## IV. ANÁLISIS DE LOS DATOS y TRIANGULACIÓN DE RESULTADOS

Del Puerto, S.; Minnaard, C., y Seminara, S.(2005) en su trabajo "Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del Aprendizaje de la Matemática" consideran que:

"*Los procesos mentales no son visibles y sólo es posible conjeturar acerca de su ocurrencia a través de manifestaciones indirectas. Los errores cometidos por los alumnos, la regularidad con que éstos aparecen en cada uno, las formas de resolver y de responder, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias acerca de estos procesos mentales, de las estructuras en que van organizando los conocimientos*"

Es por esto que para conocer los procesos mentales de los alumnos estudiamos sus manifestaciones a través del análisis de los errores, dificultades y también de las habilidades, explicaciones, opiniones, ideas previas, lo que permitió obtener los elementos suficientes para caracterizar el aprendizaje de cada uno e identificar el tipo de estrategias que utilizan.

El primer análisis fue realizado atendiendo a las respuestas dadas en la evaluación de diagnóstico, organizado mediante planillas (Anexo 2); luego éste fue profundizado con las conclusiones extraídas de las entrevistas (Anexo 3). A los fines de hacer más explícito el análisis se escaneó la resolución de problemas y ejercicios de los alumnos. Asimismo se transcriben los párrafos significativos de las entrevistas a los fines de facilitar la lectura de la interpretación y el análisis del investigador. Se observó la presencia de Estrategias Cognitivas, Metacognitivas y de Apoyo. Estas dos últimas en escasas manifestaciones y muy relaciones entre sí.

A continuación se describen las diferentes estrategias encontradas.

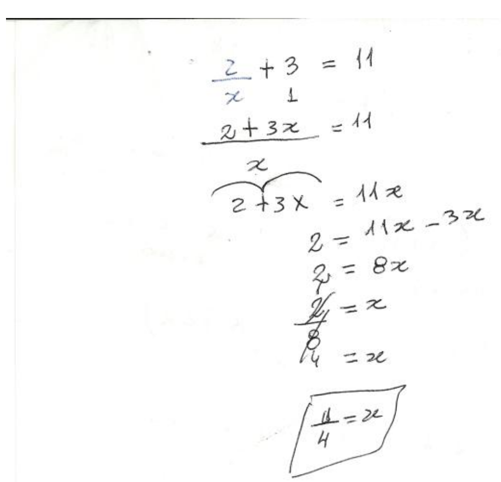


Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

### *IV.1. Estrategias Cognitivas*

IV.1.1. ***Estrategias de Repetición*** (Práctica y Memorización)

Los alumnos seleccionados no tienen dificultades para trabajar con ecuaciones sencillas, como las presentadas en los apartados a), b) y c) del ejercicio 2 (Ver Anexo 1). La resolución se centra en la aplicación del algoritmo, es decir, en la utilización de reglas, en la repetición e imitación de ejercicios resueltos anteriormente. Silvina aplica las propiedades, no tiene dificultades para trabajar con la incógnita a derecha o izquierda del signo"=", aún cuando tiene coeficiente negativo. Laura emplea correctamente los algoritmos; en la mayoría de las ecuaciones utiliza la misma "manera de resolver": separar en términos, despejar la incógnita de manera que el coeficiente siempre sea positivo y escribe el conjunto solución. A la pregunta si siempre separa en términos, ella responde: "*Sí, siempre separo en términos, desde la secundaria nos exigían que separemos en términos y también porque yo lo enseño así… (*Sigue resolviendo*)… Acá, la x la paso para acá (*indicando hacia el segundo miembro*) por que como este tiene mayor valor absoluto, entonces, para que la x me quede positiva…Dejo sola la x… el 8 que está multiplicando pasaría dividiendo… y ya está."* .Vemos, que el lenguaje utilizado por la alumna no aporta ideas sobre su conocimiento en la aplicación de propiedades de las operaciones. (Fig 1)






Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

El ejercicio 2d) presenta la posibilidad de que el alumno seleccione la estrategia más conveniente al aplicar las propiedades. Puede ser resuelto de distintas maneras y sólo 3 alumnos (Silvina, Rosa y Laura) lo resuelven correctamente y de la forma más sencilla. A modo de ejemplo, se presenta lo realizado por Laura (Fig 2):

$$\frac{x}{2} - \frac{12x - 11x}{7} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{7} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{7x - 2x}{14} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5x}{14} = \frac{1}{5}$$

$$5x = \frac{1}{5} . 14$$

$$x = \frac{14}{5} : 5$$

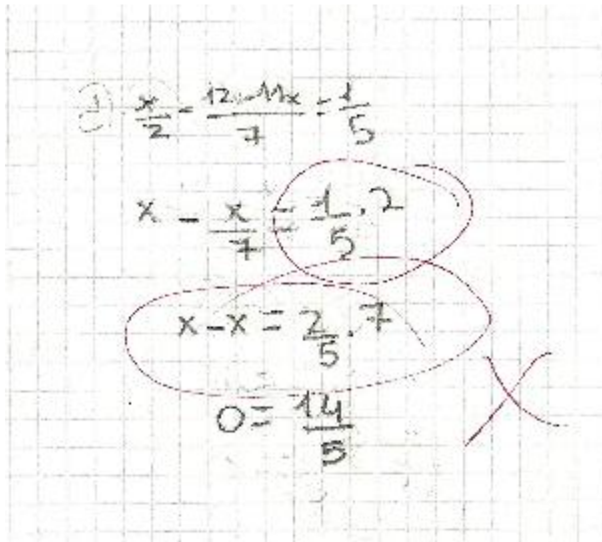
$$x = \frac{14}{25}$$

Por elegir la más sencilla de todas las maneras de resolver, parecería que estos alumnos reflexionan al aplicar el algoritmo, es decir, que utilizarían correctamente la estrategia de práctica y mecanización. Sin embargo, Silvina expresa durante la entrevista: "*resolví así porque fue lo primero que se me ocurrió",* sin analizar las distintas maneras de resolver.

Jorge, en general, aplica bien los algoritmos hasta que se le presenta la ecuación 2d) que incluye suma de varias fracciones (sin x en el denominador) y entonces comete errores muy groseros, que podrían evitarse si conociera la propiedad uniforme. Se infiere que los errores son ocasionados precisamente por la aplicación errónea de la técnica, vacía de justificación matemática. (Fig 3)



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

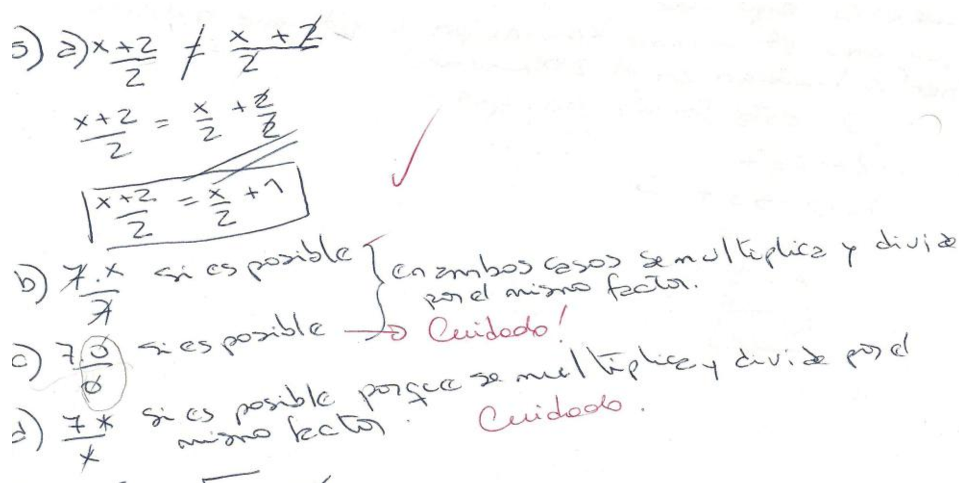


Esta manera de resolver  coincide con lo efectuado por la mayoría de los estudiantes que realizaron estas evaluaciones  (un total de 60). Es decir los alumnos resuelven mecánicamente por desconocer propiedades  como la uniforme, que son el fundamento de los algoritmos aplicados en la resolución de ecuaciones y se basan sólo en la aplicación memorística o mecánica de los mismos.

