a tres o más ecuaciones con igual cantidad de sucesiones incógnitas. Además, tales sistemas pueden considerarse lineales o cuadráticos. Por lo tanto el SEED a considerar para el caso lineal con coeficientes constantes es:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + cz_n \\ y_{n+1} = dx_n + ey_n + fz_n \\ z_{n+1} = gx_n + hy_n + jz_n \end{cases}$$

El diagrama correspondiente para simular, es la figura 4.25:

Ejemplo 4.8: Ahora realicemos el desarrollo para un PVID compuesto por un SEED de primer orden lineal con tres sucesiones con coeficientes constantes y sus valores iniciales en cada sucesión:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.08x_n + 0.007y_n - 0.154z_n \\ y_{n+1} = 1.004x_n + 1.25y_n + 0.0006z_n \\ z_{n+1} = 0.09x_n + 0.0042y_n + 1.02z_n \end{cases}$$

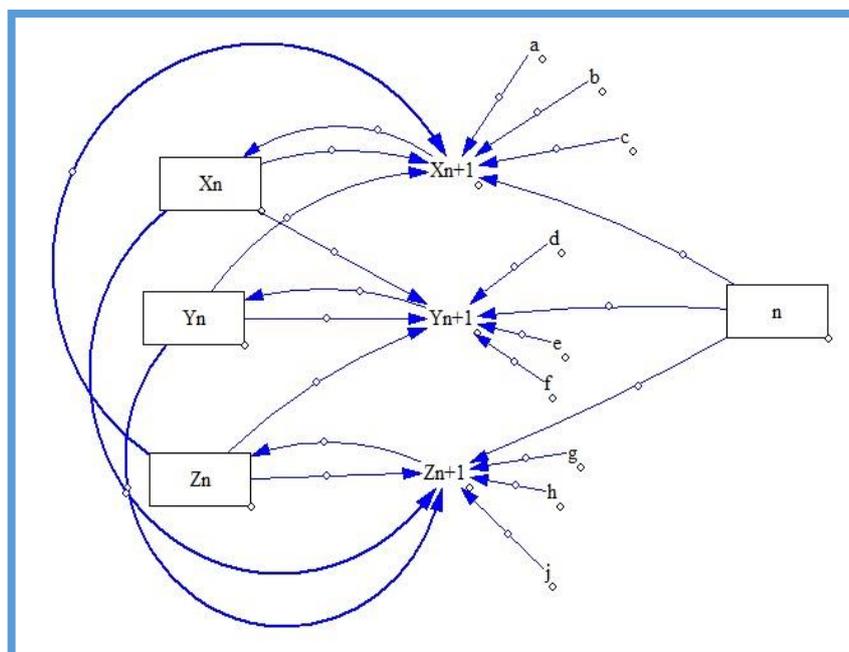


Figura 4.25: SEED lineal de tres ecuaciones con tres sucesiones

Con los valores iniciales: $x_0 = 200$, $y_0 = 120$ y $z_0 = 10$

Su comportamiento se ve en la figura 31.

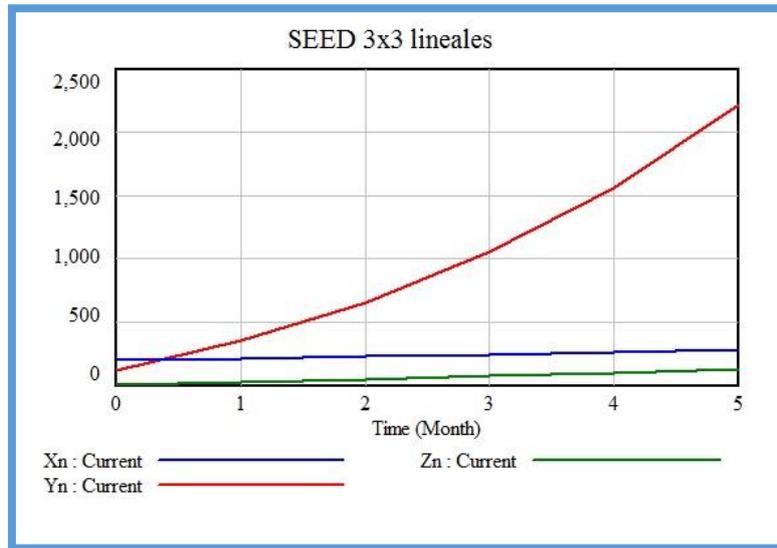


Figura 4.26: Comportamiento del SEED del ejemplo 4.8

4.8. Análisis Comparativo de EED

Una de las ventajas del VensimPle, es que podemos graficar dos o más EED para comparar, por eso al hacer variar los coeficientes de una misma EED.

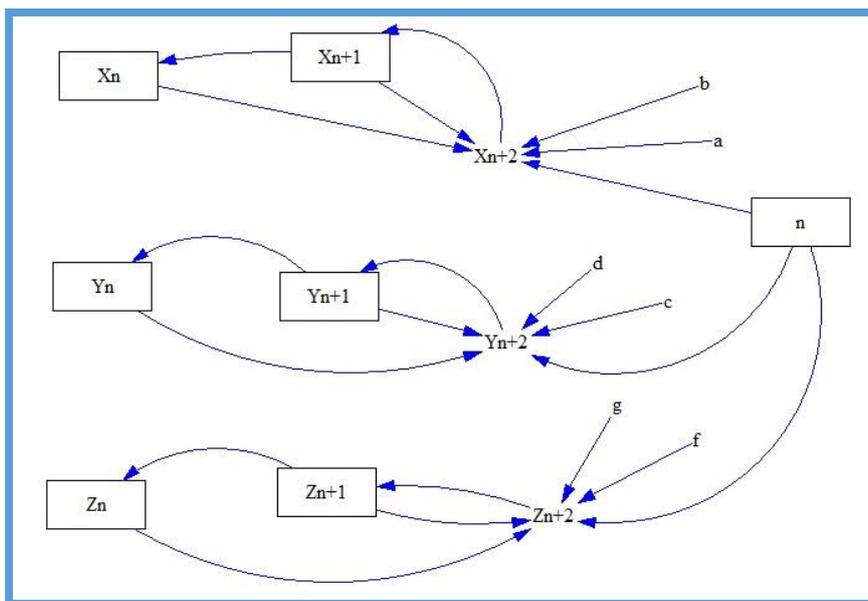


Figura 4.27: Tres EED de segundo orden lineales con diferentes coeficientes

En este caso tomamos tres EED de segundo orden lineal, por ello el modelo se expresa mediante el diagrama, tal de muestra en la figura 4.27:

Ejemplo 4.9: A partir de una EED lineal de segundo orden, se estudia en una sola simulación, tres variaciones de tal ecuación donde se varía ciertos coeficientes:

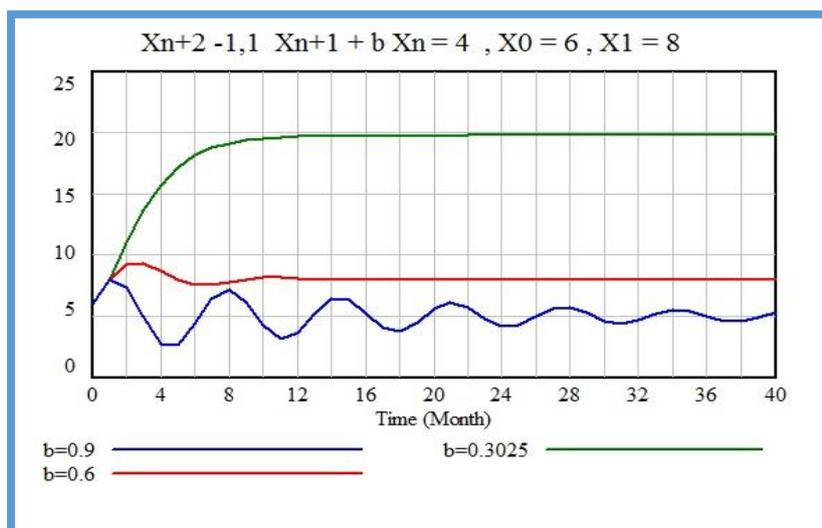


Figura 4.28: Simulación del modelo del ejemplo 4.9

Aplicación XXIII: Simulación de Modelo Epidemiológico

Recordemos la aplicación XXI, donde presentamos el modelo epidemiológico SIR, ahora realizaremos la simulación con VensimPle. Supongamos una población de tamaño S inicialmente sana, en la cual se introduce un cierto número I de infectados. El objeto de estudio de la mayor parte de estos modelos lo constituyen individuos, en un sentido figurado y matemáticamente tratable, vinculados con su entorno generalmente constituido por los vecinos más cercanos. La interacción con sus vecinos es modelada matemáticamente en forma abstracta y despojada de todo aspecto psicológico o social, y está asociada al hecho de que es la proximidad espacial entre dos individuos lo que hace más probable la transmisión de la enfermedad entre ellos, en caso de ser contagiosa.

Así, la distribución espacial determinará cuál es el grupo de individuos a los cuales un sujeto podrá transmitir o de los cuales podrá contagiarse la enfermedad. Existen modelos que contemplan individuos inmóviles, otros sujetos que migran desplazando la infección.

Durante el proceso infeccioso y dependiendo del tipo de enfermedad, los individuos pueden pasar por todos o algunos de los siguientes estadios:

- *Susceptibles* (S), estado en el cual el individuo puede ser contagiado por otro agente que esté infectado;
- *Infectado* (I), estado durante el cual el individuo se halla infectado y puede además infectar;
- *Removido* (R), o *Recuperado*, estado durante el cual el individuo no puede ni ser infectado por haber adquirido inmunidad (temporal o permanente) ni afectar (por haber recuperado o haber pasado la etapa contagiosa de la enfermedad).

El Modelo Epidemiológico susceptible-infectado-removido o SIR se describe de la siguiente manera, está relacionado con las enfermedades que confieren inmunidad permanente y un ciclo típico incluye los tres estadios. Esto no quiere decir que todos los individuos de una población deban pasar por estos, algunos no serán infectados y permanecerán sanos, o sea siempre en estado S, otros serán inmunizados artificialmente por vacunación, o algún otro método y pasarán a ser R sin haber estado infectados. Es justamente el interés del modelo tener en cuenta todas estas posibilidades y tratar de predecir el comportamiento de una epidemia.

Consideraremos el modelo SIR y usaremos el modelo discreto de Kermack y Mc Kendrick, que es uno de los más elementales de la Teoría Epidemiológica, y que se expresa como:

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t - cS_t I_t \\ I_{t+1} = I_t + cS_t I_t - rI_t \\ R_{t+1} = R_t + rI_t \end{cases}$$

Donde S es la población susceptible a enfermar, I la población infectada y R la población que se ha recuperado de la enfermedad. Además existen dos constantes que son las tasas de infección o contagio y la de recuperación. Además algunas suposiciones previas a fin de simplificar el problema, por ejemplo, de que un enfermo, una vez recuperado, ya no contraerá la enfermedad, y que una vez tratado y aislado para su recuperación, no contagiará. Nos tomaremos la libertad de imaginar que no hay muertos,

y a los efectos de este modelo no tendremos en cuenta las variaciones de población debida a otros factores, viajes, nacimientos, o sea, una población cerrada.