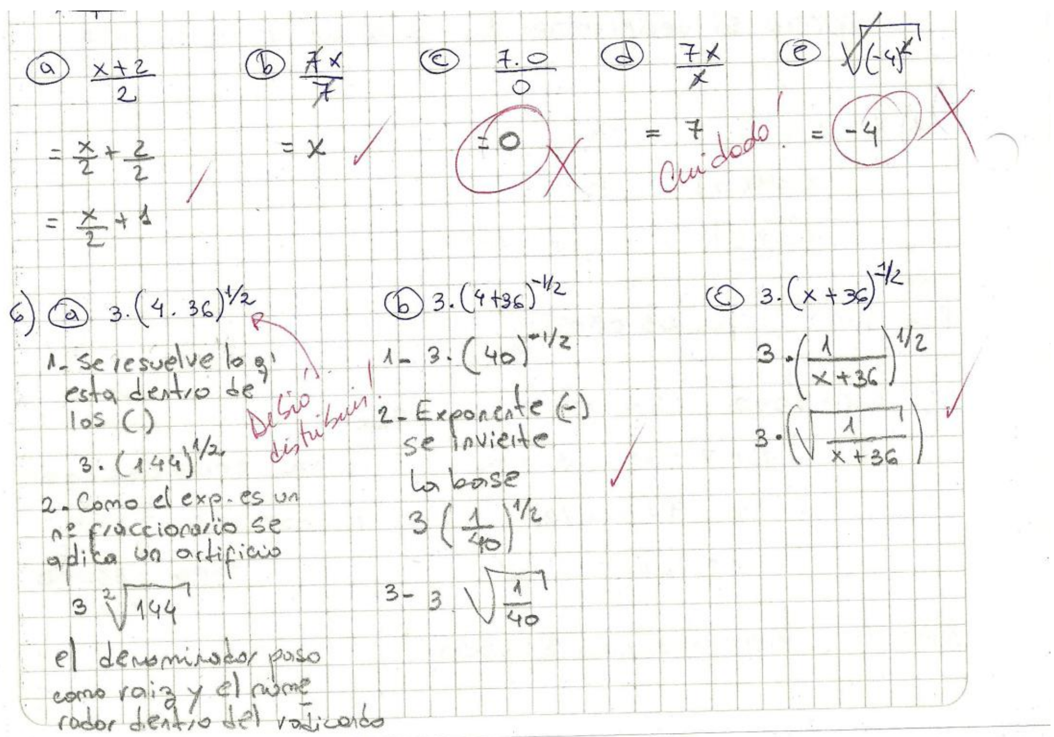
También en los ejercicios 5) y 6) se evidencian estrategias de práctica. En especial porque se pide que aplique propiedades de simplificación en fracciones y la distributiva de la potenciación y radicación. Cuatro de los cinco alumnos seleccionados simplifican cuando en el denominador hay un 0, o una x, sin advertir que en éste último caso,  es posible si y sólo si ella es distinto de 0.  Se ejemplifica con lo resuelto por Rosa (Fig 4):



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9




Se observa la presencia de automatizaciones al simplificar las fracciones, sin reflexiones acerca de la diferencia que existe en cada ejemplo, aunque en el ejercicio 6) reflexionan para explicar que deben distribuir primero la potenciación con respecto a la multiplicación; por ejemplo, en lo resuelto por María (Fig 5):





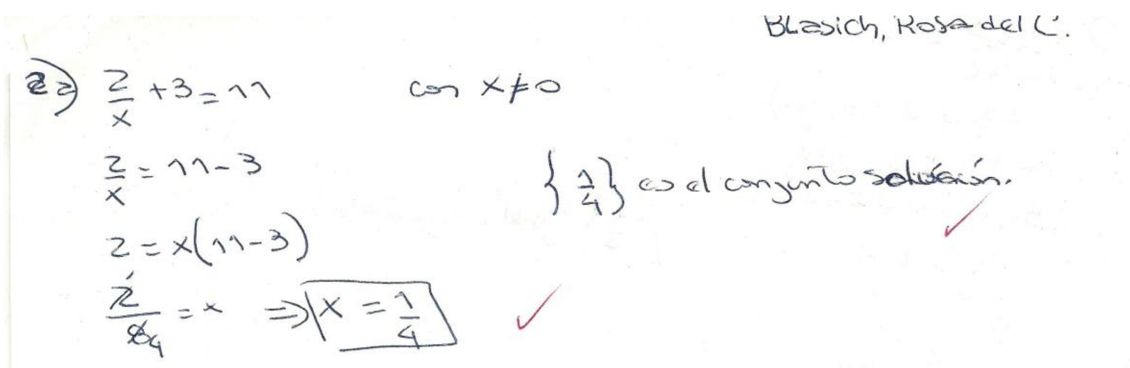

Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

Los alumnos seleccionados tuvieron cierto dominio en la aplicación de las propiedades distributivas y para simplificar (esto no es la generalidad de los alumnos ingresantes); pero, de manera mecánica, pues cuando interviene un cero en el denominador o una x, se equivocan y no pueden justificar correctamente pues desconocen los fundamentos que permiten la aplicación de estas propiedades

IV.1.2. ***Estrategias de Organización:*** (Verificación)

Podemos observar escasa muestras de este tipo de estrategias, en el ejemplo anterior (fig 5), María trata de clarificar sus soluciones, pero su lenguaje es bastante reducido

En una ecuación 2a), Rosa reflexiona, antes de resolver, que si la incógnita está en el denominador, ésta no puede tomar el valor 0. Lo cual evidencia su conocimiento acerca del concepto de división por cero, clarificando este concepto antes de resolver. (Fig 6). Sin embargo, cuando debía simplificar (Ver fig 4) no tuvo en cuenta este concepto.


Blasich, Rosa del C.

2a) $\frac{2}{x}+3=11$ con $x\neq 0$

$\frac{2}{x}=11-3$

$2=x(11-3)$

$\frac{2}{8}=x \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$

$\left\{\frac{1}{4}\right\}$ es el conjunto solución.

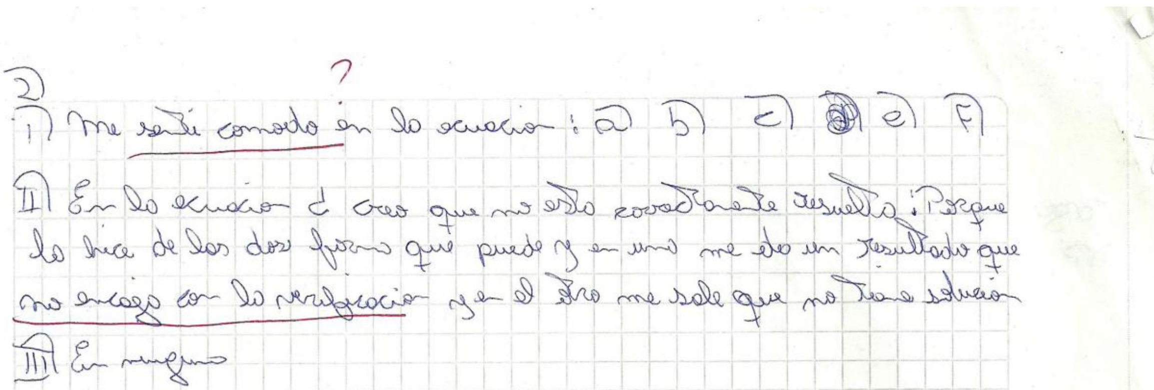
Se esperaba que en las verificaciones pudieran aclarar o confirmar el conocimiento de conceptos y propiedades y en función de ello, pudiesen inferir una relación entre los resultados obtenidos en el ejercicio y en la verificación. Sin embargo, sólo dos alumnos realizan las verificaciones en todas las ecuaciones. Cuando no comprueban



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

la igualdad, deducen que hay un error pero, según las respuestas dadas a las preguntas del ejercicio 2B (Ver anexo 2), no pueden explicar dónde lo cometen ni porque. Es decir, no saben utilizar los conceptos o propiedades que conocen para confirmar o inferir si su resolución es correcta, si el error fue cometido en la verificación, o si la ecuación no tiene solución.