El modelo bajo Dinámica de Sistema tiene el siguiente diagrama para simularlo en VensimPle:

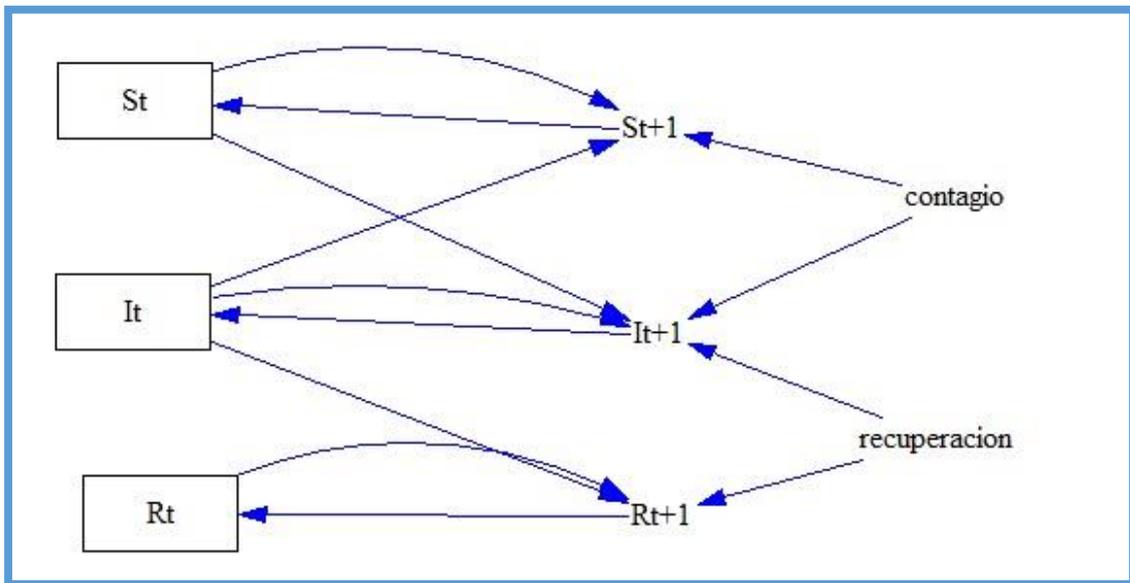


Figura 4.29: Modelo SIR de Kermack y Mc Kendrick

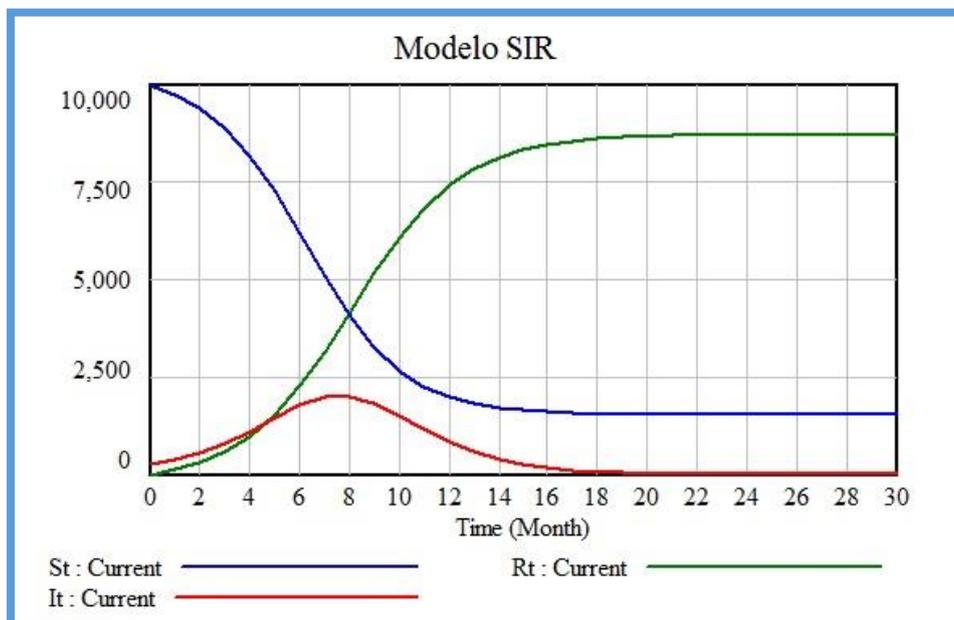


Figura 4.30: Simulación del Modelo SIR según datos propuestos

Una vez definidos todos los elementos que intervienen, el paso siguiente es hacer correr el modelo, esto se expresa en términos actuales diciendo que se efectúa la simulación del modelo. A tal efecto se muestra a continuación las simulaciones obtenidas con el

simulador VensimPle, para una población inicial de 10.000 susceptibles, 250 enfermos, ningún recuperado y con tasas de contagio de 0,0001 y de recuperación 0,5.

4.9. EED con Coeficiente Variable

Hasta aquí hemos realizado el estudio de las EED con coeficiente constante. Así estaba acotada la propuesta del estudio de las EED, por ello usando Vensim nos permitió plantear las EED con coeficiente variable. Esto es, utilizar como coeficientes formas polinómicas en la variable de la EED. Así se planteó la forma lineal, cuadrática y cubica. También se ha planteado la forma racional, exponencial, logarítmica, y dentro de las funciones trigonométricas, seno, coseno y una combinación lineal de ellas. Veamos en forma gradual algunas propuestas, con ejemplos.

4.9.1. Forma lineal del coeficiente

Planteamos el siguiente PVID con una EED de primer orden con coeficiente polinómico de primer grado en n . Esto es:

$$\begin{cases} x_{n+1} - (pn + q)x_n & = b \\ x_0 & = X_0 \end{cases}$$

Para este caso el modelo en VensimPle está dado por el diagrama, figura 4.31:

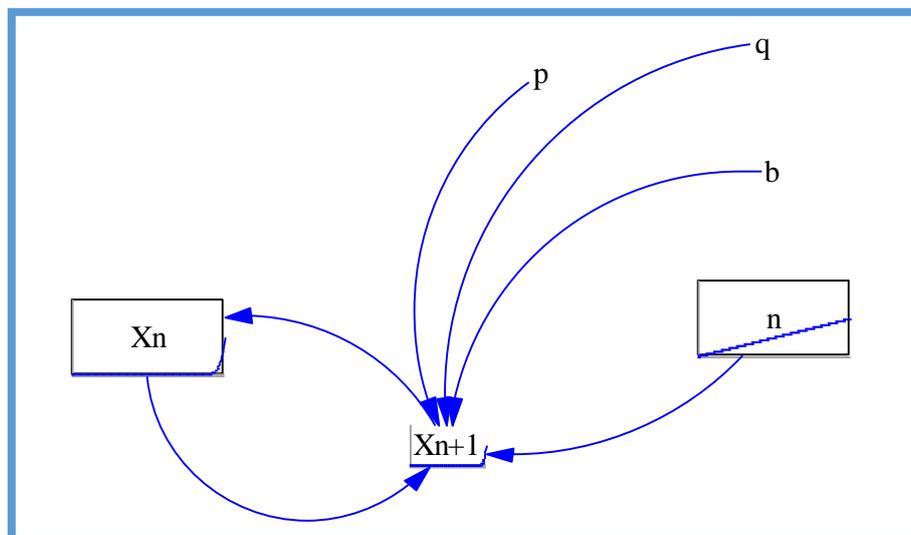


Figura 4.31: Modelo del PVID de primer orden con coeficiente polinómico de primer grado

La variable no acumulable X_{n+1} se la define de la siguiente manera, figura 4.32.

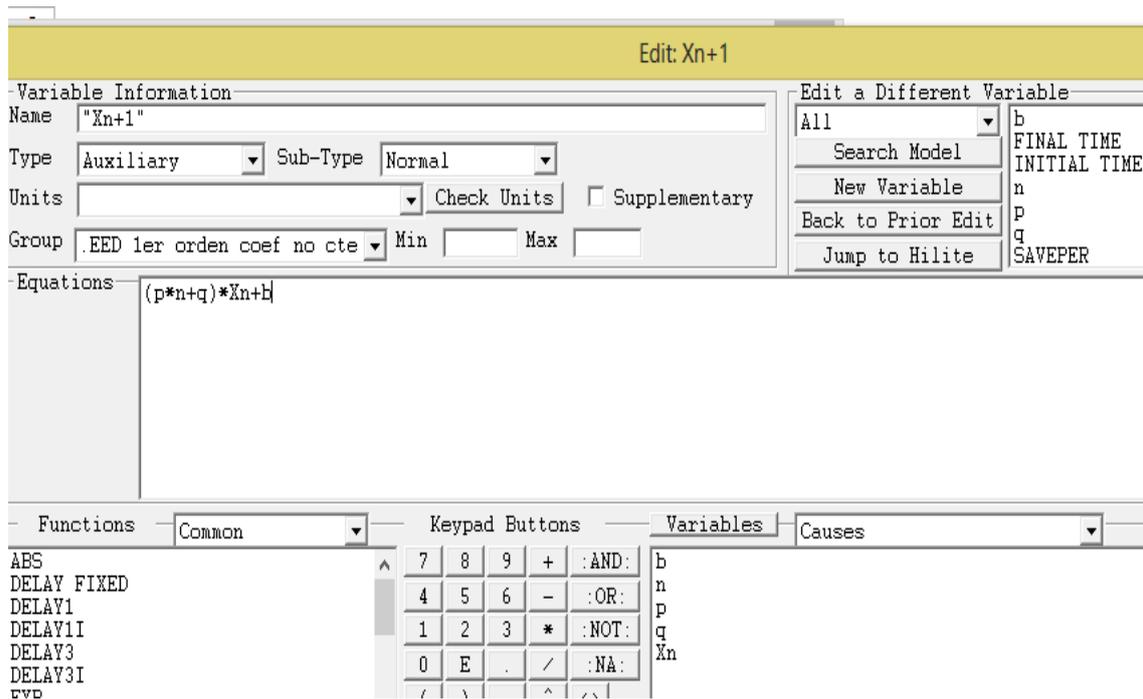


Figura 4.32: Definición de la variable no acumulable X_{n+1}

Ejemplo 4.10: Hallar los primeros valores de la sucesión solución del PVID siguiente:

$$\begin{cases} x_{n+1} - (0,02n - 0,5)x_n = 2 \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

Aplicando el modelo con los valores dados, resulta para los primeros 30 valores, la gráfica de la figura 4.33.

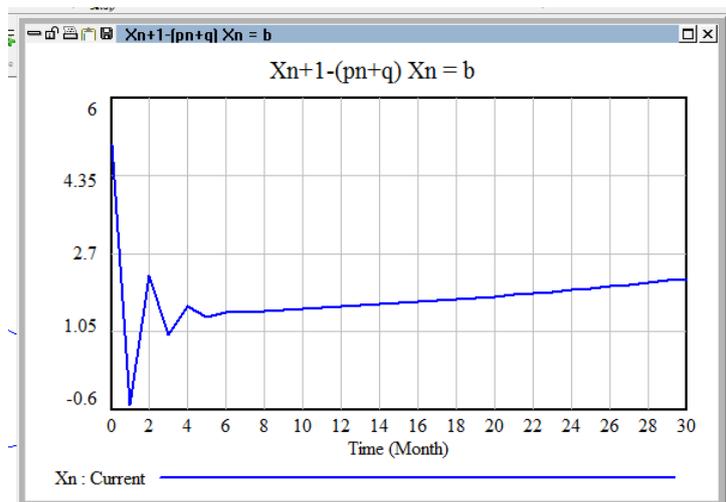


Figura 4.33: Comportamiento del PVID del ejemplo 4.10

Podemos desear conocer valores de la sucesión, para lo cual tenemos la tabla de la figura 4.34.

Time (Month)	"Xn"	Runs: Xn
0	Current	5
1		-0.5
2		2.24
3		0.9696
4		1.57338
5		1.33918
6		1.46433
7		1.44356
8		1.48032
9		1.49669
10		1.52106
11		1.54368
12		1.56777
13		1.59238
14		1.61783
15		1.64408
16		1.67118
17		1.69919
18		1.72813
19		1.75806
20		1.78903
21		1.8211
22		1.85431
23		1.88874
24		1.92445
25		1.96151
26		2
27		2.04
28		2.0816
29		2.1249

Figura 4.34: Tabla de los primeros términos de la sucesión del ejemplo 4.10

4.9.2. Forma Cuadrática del Coeficiente

Ahora tomemos un polinomio de segundo grado como coeficiente, esto es:

$$\begin{cases} x_{n+1} - (pn^2 + qn + r)x_n & = b \\ x_0 & = X_0 \end{cases}$$

Para este caso el modelo en VensimPle está dado por el diagrama de la figura 4.35:

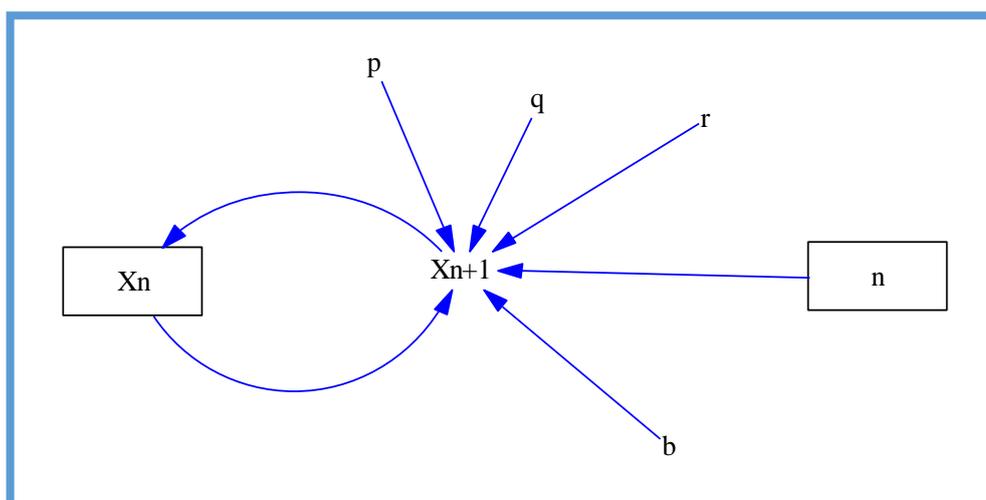


Figura 4.35: Diagrama del modelo cuadrático en el coeficiente

Ejemplo 4.11: hallar los primeros términos de la sucesión que satisface el PVID siguiente:

$$\begin{cases} x_{n+1} - (0,02n^2 - 0,05n + 0,4)x_n = 4 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

La simulación nos muestra los primeros términos de la sucesión que satisface el PVID del ejemplo 4.11, ver figura 4.36.

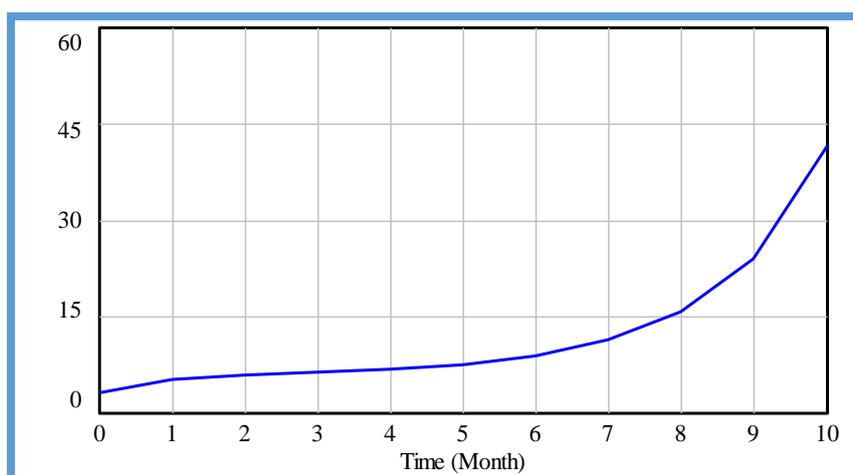


Figura 4.36: Grafica de los primeros términos de la solución del ejemplo 4.11

Los valores numéricos de estos términos de la sucesión que satisface el ejemplo 4.11, pueden verse en la tabla de la figura 4.37.

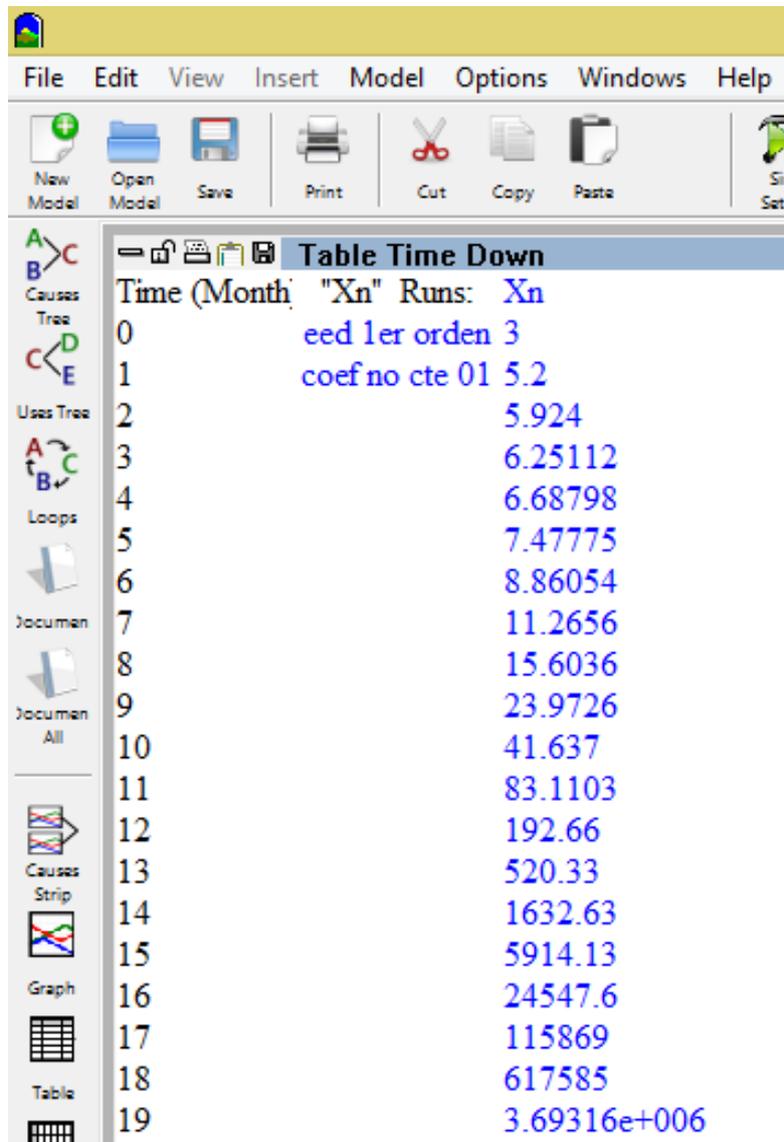


Figura 4.37: Valor numéricos de los términos de la solución del PVID del ejemplo 4.11

4.9.3. Las Funciones seno y coseno en el Coeficiente

Podríamos ahora tomar coeficientes de la forma seno de la variable n , esto es:

$$\begin{cases} x_{n+1} - (\text{sen } pn)x_n & = b \\ x_0 & = X_0 \end{cases}$$

El modelo se expresa en la figura 4.38:

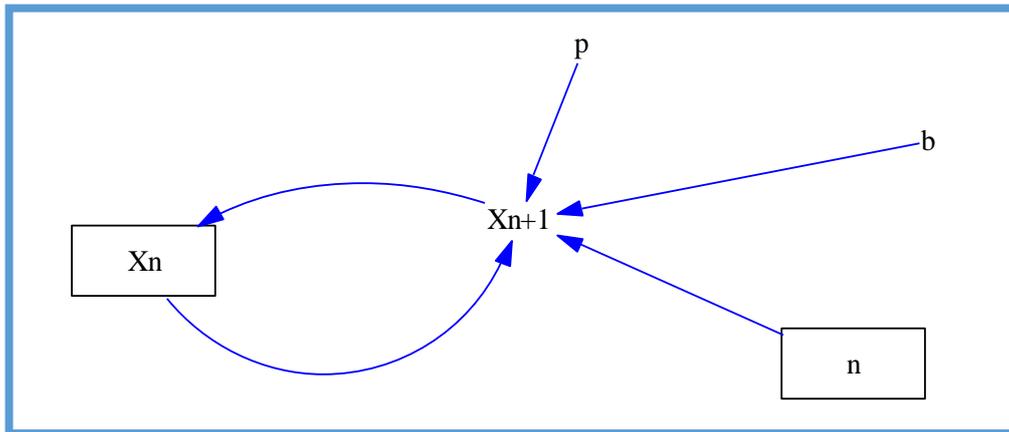


Figura 4.38: Modelo de coeficiente con la función seno

Ejemplo 4.12: Hallar términos de la solución del PVID dado por:

$$\begin{cases} x_{n+1} - (\text{sen } 0.2n)x_n = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Los primeros términos de la sucesión se muestran en la figura 4.39:

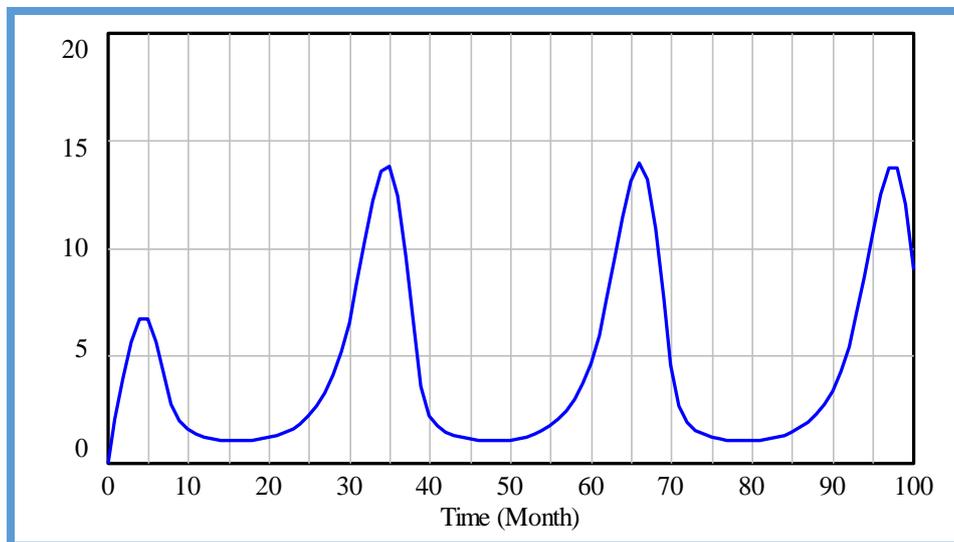


Figura 4.39: primeros términos de la sucesión del ejemplo 4.11

Con el mismo diagrama se modela el PVID cuyo coeficiente contiene la función coseno, cambiando la función al definir la variable.

Ejemplo 4.13: Hallar términos de la solución del PVID dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} - (\cos 0.2n)x_n & = 2 \\ x_0 & = 0 \end{cases}$$

Los primeros términos de la sucesión se muestran en la figura 4.40:

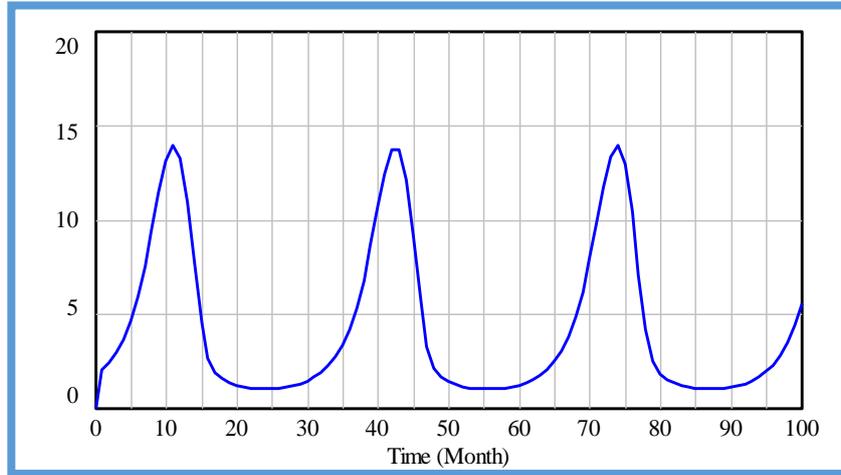


Figura 4.40: primeros términos de la sucesión del ejemplo 4.12

Presentamos por ultimo como coeficiente a una combinación lineal de las últimas expresiones, es decir conteniendo las funciones seno y coseno. Esto es:

$$\begin{cases} x_{n+1} - (\text{sen } pn + \text{cos } qn)x_n & = b \\ x_0 & = X_0 \end{cases}$$

En este caso la combinación lineal del coeficiente se logra con el modelo de la figura 4.41:

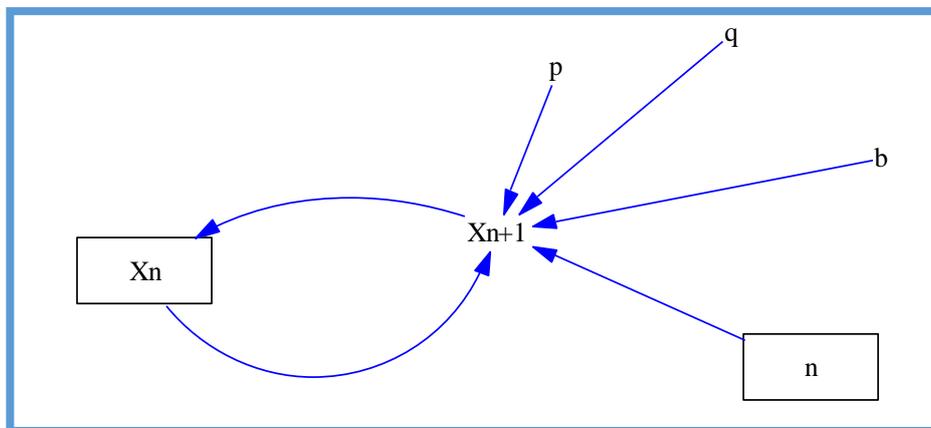


Figura 4.41: Modelo del PVID con coeficiente dado por una combinación lineal de las funciones seno y coseno

Ejemplo 4.14: Hallar términos de la solución del PVID dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} - (\text{sen } 0,5n + \text{cos } 0,8n)x_n & = 1 \\ x_0 & = 1 \end{cases}$$

Los primeros términos de la sucesión se muestran en la figura 4.42:

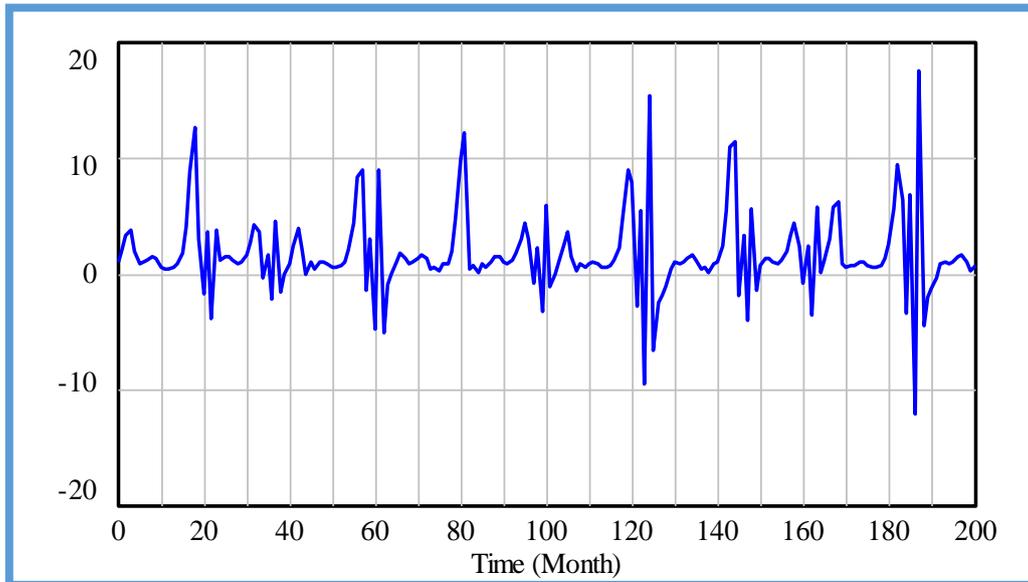


Figura 4.42: Solución del PVID del ejemplo 4.14

**CAPÍTULO 5:
AJUSTES DE DATOS
EXPERIMENTALES**

**Silvia Inés del V. Navarro
Gustavo A. Juarez**

5.1. Ajuste de Datos Experimentales a Curvas

Hasta aquí nos hemos referido a los modelos matemáticos como una representación de fenómenos de la realidad. Tales fenómenos son el estudio de las Ciencias Experimentales, en donde los datos experimentales que provienen de distintas áreas de conocimientos pretenden ser analizadas bajo ciertos patrones que permitan llegar a establecer relaciones directas entre los resultados obtenidos y las variables que intervienen. De ésta manera este análisis consiste en obtener un modelo matemático que relacione dos o más magnitudes variables a partir de registros de las observaciones experimentales.