Jorge sabe que comete errores, duda, pero no puede explicar el porqué. Del análisis de las respuestas dadas se podría inferir que hay un inicio de evaluación de sus modos de aprender: (Fig 7)



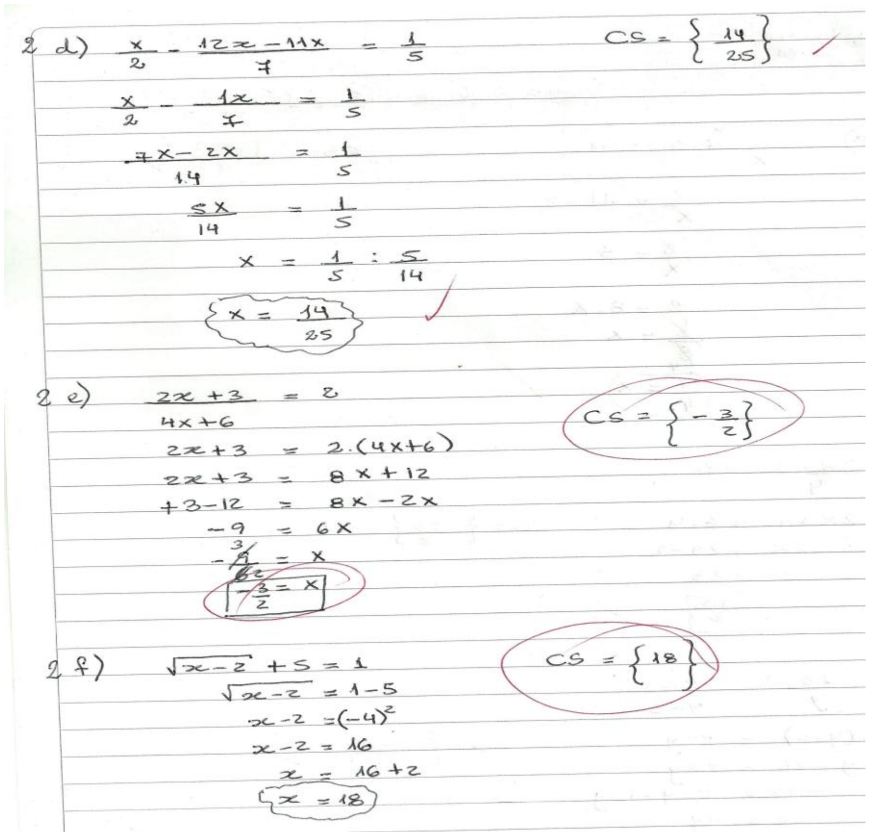

Los demás no realizaron todas las verificaciones, por lo menos de manera escrita, salvo en aquellas ecuaciones que dudaron, por ello no pudieron detectar errores ni advertir que algunas de ellas no tienen solución. Por lo tanto, el investigador no pudo saber si estos alumnos confirman o se aseguran que su forma de resolver es la correcta. Por ejemplo, en la ecuación 2e) el resultado obtenido (-3/2), el cual no verifica la ecuación pues anula el denominador. Rosa resuelve aplicando correctamente los algoritmos pero al no verificar no advierte que este valor no es solución, no fue entrevistada, entonces no se tuvo la oportunidad de conocer su reflexión ante este tipo de ecuaciones.

En cambio, Laura, una de las entrevistadas, confirmó que no realiza las verificaciones porque se siente segura de su accionar manifestando: "yo *nunca hacia las*



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

*verificaciones, no estoy acostumbrada, ni mentalmente. Yo estaba segura de los pasajes de términos y no la hacía"* Esta actitud imposibilita que pueda extraer conclusiones después de verificar. Se transcribe su modo de resolver: (fig 8)



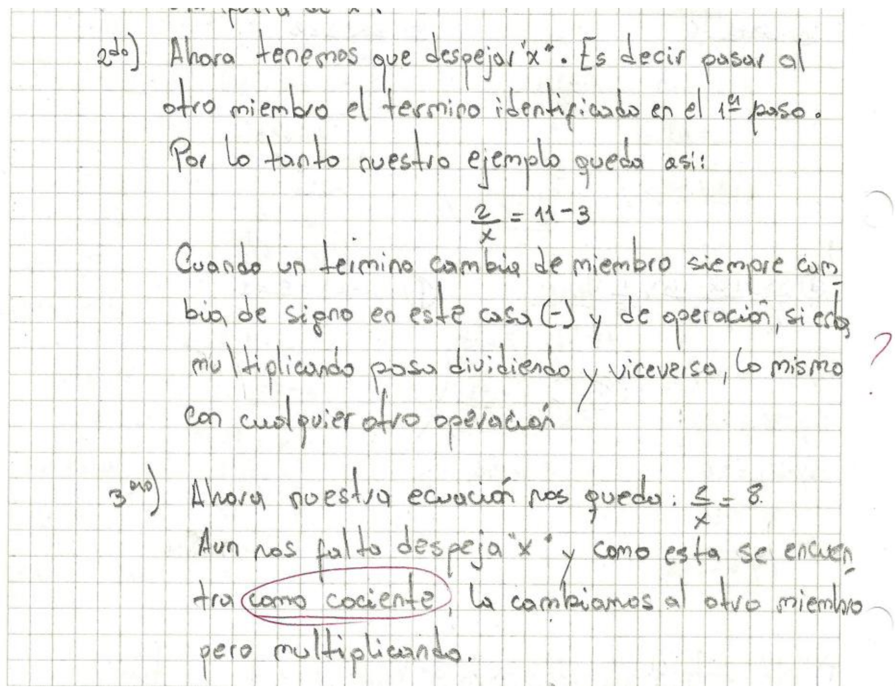
Se pretendía que al resolver el ejercicio 3 el alumno pudiera evidenciar, de alguna manera, sus Estrategias de Organización mostrando su capacidad para confirmar la comprensión del tema, explicando (y/o justificando), la manera en que fueron resueltas las ecuaciones indicadas. Por ello se los puso en situación "como si tuvieran que explicarle a un compañero". Las explicaciones dadas muestran un lenguaje sencillo, básico, quizás por la falta de experiencias en realizar este tipo de actividades. Silvina explica realizando una descripción que coincide con lo resuelto en el ejercicio: *"paso al otro miembro la x que está dividiendo como multiplicación", "la x pasa hacia el otro lado"*. Laura utiliza un lenguaje claro, con cierto dominio del mismo, por lo cual se infiere que posee alguna experiencia en organizar la



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

explicación para que sea comprendida: “*como la incógnita figura en el denominador de la fracción pasa al otro miembro con la operación contraria, o sea multiplicando al número que teníamos en el segundo miembro…*” , se observa que explica qué hace pero no justifica las razones de por qué lo hace.

María, usa  lenguaje marcadamente erróneo, lo cual indica una falta de dominio del mismo que implica una imposibilidad para explicar o aclarar sus formas de resolver (Fig 9)


2do) Ahora tenemos que despejar "x". Es decir pasar al otro miembro el termino identificado en el 1º paso.
Por lo tanto nuestro ejemplo queda así:

$$\frac{2}{x} = 11 - 3$$

Cuando un termino cambia de miembro siempre cambia de signo en este caso (-) y de operación, si esta multiplicando pasa dividiendo y viceversa, lo mismo con cualquier otro operación ?

3ro) Ahora nuestra ecuación nos queda: $\frac{2}{x} = 8$.
Aun nos falta despejar "x" y como esta se encuentra como cociente, la cambiamos al otro miembro pero multiplicando.

Podemos inferir que en sus expresiones María  considera que cuando un término es transpuesto a otro miembro cambia de signo y de operación, cuando en realidad sólo cambia su signo (pues suma o resta a ambos miembros de la igualdad un mismo número).  En vez de expresar que si la “x” está divida por algún número, éste “puede pasar” al otro miembro como factor  (en realidad es porque se multiplica a ambos miembros por un mismo número distinto de cero); María expresa que “si la x está como cociente la cambiamos al otro miembro multiplicando”



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

En general, los alumnos no justifican, no clarifican. Sólo "cuentan" lo que realizan, sin explicar el por qué, de manera que "el supuesto compañero", tal como dice la consigna, pueda comprenderle. Quizás esta haya sido su "manera de aprender a resolver ecuaciones". En consecuencia, a través de las respuestas dadas a este problema, se puede considerar carencia de Estrategias de Organización en los alumnos seleccionados, pues no pueden reflexionar ni argumentar, por ejemplo, acerca del significado de la resolución de ecuaciones.

### IV.1.3. ***Estrategias de Selección***

Parecería que, en general, los alumnos resuelven sólo por repetición o imitación, sin reflexionar acerca de lo que hacen y por qué lo hacen. Sin embargo, Laura manifestó que si reflexiona y atiende detalles que le permiten elegir lo que para ella es la mejor manera de resolver. Explica con respecto a la ecuación 2d) $\left(\frac{x}{2}-\frac{12x-11x}{7}=\frac{1}{5}\right)$:

"*Hice la resta para simplificar esta expresión, para obtener una expresión más sencilla, yo pensé que cuando buscara común denominador iba a tener que aplicar distributiva acá y se complica… … El signo menos precede a toda la fracción, el signo menos…, ese menos me hizo dudar si era solo del 12 o de toda la fracción y después me di cuenta que es de toda la fracción…*"

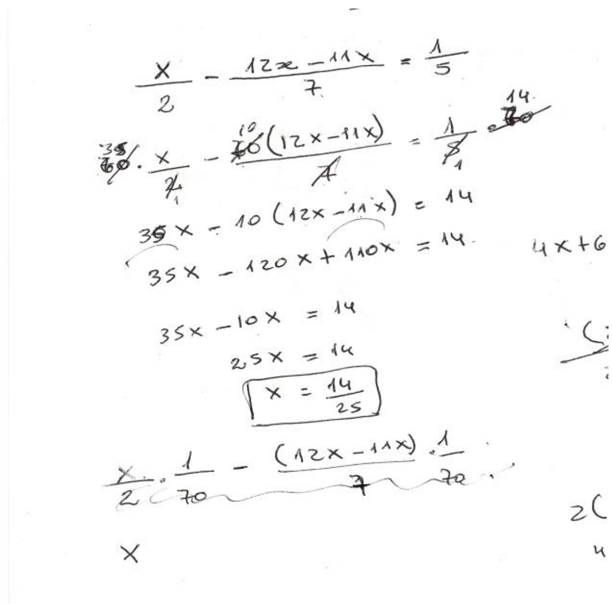
Se observa que aplica simultáneamente distintos tipos de Estrategias, razona e infiere lo que ocurriría si resuelve de una u otra manera; al presentarse "el signo menos" atiende este detalle y elige lo que para ella es forma más sencilla de resolver. Esto es, utiliza Estrategias de Selección, luego usa comparaciones y analogías para resolver, por lo cual se evidencian Estrategias de Elaboración y Razonamiento Deductivo

La docente fue más allá y le propuso, durante la entrevista, resolver aplicando la propiedad uniforme para eliminar denominadores:



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

*“ Ah! Multiplico todo por 70, ah! ¿Puedo distribuir? Ah… ahora podríamos simplificar, quedaría en 35, acá 10, acá distribuir,… acá simplificar…esto es 14. Acá 35x – 10x = 14 y ahora resolvemos esto*.(Fig 10)




Se le pregunta ¿Por qué ahora no resolvió primero la resta (12x – 11x)? Y responde que no se dio cuenta. Esto es porque ella buscó restar cuando “ve complicada” esa manera de resolver; en cambio, en este caso no resta porque ya no tiene denominadores y le resulta sencillo aplicar la propiedad distributiva. Este es un indicio de Selección, a pesar de la preponderancia de estrategia memorística. Después intenta por ensayo y error, otras formas de resolver, tratando el encontrar fracciones con igual denominador, pero no pudo resolver. Esto confirma su dificultad para utilizar otra estrategia distinta a la repetición o imitación.


Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

### IV.1.4. ***Estrategias de Elaboración***

Al analizar el trabajo de los alumnos se intentó distinguir dentro de este tipo de Estrategias aquellas que:

- A partir de los conceptos previos, les permitieron inferir significados (Inferencia Inductiva).
- Comparando lo que saben y lo que no, les permitieran relacionar, deducir o generalizar (Razonamiento Deductivo)
- En función de sus experiencias, les permitieran ordenar, agrupar o clasificar distintos conceptos (Agrupamiento).

Aunque en la realidad estas Estrategias están muy relacionadas unas con otras.

### IV.1.5. ***Inferencia Inductiva***

Como se dijo anteriormente, se esperaba que a través de las verificaciones fueran capaces de inferir significados entre el resultado obtenido y el arrojado por la verificación, sin embargo, en la mayoría de los casos no pudieron explicarlo. Ninguno de los alumnos pudo predecir que dos ecuaciones no tenían solución. No supieron interpretar la expresión simbólica que representa la ecuación antes de resolverla. Como manifiesta Arcavi la Capacidad para 'manipular' y también 'leer a través' de expresiones simbólicas son dos aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos:

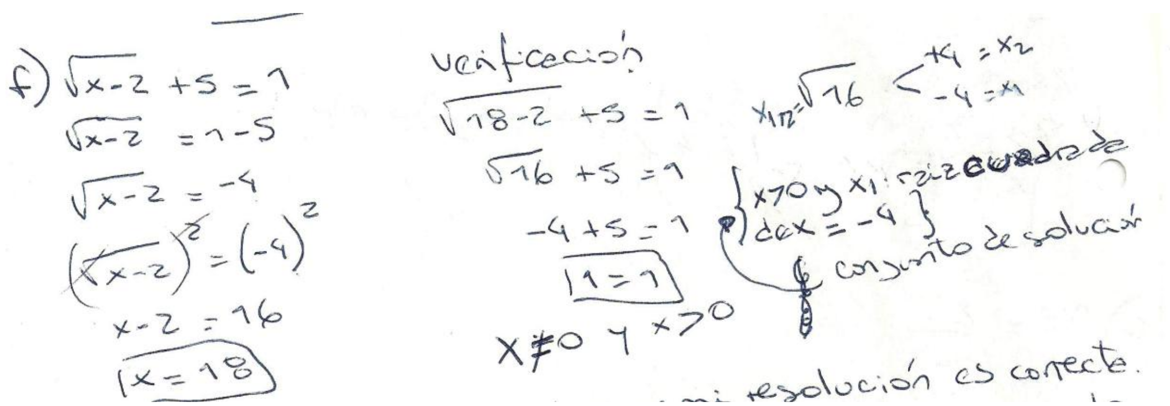
*"Por un lado, separarse de los significados y al mismo tiempo adoptar una visión global (gestalt) de las expresiones simbólicas son condiciones necesarias para que las manipulaciones sean relativamente rápidas y eficientes. Por otro lado, la lectura de y "a través" de las expresiones simbólicas con el objeto de captar significados agrega niveles de conexión y razonabilidad a los resultados. Cuando observamos a*



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

Veamos algunos ejemplos: Rosa predice en la ecuación 2a) que x debe ser distinto de 0 por ser el denominador, por lo cual infiere que lo obtenido es un resultado aceptable (y es probable que por eso no haya realizado la verificación). De manera similar podría haber advertido en la 2e) que la incógnita no debe valer - 3/2 para que el denominador no sea cero, esto implica que resuelve mecánicamente. (Ver ejemplo anterior de Rosa, fig 6).