Generalmente en las investigaciones experimentales no es posible deducir una relación funcional exacta entre las variables, debido a que la dependencia perfecta no existe en la Naturaleza.

Por ello se plantea una dependencia aproximada entre las variables, para lo cual se debe cuantificar, o sea aproximar tanto como sea posible a funciones tradicionales. La dependencia es la denominada *correlación*, que determinará si la relación funcional es buena o si resultan independientes.

Para lograr establecer si existe la correlación entre las variables observadas, sean estas x e y , el paso siguiente es determinar una relación funcional $y = f(x)$, que señale la correlación aproximada. De ésta manera se establece un *modelo matemático* que por sus características se denomina *función de regresión*, pudiendo ser de tipo lineal, cuadrática o parabólica, polinómica de mayor grado, exponencial, logarítmica, racional, etc., dependiendo de la expresión funcional que vincule a las variables.

Dentro de los métodos de ajuste de curvas se halla el *Método de Mínimos Cuadrados* (en adelante MMC) el cual presentaremos a continuación junto a coeficientes que estiman tipos de errores de aproximación, todo ello con conceptos estadísticos mínimos.

5.2. Parámetros de Ajustes

Sean N puntos obtenidos en forma experimental $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$. Algunos parámetros estadísticos que surgen a los efectos de representar a los N puntos dados son:

- *Medidas de tendencia central:* son aquellos parámetros puntuales que representan a los datos a través de un valor central, entre ellos el más representativo son las *medias aritméticas* de las variables, indicadas por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

- *Medidas de dispersión:* son aquellas que indican el grado de separación que tienen los datos respecto de la medida de tendencia central. Entre ellas tenemos la *varianza* y la *desviación estándar* o *típica* de las variables.

- **Varianza:**

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - \bar{y}^2$$

- **Desviación estándar:**

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N}}$$

Una primera relación entre las dos variables aparece al definir la **covarianza** entre tales variables:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y}$$

Así la covarianza mide la *interdependencia* entre ambas variables, indicando que, siempre que no sea nula, existe interdependencia, si es positiva es porque ambas se incrementan al mismo tiempo o decrecen al mismo tiempo, mientras que si es negativa implica que a medida que una crece la otra decrece. El valor nulo de la covarianza significa que las variables son estocásticamente independientes.

Por un lado este parámetro es dimensional, y por otro su magnitud absoluta no indica si el grado de dependencia entre las variables es elevado o no. Para salvar este inconveniente se introduce el coeficiente de correlación lineal entre x e y , de la forma:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Con esto, r es una medida abstracta del grado de interdependencia lineal entre las variables, es decir, es un coeficiente adimensional, de igual signo de la covarianza, y que satisface $-1 \leq r \leq 1$.

Con valores próximos a los extremos se tiene una buena interdependencia, positiva o negativa, y con el valor próximo al nulo, se tiene una ausencia de interdependencia.

5.3. Método de Mínimos Cuadrados

Siendo los N puntos obtenidos en forma experimental $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_N, y_N)$. Se desea aproximar a una curva de manera que pueda conocerse la ecuación de la mejor curva a la que se aproximan los puntos anteriores.

Usaremos el conocido *método de mínimos cuadrados* para obtener la curva estimada. Presentaremos el método en forma gradual, inicialmente tomaremos una recta como la curva a la que se aproxima. El método de mínimos cuadrados es un método de optimización que consiste en minimizar el cuadrado de las diferencias entre las ordenadas de los puntos obtenidos experimentalmente y las ordenadas de puntos de la curva estimada que satisfacen una ecuación.

Así por ejemplo, las distancias entre las ordenadas asociadas a la abscisa x_i son y_i observadas y \hat{y}_i calculada, es $d_i = |y_i - \hat{y}_i|$. El motivo del valor absoluto es porque se puede anular la suma para todos los puntos del método. Así pues la suma se realizara sobre el cuadrado de las diferencias anteriores, como una forma de eludir los valores absolutos, y se tiene:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Minimizar la suma se logra con la derivada de la suma respecto de los parámetros de la curva estimada. Veamos esto gráficamente:

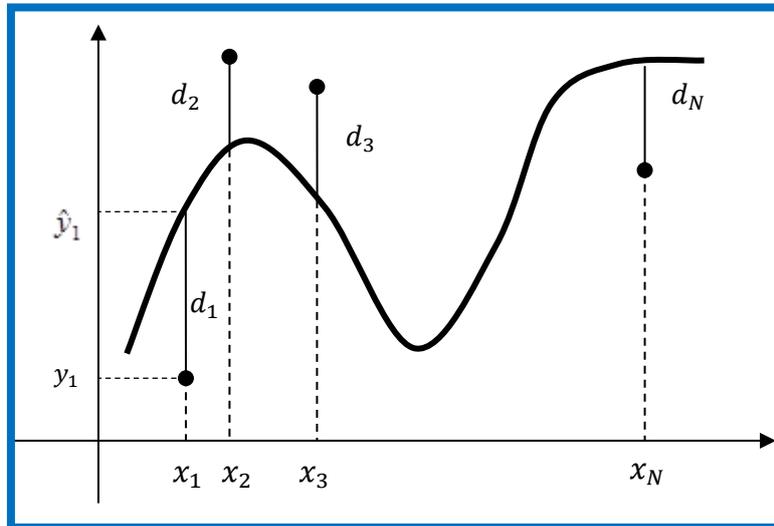


Figura 5.1. Método de Mínimos Cuadrados

Una medida de la precisión del ajuste realizado es el denominado **error típico** o **error estándar**, definido por:

$$\varepsilon_t(f) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N}} \quad \text{Donde } \hat{y}_i = f(x_i)$$

Con tal medida, podemos decidir entre dos o más funciones cuál es la que mejor se ajusta ante la serie de datos experimentales, calculando el error típico asociado a cada función, y elegir el menor como el que pertenece a la función óptima de ajuste.

5.4. Ajuste de Modelos Lineales

La recta estimada estará formada por puntos de coordenadas x_i , correspondientes a los puntos dados, e \hat{y}_i calculados según la ecuación de la recta estimada, de acuerdo al Método de Mínimos Cuadrados. Tal método consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre las coordenadas observadas y las coordenadas calculadas.

Tomando los puntos observados (x_i, y_i) y los estimados (x_i, \hat{y}_i) , se pretende minimizar la suma:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad \text{Donde: } \hat{y}_i = ax_i + b$$

Siendo a y b los coeficientes a determinar.

O sea que reemplazando, $S = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$

Minimizar tal expresión, es anular la derivada de S respecto de las variables a y b .

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)(-x_i) = -2 \sum_{i=1}^N (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)(-1) = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) = 0$$

De estas expresiones se obtienen.

$$\sum_{i=1}^N (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0$$

y

$$\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) = 0$$

Desarrollando, nos queda:

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i - a \sum_{i=1}^N x_i^2 - b \sum_{i=1}^N x_i = 0$$

y

$$\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i - bN = 0$$

Resultando un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i + bN = \sum_{i=1}^N y_i \end{cases}$$

Conocidos a y b se determina la recta estimada $\hat{y}_i = ax_i + b$ que modela linealmente los datos.

Ejemplo 5.1: El consumo semanal de un cierto cereal y un determinado jugo natural fue observado en diez niños de edad escolar. Obtenga una relación funcional lineal entre estos datos que exprese una correlación entre el número de productos consumidos.

Los datos del problema, que se expresan como pares ordenados:

$(1,3); (2,2); (2,3); (2,4); (3,4); (3,5); (4,5); (4,6); (5,5); (5,7)$ pueden representarse por puntos en el plano. Buscamos la recta estimada por el MMC.

Solución: Se construye la tabla para calcular los coeficientes del SEL.:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	3	1	3
2	2	2	4	4
3	2	3	4	6
4	2	4	4	8
5	3	4	9	12
6	3	5	9	15
7	4	5	16	20
8	4	6	16	24
9	5	5	25	25
10	5	7	25	35
Σ	31	44	113	152

Así el SEL es:
$$\begin{cases} 113a + 31b = 152 \\ 31a + 10b = 44 \end{cases}$$

Siendo la solución: $b = 1,538461538$ y $a = 0,92307692$

La ecuación de la recta estimada es: $\hat{y} = 0,92307692 x + 1,538461538$

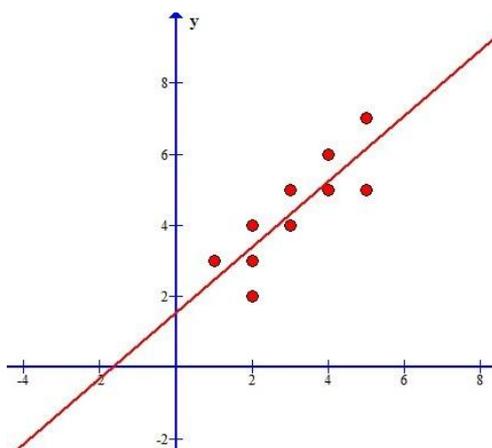


Figura 5.2: Datos experimentales y la recta de ajuste del ejemplo 5.1

Ahora procuramos estudiar la efectividad de la curva hallada, para ello calculamos el *error*, confeccionando previamente una tabla de cálculo.

i	x_i	y_i	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	1	3	2,461538	0,289941
2	2	2	3,384654	1,917267
3	2	3	3,384654	0,147959
4	2	4	3,384654	0,378651
5	3	4	4,307692	0,094674
6	3	5	4,307692	0,692308
7	4	5	5,230769	0,053254
8	4	6	5,230769	0,591716
9	5	5	6,153846	1,331360
10	5	7	6,153846	0,715977
Σ	31	44		6,213107

El *error típico* es $\varepsilon_i(f) = \sqrt{\frac{6,213107}{10}} = 0,788232$.

La *varianza residual* $\varepsilon_i^2(f) = 0,62131$.

Por otro lado podemos buscar la correlación entre las variables, según el coeficiente r de la siguiente manera:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Para ello completamos la siguiente tabla, a fin de hallar los términos que necesitamos:

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	1	3	-2,1	4,41	-1,4	1,96	2,94
2	2	2	-1,1	1,21	-2,4	5,76	2,64
3	2	3	-1,1	1,21	-1,4	1,96	1,54
4	2	4	-1,1	1,21	-0,4	0,16	0,44
5	3	4	-0,1	0,01	-0,4	0,16	0,44
6	3	5	-0,1	0,01	0,6	0,36	-0,06
7	4	5	0,9	0,81	0,6	0,36	0,54
8	4	6	0,9	0,81	1,6	2,56	1,44
9	5	5	1,9	3,61	0,6	0,36	1,14
10	5	7	1,9	3,61	2,6	6,76	4,94
Σ	31	44		16,9		20,4	16

Por lo tanto $r = \frac{16}{\sqrt{16,9 \times 20,4}} = 0,861708$, es decir la correlación es muy buena.

5.5. Ajuste de Modelos Cuadráticos

Ahora supongamos que los puntos se ubican en el plano más próximos a una parábola que a una recta. Así pues la estimación que realizaremos no será a una recta, sino a una parábola de la forma $\hat{y} = ax^2 + bx + c$.

La suma de los cuadrados de las diferencias que debemos minimizar es:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

Derivando respecto a cada parámetro, a, b y c .

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i^2) = -2 \sum_{i=1}^N (x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i) = -2 \sum_{i=1}^N (x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-1) = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0$$

Desarrollando cada una de ellas y ordenando se tiene:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^N x_i^4 + b \sum_{i=1}^N x_i^3 + c \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i^3 + b \sum_{i=1}^N x_i^2 + c \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i + cN = \sum_{i=1}^N y_i \end{cases}$$

Ejemplo 5.2: El consumo en miligramos de una determinada vitamina en diez niños de edad entre 0 a 6 años a lo largo de la temporada invernal se da en los siguientes datos.

Determine la curva de ajuste de los mismos por el MMC.