En la ecuación 2f) ninguno tiene en cuenta que la raíz cuadrada de un número real se considera no negativa. Sin embargo Rosa hace una interesante deducción en la verificación (Fig 11):




Interpreta que $\sqrt{16}$ puede tener como solución a 4 y -4, y considera ésta última para que se compruebe la igualdad. La interpretación sería correcta si los signos **+ y -** estuvieran precediendo la raíz. En realidad, el resultado obtenido x = 18 es solución de la ecuación

$-\sqrt{x-2}+5=1$. Es probable que no tenga claro que la raíz cuadrada de un número se considera positiva para que se cumpla la propiedad de unicidad en la radicación (es decir para que esta operación tenga resultado único), y que para que tenga solución real necesariamente el radicando debe ser positivo. Esta alumna realiza la verificación (la única que escribe) para justificar la respuesta dada a la pregunta de



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

cuál de las ecuaciones  tiene dudas de haber resuelto correctamente y por ello podemos inferir que posee los conocimientos suficientes para realizar justificaciones e inferencias.

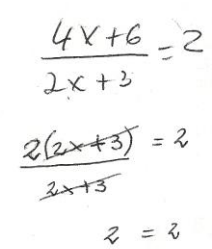
Durante las entrevistas, tanto Silvina, recién egresada de la secundaria, como Laura, con estudios universitarios (estudiante de contador público), confirmaron que antes de esta experiencia nunca  habían tenido la posibilidad de anticipar o conjeturar antes de resolver una ecuación. Entonces, se propuso resolver la fracción inversa a la dada en la ecuación 2e) para ver si puede inferir alguna conclusión. Transcribimos la conversación con Silvina (con Laura obtuvimos una respuesta muy similar):

D - *Bien, ahora escríbeme esta ecuación: Si consideramos* $\frac{4x+10}{2x+5}=2$ *¿Qué podrías interpretar de antemano sin resolverla? ¿Tiene solución? ¿Por qué?*

S – *mmm, no sé… esto daría 2, si creo que si*

D – *¿Cómo lo resuelves, entonces?*

(Resuelve en silencio)(Fig 12)




D - *¿Qué indica ese resultado?*

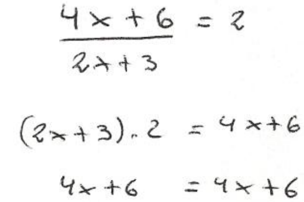
S – *Que ahora tiene solución*

D – *¿Cuál es esa solución? ¿Qué valor puede tomar x?*

S – *mmm, no se*

D – *Bueno, resuélvela de otra manera para ver si te das cuenta*

(Lo hace en silencio)(Fig 13)






Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

S – *Llegué a una identidad*

D – *Bien, entonces, ¿Qué concluimos?*

S – *Que x puede tomar cualquier valor*

Se observa, en Silvina, dificultad para inferir, incluso el resultado, a pesar de haber llegado a una igualdad cuando extrae factor común, recién lo logra cuando se evidencia que los términos en x se cancelan y por la insistencia del docente en dar una explicación. Esta dificultad puede ser ocasionada por su falta de experiencias previas en este tipo de actividades.

También, ocurre algo similar con Laura, a continuación se transcribe la conversación referida a la ecuación 2f) (ver fig 8):

D - *¿Qué puedes decir, entonces de la ecuación f? ¿Pudiste darte cuenta cuando la ibas resolviendo que no tenía solución?*

L - *No, como no hice las verificaciones, ni me di cuenta.*

D - *Entonces ahora, ¿qué piensas qué es 18? ¿Es la solución de qué?*

L - *Yo pensé que era la solución de la ecuación, pero ahora al verificar me doy cuenta que no es solución…pero después de su explicación*

D - *¿Es solución de alguna de las ecuaciones equivalentes que surgen en cada paso?*

L – *A ver… de esta, si reemplazo acá me da esto 16 (*indicando el cuarto renglón*)*

D - *A pesar de que se aplican las propiedades, se obtienen ecuaciones equivalentes y las raíces de la última ecuación obtenida no siempre es solución de la dada. ¿Alguna vez resolviste ecuaciones de este tipo?*

L - *No, recién ahora sé que hay ecuaciones que no tienen solución o que tienen infinitas soluciones, por ejemplo, los ejercicios que a mí me daban en el secundario y en contador público cuando aparecía una ecuación así que se me anulaba la variable me decían que estaba mal planteada o nos decían está mal y directamente la cambiaban y nos daban otras. Decían: "ah! Está mal, ya la corrijo" y cambiaban un número o nos daban otras*



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

No se puede esperar que los alumnos relacionen, infieran, emitan conjeturas o que desarrollen distintas estrategias cognitivas, si en el aula no se presentan actividades para que lo pongan en práctica. Es importante notar cómo Laura, se ha formado con docentes que consideran a la Matemática como una ciencia terminada, estática sin posibilidad de descubrir conocimientos nuevos aunque sea a través de una ecuación donde, aparentemente, se utiliza para agilizar la práctica de reglas y algoritmos. Se podría inferir que estas formas de enseñar promueven la utilización de Estrategias de Memorización y no de Razonamiento.

### IV.1.6. ***Estrategias de Agrupamiento***

A través del ejercicio 3 se pudo observar las maneras de combinar sus conocimientos con su lenguaje para organizar la información a transmitir. Algunos intentaron realizar una organización lógica para explicar, por ejemplo, indicando una secuencia. Jorge y María enumeran los pasos realizados, ordenamiento que se ve opacado por el lenguaje utilizado: elemental, "*la x pasa hacia el otro lado*", confuso y a veces erróneo, "*igualar ambos miembros con (+3)*" en vez de decir sumamos a ambos miembros el (+3). Rosa realiza una interesante explicación utilizando un esquema con llaves para indicar cada miembro y el primer y segundo término del primer miembro. Muestra cierta habilidad para agrupar los conceptos de manera que resultan claros. Inferimos, entonces, que ante la exigencia de la evaluación intentan utilizar Estrategias de Agrupamiento, porque fueron capaces, a su manera, de ordenar, de mostrar sus habilidades para relacionar y organizar la explicación para que se pueda comprender.

Durante la resolución de problemas del ejercicio 4 también se pudo identificar estrategias que evidencian ordenamiento como fue disponer primero los datos,


Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

asignar el significado a la/s variable/s, (“*x es la edad de Juan”*), plantear la ecuación y luego enunciar la respuesta.

Laura tiene una manera muy esquematizada de ordenamiento a la hora de resolver ejercicios, primero separa en términos, aplica propiedad distributiva si es necesario, y siempre opera de manera que la incógnita le quede con coeficiente positivo *“…la paso porque éste tiene mayor valor absoluto y así me queda la x positiva y así no tengo que pasar el signo menos…”*

### IV.1.7. ***Razonamiento Deductivo***

La resolución de problemas es adecuado para permitir que el alumno aplique Estrategias de Razonamiento Deductivo, para que:

“*...ponga el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y tome los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces...*” (Guzmán, M. 2007, Pág. 35).

Cuando los alumnos identifican lo que saben y lo que no, comparan y relacionan para poder formalizar un enunciado a través de la ecuación, decimos que resuelven deductivamente. Al explicar el significado de las variables: *“x es la edad actual de Juan”* y al plantear la ecuación, establecen una relación entre el texto, las operaciones y los símbolos que implica razonamiento deductivo. Los alumnos seleccionados realizaron la lectura e interpretación de los problemas, tradujeron de manera correcta del lenguaje coloquial al simbólico, hicieron uso de sus conocimientos previos, buscaron y usaron reglas conocidas análogas a los problemas planteados e implícitamente infirieron significados para después sintetizarlos por medio de símbolos. Para confirmar ese modo de razonar y conocer “in situ” sus maneras de interpretar y resolver, durante la entrevista, se presentó un problema similar. A continuación presentamos lo realizado por Laura:



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

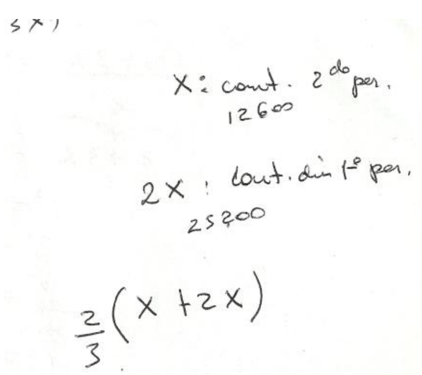
D - *Quisiera que resuelvas este problema: "Se reparten \$63.000 entre tres personas de modo que la primera persona tiene el doble de la segunda y la tercera persona* $\frac{2}{3}$ *del total de las dos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada una?*

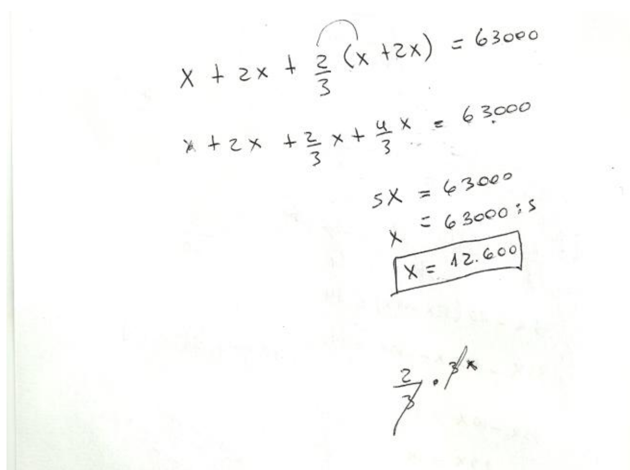
Procede a resolver explicando cada paso como una manera de controlar su proceder para que se lleve a cabo eficazmente:

*D- Explícame cómo lo haces como si fuera un compañero que no sabe qué hacer*

L – ( Lo lee) *La primera persona tiene el doble de la segunda, aquí tendremos que saber primero la segunda, porque la primera es el doble de la segunda, para mi x es la cantidad de dinero que tiene la segunda persona, y la primera persona tiene el doble de la segunda, entonces yo pondría 2x, y después la tercera persona tiene 2/3 del total entonces, sumaria estas dos, sumaria lo que tiene la primera persona con la segunda y a eso lo multiplicaría por 2/3 . Después, sumaria lo que tienen las tres personas x + 2x + .... A ver ... si así quedaría*

*A ver… 2x + x + 2/3 de x+ 2 x es 63000* (Fig 14)




D - *¿Por qué aquí aplicaste la propiedad distributiva en vez de sumar x + 2x?*

*L - Ah! Si es la mala costumbre de aplicar la propiedad distributiva jajaja. Porque hay un paréntesis. Estoy acostumbrada a aplicar la propiedad distributiva…*



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

*D - ¿Te parece que viene de la escuela secundaria que les exigen tanto aplicar la distributiva?*

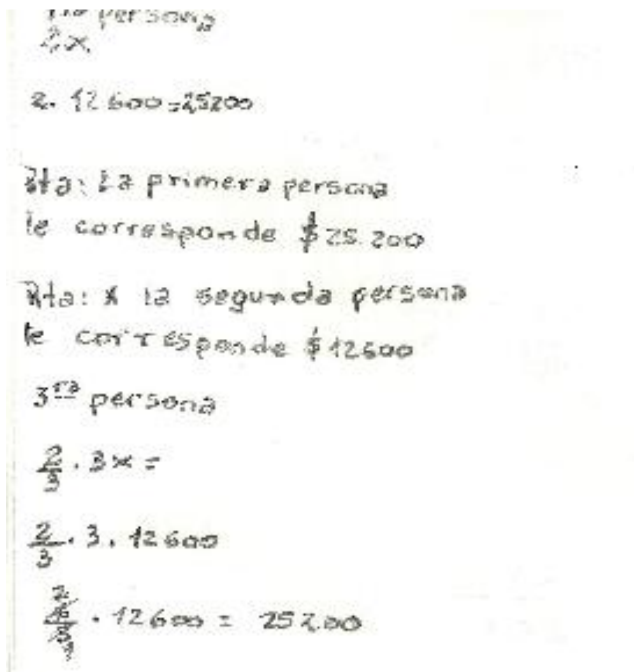
*L - Si, lo hago ya mecánicamente. (*Sigue resolviendo*)… la segunda tiene16600, porque así lo hemos planteado, la primera tiene el doble, sería 25200, y la tercera… aquí podría sumar, para que sea más fácil, y podría simplificar y ah! me queda el doble también de la segunda.*

D - *¿Te parece que está bien?*

L - *Sí, yo hice todo bien, estoy segura*

D - *¿No verificas, aunque sea mentalmente?*

L - *Sí, estoy segura. Ahora que usted me dice lo voy a verificar por las dudas*. (Lo hace, calculando la suma de lo obtenido de cada persona y escribe algunos resultados sobre las consideraciones tenidas en cuenta en la solución del problema) (Fig 15)






Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

Evidentemente, Laura razona, deduce, relaciona, usa analogías y hasta generaliza cuando expresa en símbolos el enunciado. Durante la entrevista, reconoce que su manera de resolver es sobretodo mecánica, que compara con otros problemas parecidos, repite una y otra vez su estrategia hasta que resuelve y cuando desconoce o encuentra alguna dificultad consulta libros. Sólo en algunas ocasiones consideró a los docentes que le enseñaron como orientadores de su aprendizaje:

D - *Veo que te sentís segura de lo que haces, que tienes un cierto esquema para resolver el problema, ¿cómo lo aprendiste?*
M - *Eso me costó mucho, cuando ingresé en la carrera de contador público no me salía ningún problema, y bueno yo empecé a buscar libros y a buscar todo lo que me ayudara, recuerdo que usaba un libro muy viejito, no me acuerdo el autor, que estaba en la biblioteca, muy lindo con muchos problemas y de ahí, los leía y los sacaba. Yo insistía hasta que me salía y si no me la rebuscaba para saber cómo era, veía otros problemas parecidos, y trataba de relacionar*
*D* - *¿Alguien te enseño a plantearlo, cómo buscar la incógnita, a seguir un camino?*
*M* - *No, en la facultad me dieron un pantallazo, me decían que tenía que identificar la variable y nada más. Yo me buscaba la mayor cantidad posible de problemas y hasta que los hacía*

Nuevamente se destaca la influencia de las exigencias de los docentes en las “maneras de resolver” y de desarrollar estrategias en los alumnos.