Los datos son (0,2); (1,3); (2,4); (3,5); (4,6); (5,5); (5,4); (5,3); (6,4); (6,3)

Solución: Se construye la tabla para calcular los coeficientes del SEL.:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0	2	0	0	0	0	0
2	1	3	1	1	1	3	3
3	2	4	4	8	16	8	16
4	3	5	9	27	81	15	45
5	4	6	16	64	256	24	96
6	5	5	25	125	625	25	125
7	5	4	25	125	625	20	100
8	5	3	25	125	625	15	75
9	6	4	36	216	1296	24	144
10	6	3	36	216	1296	18	108
Σ	37	39	177	907	4821	152	712

$$\text{Así el SEL es: } \begin{cases} 4821a + 907b + 177c = 712 \\ 907a + 177b + 37c = 152 \\ 177a + 37b + 10c = 39 \end{cases}$$

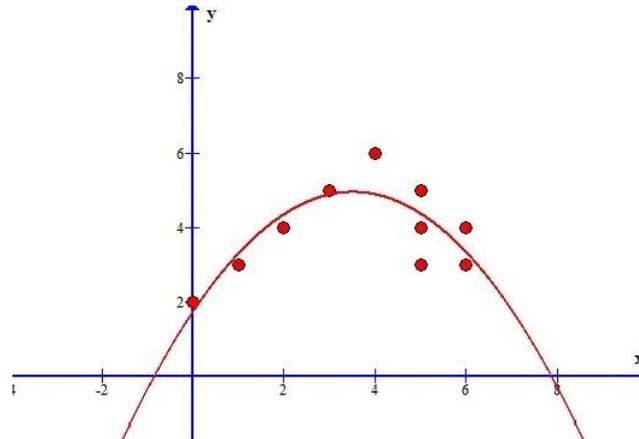


Figura 5.3: Datos experimentales y la recta de ajuste del ejemplo 5.2

Siendo la solución: $c = 1,75033829$, $b = 1,819012078$ y $a = -0,2587956698$

La ecuación de la parábola estimada es:

$$\hat{y} = -0,2587956698x^2 + 1,819012078x + 1,75033829$$

Procuramos estudiar la efectividad de la curva hallada, para ello calculamos el error, confeccionando previamente una tabla de cálculo.

i	x_i	y_i	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	0	2	1,750338	0,062331
2	1	3	3,310554	0,096444
3	2	4	4,353178	0,124735
4	3	5	4,878210	0,014832
5	4	6	4,885650	1,241776
6	5	5	4,375498	0,390003
7	5	4	4,375498	0,140999
8	5	3	4,375498	1,891995
9	6	4	3,347754	0,425425
10	6	3	3,347754	0,120933
Σ	37	39		4,509473

El error típico es $\varepsilon_i(f) = \sqrt{\frac{4,509473}{10}} = 0,671526$

La varianza residual $\varepsilon_i^2(f) = 0,4509473$

5.6. Ajuste de Modelos Exponenciales

Si la función a la que se pretende estimar, tiende según la ubicación de los datos obtenidos a una exponencial $y = be^{ax}$, se tendría que derivar respecto de los parámetros desconocidos la expresión:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - be^{ax_i})^2$$

Debido a lo poco práctico que resulta la derivada anterior, conviene tratar con una transformación de las ordenadas, en tal caso hacemos:

$$z_i = \ln y_i \quad y \quad \hat{z}_i = \ln \hat{y}_i = \ln(b e^{ax_i}) = \ln b + ax_i = B + ax_i$$

Con lo cual la suma ahora la indicamos:

$$S = \sum_{i=1}^N (z_i - ax_i - B)^2$$

Toma la forma de la recta ya tratada al comienzo. En consecuencia el SEL es:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^N x_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i z_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i + BN = \sum_{i=1}^N z_i \end{cases}$$

Con a y B calculados se halla b mediante $b = e^B$, para determinar la curva estimada.

Ejemplo 5.3: El número de bacterias, expresado en miles, a lo largo de los primeros cinco minutos en diez muestras son:

$$(1,1); (2,3); (2,4); (3,4); (3,6); (3,7); (4,7); (4,8); (5,10); (5,12)$$

Hallar la curva exponencial estimada por el MMC.

Solución: Se construye la tabla para calcular los coeficientes del SEL.:

i	x_i	y_i	x_i^2	$z_i = \ln y_i$	$x_i z_i$
1	1	1	1	0	0
2	2	3	4	1,0986	2,1972
3	2	4	4	1,3863	2,7726
4	3	4	9	1,3863	4,1589
5	3	6	9	1,7918	5,3754
6	3	7	9	1,9459	5,8377
7	4	7	16	1,9459	7,7836
8	4	8	16	2,0794	8,3176
9	5	10	25	2,3026	11,513
10	5	12	25	2,4849	12,4245
Σ	32	62	118	16,4217	60,3805

Así el SEL es: $\begin{cases} 118a + 32B = 60,3805 \\ 32a + 10B = 16,4217 \end{cases}$

Siendo la solución: $B = 0,03579871794$ y $a = 0,5019910256$

En consecuencia:

$$b = e^{0,0357987194} = 1,036447207$$

La ecuación de la curva exponencial estimada es $\hat{y} = 1,036447207e^{0,5019910256x}$

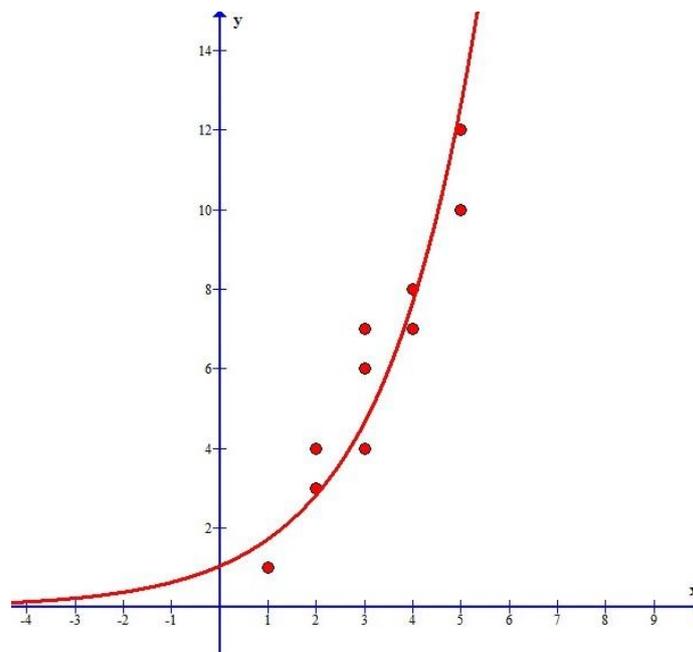


Figura 5.4: Datos experimentales y la curva de ajuste del ejemplo 5.3

Estudiamos ahora la efectividad de la curva hallada, para ello calculamos el error y el coeficiente de covarianza, confeccionando previamente una tabla de cálculo.

i	x_i	y_i	y_i^2	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	1	1	1	1,550454	0,303000
2	2	3	9	2,657692	0,117175
3	2	4	16	2,657692	1,801791
4	3	4	16	4,555694	0,308796
5	3	6	36	4,555694	2,086020
6	3	7	49	4,555694	5,974632
7	4	7	49	7,809009	0,654496
8	4	8	64	7,809009	0,036478
9	5	10	100	13,385715	11,463066
10	5	12	144	13,385715	1,920206
Σ	32	62	484		24,665660

Siendo $\bar{y} = 6,2$ se tiene $\bar{y}^2 = 38,44$ y $\sigma_y^2 = \frac{484}{10} - 38,44 = 9,96$

Además el error típico es: $\varepsilon_i(f) = \sqrt{\frac{24,66566}{10}} = 1,5705305$

La varianza residual: $\varepsilon_i^2(f) = 2,466566$

El coeficiente de correlación lineal se obtiene de las variables donde se aplicó el ajuste lineal, o sea entre x y z , es así como:

i	x_i	z_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$z_i - \bar{z}$	$(z_i - \bar{z})^2$	$(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$
1	1	0	-2,2	4,84	-1,64217	2,696722	3,612774
2	2	1,0986	-1,2	1,44	-0,54357	0,295468	0,652284
3	2	1,3863	-1,2	1,44	-0,25587	0,065469	0,307044
4	3	1,3863	-1,1	1,21	-0,25587	0,065469	0,281257
5	3	1,7918	-0,2	0,04	0,14963	0,022389	-0,029926
6	3	1,9459	-0,2	0,04	0,30373	0,092252	-0,060746
7	4	1,9459	0,8	0,64	0,30373	0,092252	0,242984
8	4	2,0794	0,8	0,64	0,43723	0,191170	0,349784
9	5	2,3026	1,8	3,24	0,66043	0,436168	1,188774
10	5	2,4849	1,8	3,24	0,84273	0,710194	1,516914
Σ	32	16,4217		16,77		4,667553	8,061143

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{z})^2}} = \frac{8,061143}{\sqrt{16,77} \sqrt{4,667553}} = \frac{8,061143}{4,095119 * 2,160452}$$

$$r = 0,9111408$$

Con lo cual $r = 0,9111408$ o sea muy próximo a 1, en consecuencia la correlación es positiva.

Para éste tipo de modelos es adecuado usar escala logarítmica o bien el papel semilogaritmico, para ello se sugiere ver anexo al final del presente trabajo.

5.7. Ajuste de Modelo Geométrico

Los modelos geométricos son dados por funciones potenciales:

$$y(x) = bx^a \quad \text{Con } a > 0, b > 0.$$

El ajuste de parámetros puede ser efectuado mediante ajuste lineal, con los siguientes cambios de variables: $Y = \ln y$; $X = \ln x$

Así la función potencia puede ser escrita como:

$$\ln y = \ln(bx^a) = \ln b + \ln(x^a) = \ln b + a \ln x = B + aX$$

y por lo tanto, las nuevas variables están dadas por:

$$Y = aX + B$$

donde $B = \ln b \Leftrightarrow b = e^B$

Ejemplo 5.4: Dados los datos del tamaño y peso de la Tilapia ajustemos a una recta y grafiquemos en un gráfico tipo log/log, es decir, en donde la escala logarítmica está en ambos ejes.

Solución: Se construye la tabla para calcular los coeficientes del SEL.:

i	Tamaño (x_i)	Peso (y_i)	$X = \ln x_i$	$Y = \ln y_i$
0	11	26	2.39789527	3.25809654
1	15	59.5	2.70805020	4.08597631
2	17.4	105.4	2.85647021	4.65776264
3	20.6	200.2	3.02529108	5.29931687
4	22.7	239.5	3.12236492	5.47855342
5	25.3	361.2	3.23080440	5.88943182
6	27.4	419.8	3.31054301	6.03977841
7	28.2	475.4	3.33932198	6.16415655
8	29.3	488.2	3.37758752	6.19072516
Σ				

Con estos valores de las nuevas variables se realiza el ajuste lineal.

Con ello es SEL a resolver es:

$$\begin{cases} 84.101369319a + 27.36832859B = 145.83675047 \\ 27.36832859a + 9B = 47.06379772 \end{cases}$$

La recta auxiliar que se obtiene es este ajuste es: $Y = 3.103X - 4.2067$

La curva ajustada se puede graficar en un log/log, a partir de la recta auxiliar.

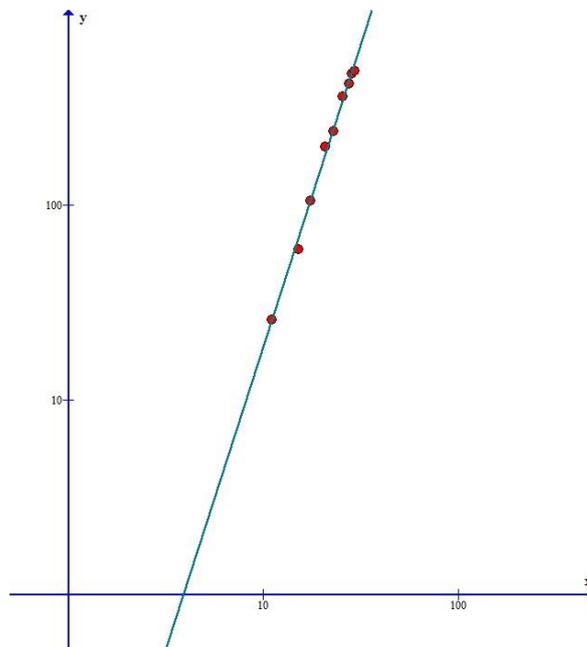


Figura 5.5: Datos experimentales y la recta de ajuste del ejemplo 5.4

En consecuencia la función potencia ajustada está dada por: $y(x) = 0.0149x^{3.103}$

Esta curva de ajuste junto a los datos se presenta a continuación:

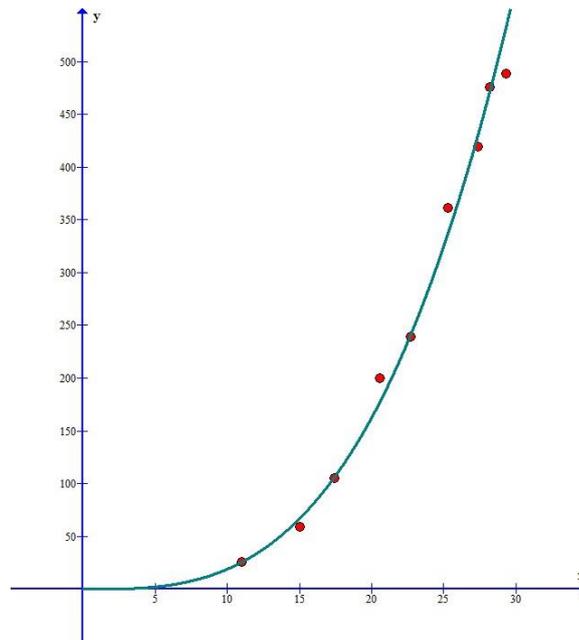


Figura 5.6: Datos experimentales y la curva de ajuste del ejemplo 5.4

Los modelos geométricos son frecuentes formulaciones de la *Ley de Alometría*, muy usada en Biología: “*las tasas de crecimiento específico de órganos de un mismo individuo son proporcionales*”.