### IV.1.8. ***Acerca de las Estrategias Cognitivas utilizadas por los alumnos***

Hasta aquí podemos decir que la Estrategia Cognitiva más utilizada por los alumnos seleccionados es la de Repetición, de Práctica y Memorización. Se centran en la aplicación de los algoritmos, en la repetición e imitación de ejercicios resueltos


Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

anteriormente porque hasta el momento esa práctica le resultó efectiva; pero cuando esa forma de resolver no es la correcta, María y Jorge la aplican igualmente porque carecen de fundamentos que les ayude a reflexionar; mientras que Rosa, Silvina y Laura acomodan la estrategia al nuevo planteo. Sin embargo, este planteo se caracteriza por no crear nuevas maneras de resolver, ni animarse a innovar. Esto se observó cuando no pudieron resolver ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones pues antes nunca se les habían presentado o eran consideradas como "mal planteadas por los docentes".

En la entrevista Laura dio a entender que realiza un estudio previo antes de resolver un ejercicio o un problema, indaga distintas formas de proceder hasta que elige la que ella considera más conveniente. Sin embargo, en otras ocasiones, al igual que Silvina, resuelve mecánicamente de la manera que "*se le ocurrió primero*". Es decir, no siempre aplica Estrategias de Selección.

Realizan un intento de utilizar Estrategias Cognitivas de Elaboración. Se observó que no tienen experiencias en realizar Inferencias. La manera más simple de haberlo hecho era interpretando de antemano las expresiones simbólicas que representan las ecuaciones, por ejemplo, poder predecir qué valores de la variable anulan el denominador o que la solución real de una raíz cuadrada es un número positivo. También, se esperaba que al hacer las verificaciones pudieran recurrir a sus conocimientos previos y establecer significados acerca de la relación entre el resultado obtenido y el arrojado por la verificación, sin embargo sólo dos alumnas pudieron explicarlo. Aún durante las entrevistas, guiando con preguntas, hubo apenas pequeñas inferencias pero se evidenció una marcada dificultad para emitir conjeturas.

Durante la resolución de problemas pudimos detectar la presencia de Estrategias de Organización y Razonamiento Deductivo, pues pudieron ordenar datos e incógnitas, luego asignar significado a las variables, establecer relaciones entre el texto y las operaciones buscando reglas o patrones conocidos y finalmente formalizar el enunciado a través de una ecuación.

Pudieron traducir un texto simbólicamente; pero la mayor dificultad se presentó cuando debían explicar o justificar lo realizado en símbolos con su lenguaje



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

coloquial. Las explicaciones dadas mostraron un lenguaje sencillo, que en algunos casos coincidía con lo resuelto en el ejercicio; en otros, el lenguaje coloquial usado fue erróneo, lo cual indica falta de dominio del mismo, quizás por la escasa experiencia en realizar este tipo de actividades. Esto es muy importante destacar porque la utilización del lenguaje formal es fundamental, por un lado para explicar el accionar de manera precisa, tal como la matemática lo exige; y por otro, para que los alumnos sean capaces de ordenar, agrupar, clasificar, relacionar distintas situaciones o resultados; es decir, de desarrollar Estrategias de Organización y Elaboración. Desde la actividad docente se debe estimular el desarrollo de estas Estrategias porque permitiría afianzar el pensamiento lógico – formal y construir con más eficacia el conocimiento matemático en los futuros profesores.

### *IV.2. Estrategias Metacognitivas*

Con respecto a la persona y a la estrategia fueron pocos los elementos que brindaron información sobre la aplicación de estas Estrategias. A las alumnas entrevistadas les costó hablar de sí mismas, de sus hábitos de estudio y de sus capacidades, quizás porque antes no habrían indagado al respecto. Con respecto a las tareas propuestas se pudo evidenciar poca presencia de conocimiento metacognitivo, por eso se optó por describir estas estrategias en dos grupos: de Planificación y de Control por un lado y de Evaluación por otro.

#### IV.2.1. ***De Evaluación*** (Monitoreo y Autoevaluación)

Estudiando las evaluaciones se ha podido evidenciar que los alumnos revisan el seguimiento de su aprendizaje si se estimula a ello. Esto es, como no se exige hacer las verificaciones, pocos las hacen, sólo dos de los seleccionados, en consecuencia no las aprovechan para revisar su accionar. En cambio, al realizar preguntas que



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

exijan autovaloración sobre su forma de resolver, ineludiblemente deben formular algún juicio acerca de su aprendizaje. Pero, por la falta de fundamentos teóricos (como el conocimiento de las propiedades de las operaciones) no se sienten capaces de evaluar, por ejemplo, la incoherencia entre la solución obtenida y lo que arroja la verificación, o de deducir porque y dónde cometen errores. Jorge sabe que los comete pero no puede explicar porqué: *"creo que no está correctamente resuelta porque lo hice de dos formas y en una me da un resultado que no encaja con la verificación y el otro sale que no tiene solución".* Se evidencia que Jorge pone en marcha diversos recursos alternativos, para encontrar el error, pero, no posee las herramientas necesarias para identificarlo y evaluar su desenvolvimiento.

Dos alumnas manifiestan seguridad de no haber cometido errores. Por un lado Rosa explica y justifica lo que hace: *"… me siento segura de que mi resolución es correcta, porque me son conocidas y de fácil aplicación y sólo utilicé un artilugio matemático en la radicación del ejercicio 2 f) para eliminar la radicación…"*. (Llama artilugio matemático a la propiedad de elevar al cuadrado a ambos miembros de una igualdad). Esto es porque es una alumna tiene experiencias previas que favorecen su capacidad para justificar sus decisiones y puede autoevaluarse.

Por otro lado, Laura, muestra una preocupante seguridad en su accionar "correctamente mecánico", manifiesta estar segura de resolver bien y, efectivamente, aplica apropiadamente las propiedades, pero como no analiza ni reflexiona mientras resuelve no se da la posibilidad de dudar y evaluar lo que hace. Ahora bien, durante la entrevista se pudo observar que aplica Estrategia de Monitoreo cuando al resolver una ecuación dada por la docente, describe, en voz alta, lo realizado en cada paso. Se puede inferir que lo hace como una manera de revisar su aprendizaje, controlando el procedimiento seguido y a su vez esperando la aprobación de la docente.

Silvina, se autoevalúa cuando reconoce que su manera de resolver es mecánica: "*bah, no sé, es que es muy mecánico cómo lo hago, no sé porqué lo hago"*, y cuando admite que cuando estudia se focaliza en el tema y no relaciona: "*Eso de relacionar es lo que más me cuesta. Digamos que me centralizo en el tema y no relaciono, recién cuando alguien me lo dice ahí me cae la ficha que tiene algo que ver".*



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

### IV.2.2. ***Estrategias de Planificación y Control***

Tanto Laura como Silvina detectan que son capaces de identificar lo que saben, lo que no y que el uso de libros es fundamental para organizar y controlar la evolución de sus aprendizajes. Ante las dudas o la necesidad de comprender mejor algún tema, ambas recurren a libros: Laura explica: *"En la facultad (*anterior a la que asiste actualmente*) no usábamos libros pero yo consultaba libros de la biblioteca, para completar algunas explicaciones porque los profes sólo nos daban apuntes".* Silvina expresa: "*Tengo muchos libros que heredé de mi abuelo, de todas las materias. Tengo libros con hojas amarillitas. Son libros muy viejitos, pero los tengo bien forraditos, de todas las materias. Entonces cualquier dudita yo voy a esos libros… Cuando yo tengo una duda, no me quedo con esa duda, busco en los libros".*

### IV.2.3. ***Acerca de las Estrategias Metacognitivas***

Como se puede observar, son escasas las maneras de evidenciar Estrategias Metacognitivas. Es probable que la evaluación diagnóstica planteada no fuera suficiente para ponerlas en evidencia; sin embargo durante la entrevista tampoco se pudo notar, de manera evidente, su presencia. Se podría decir que los alumnos no practican Estrategias Metacognitivas con respecto a la persona y a la estrategia utilizada; pero en referencia a la tarea, se puede evidenciar levemente que Monitorean, se Autoevalúan y en algunos casos pueden Planificar si se estimula a ello, con preguntas o actividades preparadas para tal fin.

## ***IV. 3. Estrategias de Apoyo***



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

IV.3.1. ***Referidas a las Condiciones Físicas y Ambientales***

Estas Estrategias las notamos combinadas con Estrategias Metacognitivas, por ejemplo cuando las alumnas se disponen física y anímicamente para aprender, también planifican y ordenan sus apuntes. Al preguntarle cómo organizan para estudiar y para preparar los exámenes, ambas coinciden en lo conveniente que es prepararse con tiempo. Laura nos cuenta: "*Antes con tiempo busco los libros, y preparo con tiempo, pero también me ha tocado que he tenido que estudiar todo junto antes del parcial. Me resulta mejor estudiar con tiempo y repasar tranquila y así ya voy insegura"* y Silvina es aún más organizada: "*todo junto es pesado, yo, digamos, programo mis días estudiando un poquito hoy, otro poquito mañana, me voy marcando, hasta hoy tengo que ver esto y así…"*

***IV.3.2. Referidas a las Condiciones Psicológicas***

IV.3.2.a. ***Afectivas***

Estas Estrategias son fundamentales para fortalecer a los estudiantes en momentos difíciles, se refieren a gustos, intereses, personas que les ayudan. Las alumnas entrevistadas no fueron muy explícitas para responder acerca de ello, sólo indicaron que eligieron esta carrera porque quisieron y no porque alguna persona se los sugirió y que en todo momento se sienten apoyadas por su familia. No tienen hábitos definidos que les sirvan de apoyo a la hora de estudiar, no consideran ninguna situación u objeto que sea imprescindible, salvo la calculadora que a Silvina le da más seguridad para resolver.

IV.3.2.b. ***Motivacionales***



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

Estas Estrategias son importantes en la formación de los estudiantes porque muchas veces sus aspiraciones para lograr el éxito (o destacarse por su fracaso) son decisivas a la hora de estudiar y de elegir una carrera. Ambas alumnas afirman que eligieron esta carrera porque les gusta la matemática y enseñar. Laura que previamente estudió otra carrera expresa el motivo de su elección: "*me gusto la carrera, todos me decían que la carrera de contador público tenía más salida económica y que también tenía mucha matemática, entonces por eso me volqué a esa carrera, pero a mí me gusta enseñar, siempre me gustó matemática y enseñar siempre me gustó"*. Es decir, lo que a ella la lleva a elegir la carrera es su vocación docente a pesar de que económicamente no reditúa como la de Contador Público.

Se evidencian Estrategias de Logro cuando las alumnas entrevistadas expresan que les agrada obtener buenas notas cuando se esfuerzan. Dicen que no estudian por la nota, sin embargo, se desilusionan cuando no obtienen lo esperado y reflexionan sobre sus errores para mejorar. Silvina expresa cómo se siente cuando obtiene una buena calificación: *"me siento como que me supero… Nunca me exigieron (*tener notas altas*) pero yo en todas las materias me gustaba sacarme 10, me nace por dentro"*.

Ante la pregunta si les gusta profundizar los contenidos, ambas afirmaron que si entendieron el tema, no, sólo lo hacen si tienen dudas: "*Yo hago lo que me dan, estos de factoreo los hice a todos"…* "*me conformé con los que ya había hecho"*, no busca mejorar, está satisfecha con su logro

Sus aspiraciones son, por ahora, recibirse y "*poder a enseñar en la secundaria y si es posible en la Universidad"*, todavía no piensan en seguir estudiando posgrados.

### IV.3.2.c. ***Actitudinales***

Con respecto a cómo organizan sus maneras de aprender, tanto Silvina como Laura utilizan los apuntes de clase y consultan libros si lo creen necesario. Silvina es más detallista para explicar su organización a la hora de estudiar y se siente segura por que



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

le ha dado buenos resultados. Para comprender inicialmente una tarea lo hace sola, consultando libros o internet, luego a sus compañeros y en última instancia al profesor: "*Primero sola…Por ahí me pasa lo que me pasó en estos días, que no entendí factoreo y entonces empecé a preguntar a mis compañeros y vi que todos teníamos las mismas dudas, ya voy y busco un profesor. Cuando tenemos distintas dudas, o sea, a veces entre las compañeras una entendía una cosa, otra entendía otra parte y las íbamos uniendo, digamos, y armábamos una construcción y si no puedo solucionarlo le preguntábamos a la profesora o a los tutores. Pero cuando me pasaba en el secundario, iba y agarraba un libro o buscaba en internet."*

Laura se siente mejor cuando hace bien las cosas que cuando obtiene una buena nota y es perseverante y se esfuerza por lograr lo mejor: "*Cuando resuelvo un ejercicio, me gusta mucho, lo leo bien, lo leo, lo leo bien una o dos veces, lo resuelvo, me fijo que este bien, después me pongo contenta… Me dan ganas de hacer las cosas mejor"*.

Ambas alumnas encuestadas toman apuntes, Laura es de escribir mucho y completar con lo aprendido por medio de libros o en clases de consulta:

L- *En clase tomo apuntes, soy de escribir mucho*

*D - Cuando vas a tu casa, ¿los completas?*

*L - Claro, agregándole cositas así…*

Mientras que Silvina los lee hasta que los incorpora en su aprendizaje. No los completa con lo extraído de los libros, los utiliza tal como están:

*D-Y ¿qué haces con esos apuntes?*

*S - Los leo, el tema que me dan lo leo, lo leo.*

*D - ¿Los completas después con lo que encuentras en los libros?*

*S - No. Si yo entendí, lo dejo como está y si no entendí voy a algún libro pero no completo el apunte.*

Les agrada estudiar y ayudar en el aprendizaje de sus compañeros, Laura lleva mucho tiempo preparando alumnos de manera particular y Silvina sólo lo ha puesto en práctica en el aula: *"Me di cuenta que me gustaba en la misma escuela, porque teníamos matemática, física, química y mis compañeros no entendían algo y me*



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9

*preguntaban, les explicaba y ellos terminaban entendiendo, por eso yo pensé acá algo hay, algo tengo…"*

Con respecto a la relación con el docente se pudo observar que de acuerdo a sus dichos, en algunas ocasiones no se conforman con lo que indica el profesor; sin embargo, durante la entrevista cuando resolvieron ejercicios el docente investigador observó que estaban muy atentas a las expresiones o sugerencias dadas por él.

### IV.3.2.d. ***Acerca de las Estrategias de Apoyo***

Las Estrategias de Apoyo son importantes porque en algunos casos condicionan el aprendizaje. Se observó que la aplicación de las Estrategias Motivacionales y Actitudinales son más practicadas que las Afectivas. Se destacó el hecho de que estas alumnas, según la entrevista, cuando tienen dudas en lo que se quiere aprender recurren a su estudio individual, a sus compañeros, a sus libros y en última instancia al profesor. Lo cual no condice con la actitud de la mayoría de los ingresantes a nuestra facultad (Olmedo, 1996) que manifiestan una marcada dependencia del profesor y no desarrollan el estudio autónomo. La nota es un aspecto importante como un premio a su esfuerzo y podríamos decir que planifican con tiempo sus exámenes. Estas Estrategias se observaron muy relacionadas con las Cognitivas y Metacognitivas.



Universidad Nacional de Catamarca – Secretaría de Ciencia y Tecnología
Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-661-145-9