5.8. Ajuste Lineal de Modelos Hiperbólicos

Los modelos hiperbólicos se representan por curvas con crecimiento o decrecimiento limitado. Los más comunes son de la forma:

$$1. \quad y(x) = \frac{1}{b+ax} \quad \text{con } a > 0 \text{ y } b > 0$$

$$2. \quad y(x) = a + \frac{b}{x} = \frac{ax+b}{x} \quad \text{con } a > 0$$

Desarrollemos ambos:

1. La función toma la forma gráfica siguiente:

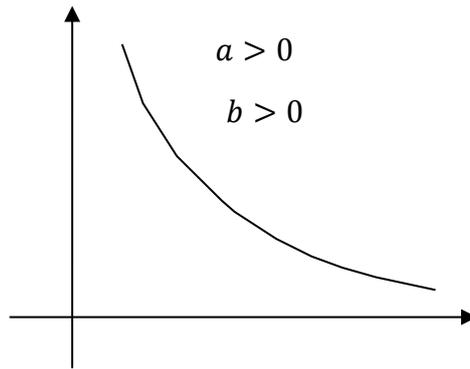


Figura 5.7: Decrecimiento hiperbólico

Para obtener una función lineal se hace $z = \frac{1}{y}$, con lo cual: $z(x) = \frac{1}{y(x)} = b + ax$

2. En este caso el cambio de variable es $z = \frac{1}{x}$,

Así: $y(x) = a + b \frac{1}{x} = a + bz$ (con $a > 0$ y b es no nulo)

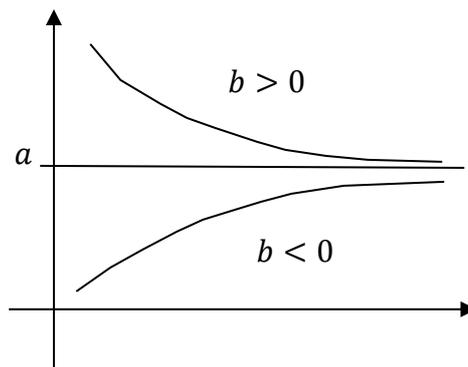


Figura 5.8: Crecimiento y decrecimiento hiperbólico

Ejemplo 5.5: *Consumo mensual medio de ración por Tilapia.* La curva que modela la tendencia de relación entre las variables está dada por la curva del caso 2 con b negativo, según los datos de la tabla siguiente:

Tiempo x (mes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ración y (g)	12.3	32.4	50.3	65.2	78.1	87.9	94.2	98.1	101.4

Solución: Con el cambio de variable $z = \frac{1}{x}$, obtenemos un ajuste lineal de y y z , dado por $y = -101,5z + 100,8$ y por lo tanto la función hiperbólica ajustada está dada por $y = 100,8 - \frac{101,5}{x}$

El coeficiente de correlación lineal en este caso es $r = -0,018$ que muestra una correlación muy débil entre las variables para este tipo de ajuste.

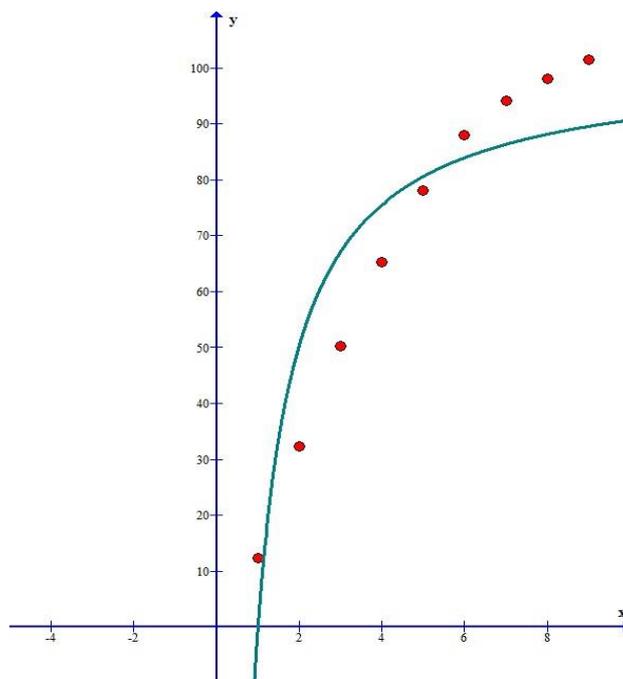


Figura 5.9: Datos experimentales y la curva de ajuste del ejemplo 5.5

La característica importante de la curva de tendencia es la concavidad que está volcada hacia abajo, esto indica, anticipadamente, que un ajuste con la función hiperbólica del tipo $y = \frac{1}{b+ax}$ no es conveniente, en este caso.

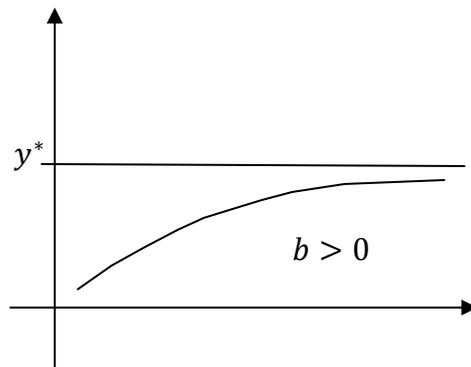
5.9. Ajuste Lineal del Modelo Exponencial Asintótico

Cuando se trata de comportamiento asintótico, o sea con tendencia a estabilizar los datos, otra curva típica para ajuste es la dada por el modelo exponencial asintótico:

$$y = y^* - be^{ax} \quad \text{Con: } y^* > 0 \quad a < 0$$

Vamos a considerar dos casos, teniendo en cuenta que usaremos cambio de variables mediante el uso de la función logaritmo natural, en cuyo caso requerimos que esté definido sobre términos positivos.

5.9.1. Crecimiento Exponencial Asintótico



Cuando los datos tienden a crecer a un valor asintótico y^* , o sea $y < y^*$

Nos queda:

$$\begin{aligned} y^* - y &= be^{ax} \\ \ln(y^* - y) &= \ln(be^{ax}) \\ &= \ln b + ax \end{aligned}$$

O bien usando la expresión lineal: $z = ax + B$

Donde: $z = \ln(y^* - y)$, $B = \ln b$ si $b > 0$

Aplicación XXIV: Modelo de carga y descarga de un condensador

Un circuito eléctrico RC está formado por un resistor y un capacitor, conectados en serie a una fuente de voltaje. Al encender el interruptor tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito comienzan a aumentar desde cero. Se cuenta con las mediciones de la carga a lo largo de un proceso de carga de un capacitor. Obtenga una curva de ajuste.

Tiempo $x(\text{min})$	5,22	11,32	18,54	27,03	37,12	50,30	67,61	92,72	138,21	189,90
Carga $V(\text{vol})$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	38

Solución: Se observa que los datos se acotan, para ello tomamos el valor de 40 que corresponde al instrumento con el que se midió. Es decir se tiene el segundo caso citado.

t_i	V_c	$Z_i = \ln(40 - V)$	t_i^2	$t_i Z_i$
5.22	4	3.583519	27.2484	18.70597
11.32	8	3.465736	128.1424	39.23213
18.54	12	3.332205	343.7316	61.77907
27.03	16	3.178054	730.6209	85.90280
37.12	20	2.995732	1377.8944	111.20158
50.30	24	2.772589	2530.0900	139.46121
67.61	28	2.484907	4571.1121	168.00454
92.72	32	2.079442	8596.9984	192.80582
138.21	36	1.386294	19102.0041	191.59974
189.90	38	0.6931472	36062.0100	131.62865
637.97		25.97162	73469.85	1140.322

Supusimos el valor límite de la sucesión en $V^* = 40$, y el sistema a resolver para hallar el ajuste es:

$$\begin{cases} 73469,85a + 637,97B = 1140,322 \\ 637,97a + 10B = 25,97162 \end{cases}$$

Obteniendo: $a = -0,01576444383$, $B = 3,602386223$

Así el ajuste por mínimos cuadrados a la recta auxiliar, que al encontrar:

$$b = e^B = 36,704017693279$$

Por ello la curva ajustada es: $y = 40 - 36,70401e^{-0,015x}$

La gráfica de esta función ajustada es la siguiente, tal se muestra en la figura 5.10.

O sea tiende a 40, basta para ello gráfica para valores mayores.

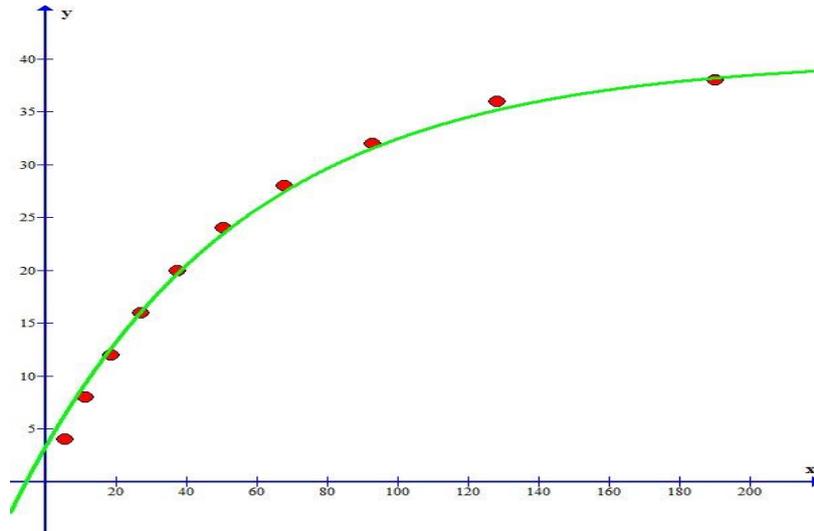
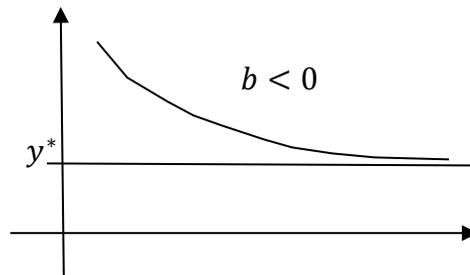


Figura 5.10: Datos experimentales y la recta de ajuste del ejemplo 5.6

5.9.2. Decrecimiento Exponencial Asintótico



Suponiendo ahora que los datos decrecen al valor asintótico y^* , o sea $y > y^*$ quedando:

$$\begin{aligned} y - y^* &= -be^{ax} \\ \ln(y - y^*) &= \ln(-be^{ax}) \\ &= \ln|b| + ax \end{aligned}$$

O bien usando la expresión lineal: $z = ax + B$

Donde $z = \ln(y - y^*)$, $B = \ln|b|$ si $b < 0$

Aplicación XXV: Modelo de un motor de revolución

Problema: Un motor regula a velocidad mínima de 4000 rpm. Si se lo acelera a 9000 rpm tiene una desaceleración cuya velocidad se da en la siguiente tabla.

Ajustar la curva de datos.

MODELOS MATEMATICOS EXPERIMENTALES

Tiempo $t(\text{min})$	1	2	3	4	5
Carga $V(\text{vol})$	9	7	6	5	4,2

Solución: Se observa ahora que los datos decrecen hasta casi el valor de 4. Es decir se tiene el primer caso citado. Así la curva que se busca tiene la forma: $y - 4 = -be^{ax}$, donde la regresión lineal se hace sobre la recta auxiliar: $z = at + B$

t_i	V	$Z_i = \ln(V - 4)$	t_i^2	$t_i Z_i$
1	9	1,60944	1	1,60943
2	7	1,09861	4	2,19722
3	6	0,69315	9	2,07945
4	5	0	16	0
5	4,2	-1,60944	25	-8,04720
15		1,79176	55	-2,16110

El decrecimiento de la velocidad del motor, expresada en miles tiende al valor de 4 rpm. Esto es que el valor límite de la sucesión es $V^* = 4$, y el sistema a resolver para hallar el ajuste es:

$$\begin{cases} 55a + 15B = -2,1611 \\ 15a + 5B = 1,79176 \end{cases}$$

Obteniendo $a = -0,753638$, $B = 2,619266$

Obteniéndose el ajuste por mínimo cuadrados a la recta auxiliar, que al encontrar:

$$|b| = e^B = 13,725645$$

Así la curva ajustada es: $y = 4 + 13,725645e^{-0,75338x}$

La grafica de esta función ajustada es la siguiente:

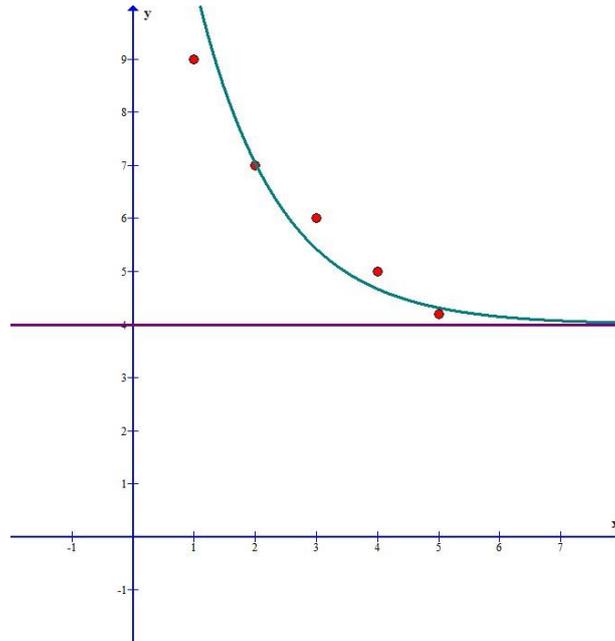


Figura 5.11: Datos experimentales y la recta de ajuste del ejemplo 5.7

5.10. Ajuste a la Función de Aprendizaje

Siendo la función de aprendizaje $A(t) = A^* - (A^* - A_0) e^{-\beta(t-t_0)}$, donde A^* indica el máximo aprendizaje que se puede alcanzar, A_0 es el aprendizaje alcanzado al momento de iniciar el proceso de aprendizaje. Pretendemos ahora ajustar datos empíricos a la curva de aprendizaje.

Si $A_0 = 0$, o sea, se parte de un conocimiento nulo en el proceso, el modelo se reduce a

$$y(t) = A^*(1 - e^{-\beta t})$$

Comenzamos con este modelo reducido, y rectificamos la curva, reconociendo una expresión fácil para derivar en término de la incógnita dada por el parámetro de la curva, que para nuestro caso es β . Así la suma de los cuadrados de las diferencias es:

$$S = \sum_{i=1}^2 (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - A^* + A^* e^{-\beta t_i})^2$$

Se realiza la siguiente transformación a la variable:

$$\hat{y}_i = A^* - A^* e^{-\beta t_i}$$

$$\hat{y}_i - A^* = -A^* e^{-\beta t_i}$$

$$\ln(A^* - \hat{y}_i) = \ln A^* + (-\beta t_i)$$

Haciendo $\hat{z}_i = \ln(A^* - \hat{y}_i)$ y $A = \ln A^*$. Nos queda $z_i = A - \beta t_i$, que es una expresión lineal en β , la cuál es la única incógnita sobre la cual derivaremos en la optimización. Además: $z_i = \ln(A^* - y_i)$

Así la nueva forma de expresar a S es:

$$S = \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{z}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (z_i - A + \beta t_i)^2$$

Derivando: $\frac{dS}{d\beta} = 2 \sum_{i=1}^N (z_i - A + \beta t_i) t_i = 2 \sum_{i=1}^N (z_i t_i - A t_i + \beta t_i^2) = 0$

Con lo cual la ecuación es: $\sum_{i=1}^N z_i t_i - A \sum_{i=1}^N t_i + \beta \sum_{i=1}^N t_i^2 = 0$

Despejando nos queda:

$$\beta = \frac{A \sum_{i=1}^N t_i - \sum_{i=1}^N z_i t_i}{\sum_{i=1}^N t_i^2}$$

Aplicación XXVI: Modelos de aprendizaje

Problema: Dados los siguientes datos de una evaluación de aprendizaje, hallar la curva de aprendizaje reducida estimada por el MMC.

$$(1,3); (2,5); (3,12); (4,15); (5,18); (6,20); (7,21); (8,22); (9,23); (10,24)$$

Solución: Se construye la tabla para calcular el coeficiente de la ecuación:

N	t_i	y_i	t_i^2	$z_i = \ln(A^* - y_i)$	$t_i z_i$
1	1	3	1	3,09104	3,09104
2	2	5	4	2,99573	5,99146
3	3	12	9	2,56495	7,69485
4	4	15	16	2,30259	9,21034
5	5	18	25	1,94591	9,72955
6	6	20	36	1,60944	9,65663
7	7	21	49	1,38629	9,70406
8	8	22	64	1,09861	8,78889
9	9	23	81	0,69315	6,23832
10	10	24	100	0	0
Σ	55	163	385	17,68771	70,10514

Como $A = \ln 25 = 3,21888$, reemplazamos por los valores obtenidos en tabla la expresión de nuestra incógnita:

$$\beta = \frac{3,21888 \times 55 - 70,10514}{385} = 0,277748$$

Finalmente nuestro modelo de la curva de aprendizaje reducida está dada por:

$$\hat{y}(t) = 25 (1 - e^{-0,277748 t})$$

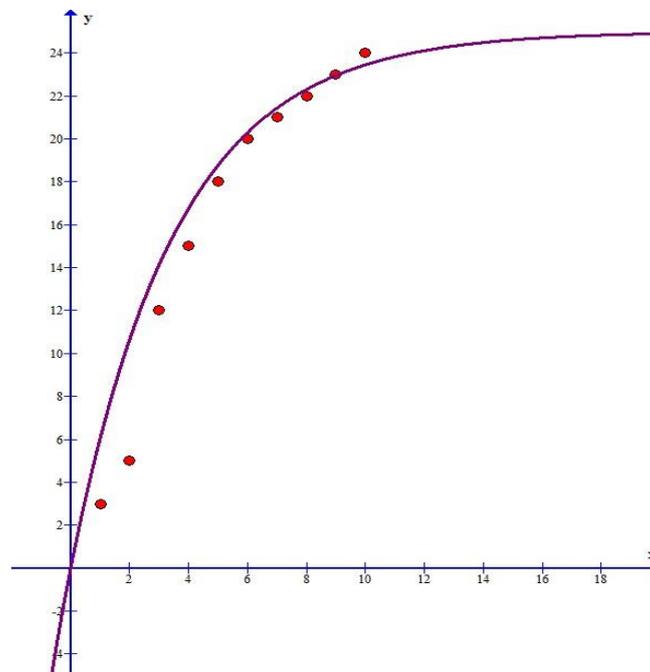


Figura 5.12: Datos experimentales y la curva de ajuste del ejemplo 5.8

Ahora resta la forma general del Modelo de Aprendizaje:

$$A(t) = A^* - (A^* - A_0) e^{-\beta(t-t_0)}$$

Se realiza la siguiente transformación a la variable:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= A^* - (A^* - A_0)e^{-\beta t_i} \\ \hat{y}_i - A^* &= -(A^* - A_0)e^{-\beta t_i} \\ (A^* - \hat{y}_i) &= (A^* - A_0)e^{-\beta t_i} \\ \ln(A^* - \hat{y}_i) &= \ln(A^* - A_0) + (-\beta t_i) \end{aligned}$$

Haciendo $\hat{z}_i = \ln(A^* - \hat{y}_i)$ y $A = \ln(A^* - A_0)$. Nos queda $z_i = A - \beta t_i$, que es una expresión lineal en β , la cuál es la única incógnita sobre la cual derivaremos en la optimización. Además $z_i = \ln(A^* - \hat{y}_i)$.

Así la forma de expresar a S es:

$$S = \sum_{i=1}^N (z_i - \hat{z}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (z_i - A + \beta t_i)^2$$

Operando de aquí en más como en el caso anterior.

Ejemplo 5.6: Dados los siguientes puntos, hallar la curva de aprendizaje general estimada por el MMC.

(0,3); (1,5); (2,12); (3,15); (4,18); (5,20); (6,21); (7,22); (8,23); (9,24)

Solución: Se construye la tabla para calcular el coeficiente de la ecuación:

N	t_i	y_i	t_i^2	$z_i = \ln(A^* - y_i)$	$t_i z_i$
1	0	3	0	3,09104	0
2	1	5	1	2,99573	2,99573
3	2	12	4	2,56495	5,12990
4	3	15	9	2,30259	6,90777
5	4	18	16	1,94591	7,78364
6	5	20	25	1,60944	8,04750
7	6	21	36	1,38629	8,31774
8	7	22	49	1,09861	7,69027
9	8	23	64	0,69315	5,54520
10	9	24	81	0	0
Σ	45	163	285	17,68771	52,41775

Como ahora $A = \ln(25 - 3) = 3,09104$, reemplazamos por los valores obtenidos en tabla la expresión de nuestra incógnita

$$\beta = \frac{A \sum_{i=1}^N t_i - \sum_{i=1}^N z_i t_i}{\sum_{i=1}^N t_i^2} = \frac{3,09104 \times 45 - 52,41775}{285} = 0,304137$$

Finalmente nuestro modelo de la curva de aprendizaje reducida está dada por:

$$\hat{y}(t) = 25 - 22 e^{-0,304137 t}$$

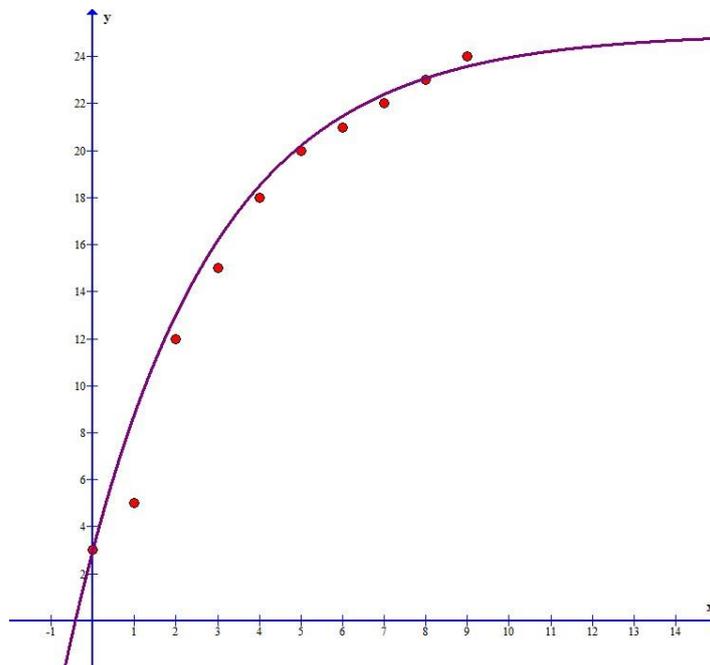


Figura 5.13: Datos experimentales y la recta de ajuste del ejemplo 5.9

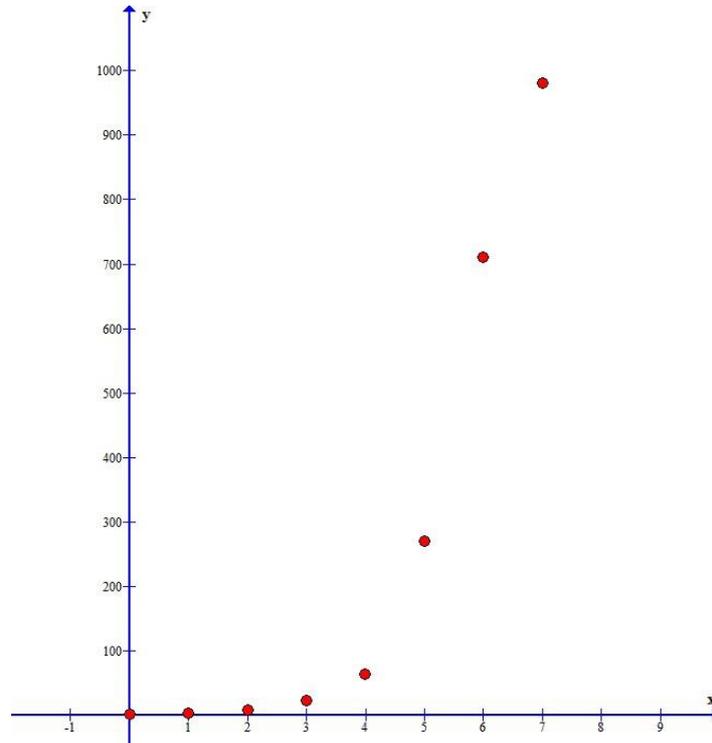
5.11. Ejemplos de uso de Escala Logarítmica

Ejemplo a: Sea un suceso ocurrido ante la presencia de dos personas, por ejemplo un accidente, una discusión, etc., a partir del cual se difunde a su comunidad: la *teoría de contacto* ha diseñado modelos matemáticos que expresan tipos de desarrollos de la difusión o propagación de un rumor. Aquí mencionaremos datos obtenidos de tal difusión para luego ajustar a una curva:

MODELOS MATEMATICOS EXPERIMENTALES

Tiempo (t) (semanas)	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de personas	2	4	9	24	65	270	710	980

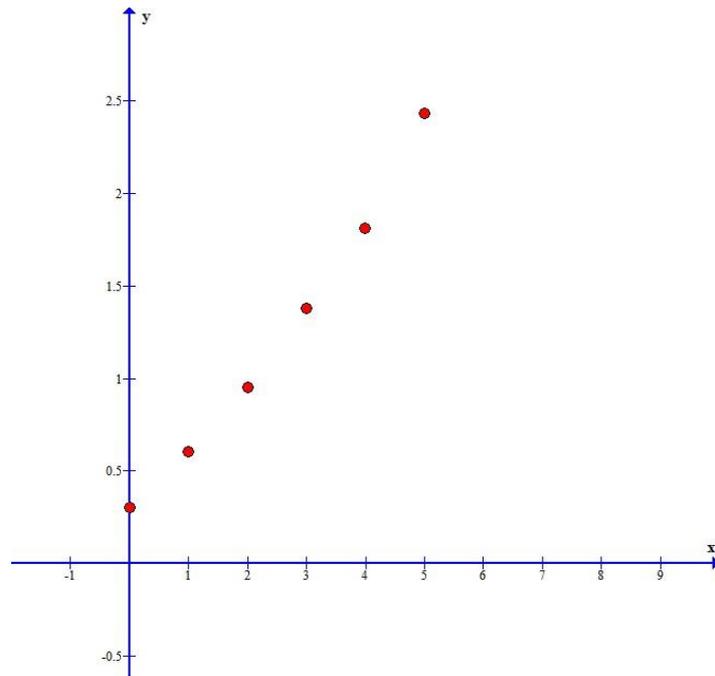
Graficando en escala aritmética observamos el gran crecimiento de la variable dependiente, por lo que se sugiere aplicar el modelo exponencial, $y = be^{ax}$



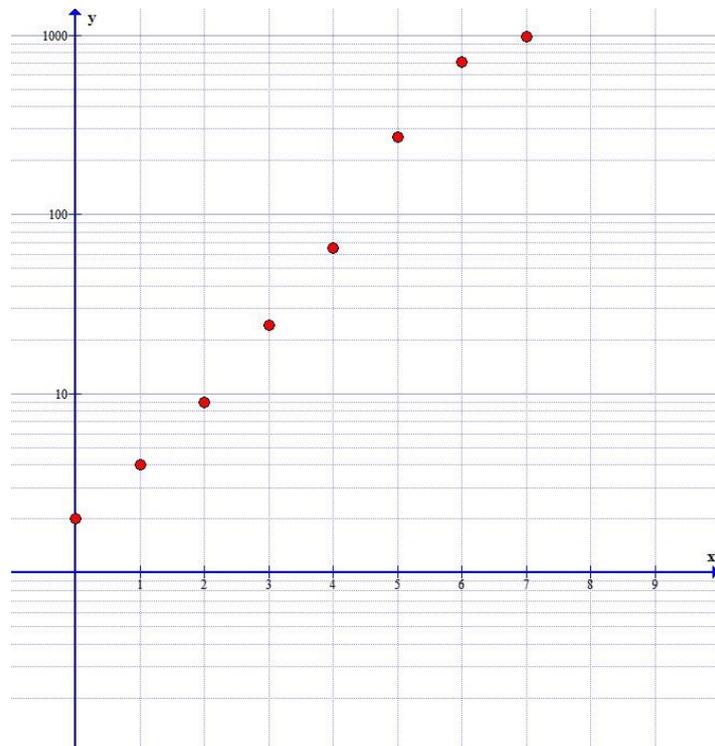
Para ello se aplica logaritmo decimal a la variable de número de personas:

Tiempo (t) (semanas)	Cantidad de personas	$z_i = \log(y_i)$
0	2	0,30103
1	4	0,60206
2	9	0,95424
3	24	1,38021
4	65	1,81291
5	270	2,43136
6	720	2,85733
7	980	2,99123

Y graficamos ahora las variables t y z .



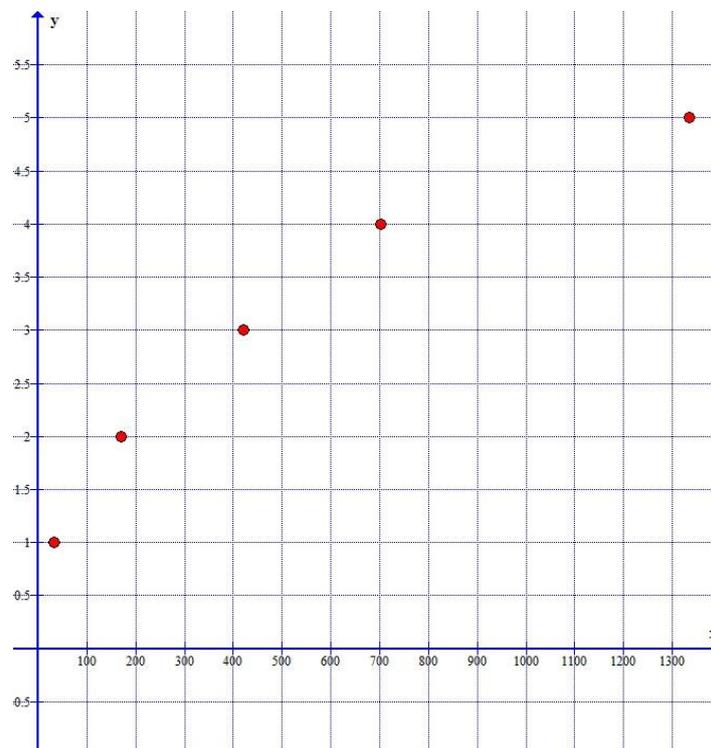
Existe otra forma mucho más directa en la cual se representa las variables originales del problema, para ello el cambio está en la escala de la gráfica. Para nuestro ejemplo el cambio se hace en la variable dependiente, y en la independiente sigue usándose la escala aritmética. Por ello debemos usar el papel semilogarítmico.



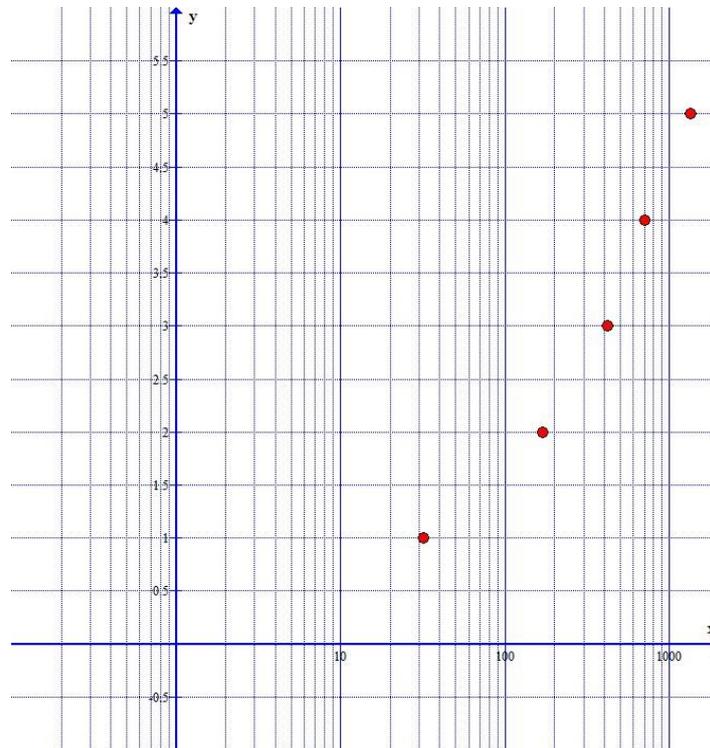
Por otro lado tomemos ahora el siguiente ejemplo:

Ejemplo b: Se observa el resultado de una quiniela y se anota las veces que sale el triple cero entre los diez primeros premios, para lo cual se acumula la cantidad en la siguiente información a fin de hallar un porcentaje: la primera vez que salió fue en la jugada 32, vuelve a salir en la 170, en la 420, 702 y 1335. Represente los datos en una gráfica observando donde conviene aplicar la escala logarítmica.

Numero de jugadas	Cantidad acumuladas de veces que sale 000
32	1
170	2
420	3
702	4
1335	5



Vemos ahora que la variable que crece rápidamente es la independiente, por ello es ahí donde debemos usar la escala para “rectificar” la curva a graficar.



Referencias Bibliográficas

- Bassanezi C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Brasil. Editora Contexto.
- Bender (1978). *An Introduction to Mathematical Model*. New York. Dover Publication.
- Braun, M. (1990). *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. México. Grupo Editorial Iberoamericana S.A.
- Budnick F.S. (1993). *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. España. McGraw Hill. Tercera Edición
- Costa H.A. (1986). *El método de Inducción Completa y sus variantes*. Catamarca. Argentina. Editor el autor.
- Engel A. (1978). *Elementos de Biomatemática*. Washington. EEUU. Editorial OEA
- Habermann R. (1998). *Mathematical Model*. EEUU. SIAM.
- Goldberg, S. (1964). *Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Barcelona. Marcombo S. A.
- Grünfeld, V. (1994). *Ciencia en Tiempos de Cólera*. Bariloche. Argentina. Instituto Balseiro. Comisión Nacional de Energía Atómica.
- Iannelli, M. (1990). *Introduzione ai Modelli di Popolazione*. Italia. Università degli Studi di Trento.
- Juárez G., Navarro S. (2003). *La simulación como recurso didáctico de la Enseñanza de la Física*. 3ras Jornadas de Física y Enseñanza de la Tecnología. FACEN. UNCA.
- Juárez G, Navarro S. (2005). *Ecuaciones en Diferencias, con aplicaciones a modelos en Sistemas Dinámicos*. Catamarca. Editorial Sarquís.
- Juárez G., Navarro S. (2011). Problemas discretos con valores iniciales. *Revista de Educación Matemática. UMA. Vol 26. Nro. 2. P. 3-13*.
- Juárez G.A., Navarro S.I. (2011). Las Ecuaciones en Diferencias en los Modelos Matemáticos Discretos. *Revista Aportes Científicos en PHYMATH. Vol. I, p. 43-60*. ISSN N° 1853-9866. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca.
- Kileliov, Krasnov, Makarenko (1976). *Funciones de Variable Compleja, cálculo operacional y teoría de la estabilidad*. España. Reverté.
- López de Medrano (1992). *Modelos Matemáticos*. México. Editorial Trillas.
- Martín García, J. (2006). *Sysware*. Barcelona. Edición del Autor.

- Martín García, J. (2003). *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*. Barcelona. Edición del Autor.
- Martín García J. (2008). *Ejercicios avanzados en Dinámica de Sistemas*. España, Barcelona. Autor y editor.
- Mochon Cohen S. (2000). *Modelos Matemáticos para todos los niveles*. México. Grupo Editorial Iberoamericano.
- Momo F., Capurro A. (2006). *Ecología Matemática: principios y aplicaciones*. Argentina. Ediciones Cooperativas.
- Noble B., Daniel J. (1989). *Algebra Lineal Aplicada*. México. Editorial Prentice Hall. 3ra Edición.
- Saleme N., Berrondo L.A., Navarro S.I., Juárez G.A. (2016). Enseñanza de Modelos Discretos en Dinámica Poblacional. *Revista de Educación Matemática. UMA. Vol 31. Nro. 3. P 21-31.*
- Scheid F. (1972). *Análisis Numérico*. Serie Schaum. México. Mc Graw Hill.
- Smith M. (1977). *Ideas Matemáticas en Biología*. España. Compañía Ed. Continental.
- Strang G. (1986). *Introduction to Applied Mathematics*. EUA. Wellesley-Cambridge Press.
- Takahashi, T. (1990). *Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Valderrama Bonnet M.J. (1995). *Modelos Matemáticos en las Ciencias experimentales*. España. Ediciones Pirámides.
- Valdez L., Juárez G., Navarro S., Barros L. (2014). Implementación de software para la Enseñanza de Ecuaciones en Diferencias con valores iniciales. *Revista de Educación Matemática. UMA. Vol 29. Nro. 1. P 19-35.*
- Valdez L., Romero S., Barros L., Nieva E. (2016). La Matemática Financiera Desde un Enfoque de las Ecuaciones en Diferencias. *Revista de Educación Matemática. UMA. Vol 31. Nro. 1. P 15-36.*
- Valdez L., Romero S., Navarro S., Juárez G. (2016). Simulación Dinámica Discreta de Modelos Compartimentados con Software. *Revista de Educación Matemática. UMA. Vol 31. Nro. 2. P 19-37.*
- Zill D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. México. Thomson Editores. 6ta Edición.

MODELOS MATEMÁTICOS COMPARTIMENTADOS



Libro
Universitario
Argentino

ISBN 978-987-661-424-5



REUN

RED DE EDITORIALES
DE UNIVERSIDADES
NACIONALES



ISBN: 978-987-661-424-5
Universidad Nacional de Catamarca
Secretaría de Investigación y Posgrado
Avda. Belgrano 300
Pab. Variante I - Planta Alta
Predio Universitario
Tel: 00 54 383 - 4437997
www.editorial.unca.edu.ar
San Fernando del Valle de Catamarca
Catamarca - República Argentina