GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO Nº 22

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:
- **Interprete la información de un vector.**
- **Opere con vectores en el plano.**
- **Resuelva operaciones y problemas que involucren magnitudes vectoriales**

CONTENIDOS:

- **Proyección de vectores. Componentes de un vector**
- **Suma de Varios Vectores: Método de la Poligonal**
- **Aplicaciones de Vectores a Cinemática**
- **Operaciones con vectores: analíticamente y gráficamente**
- **Aplicaciones**

NOTA:
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera y segunda parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al tercer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDADES

- **Proyección de un vector sobre otro: Componentes de un vector**

La proyección de un vector **A** sobre otro **B**, denotado por $\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\,\mathbf{A}$, es otro vector:

$$\mathrm{Proy}_{\mathbf{B}}\,\mathbf{A} = \mathrm{A}\cos\theta\ \mathbf{e}_{\mathbf{B}}$$

donde $(\mathrm{A}\cos\theta)$ es la magnitud o módulo, θ es el ángulo que los vectores forman y $\mathbf{e}_{\mathbf{B}}$ es un vector unitario en la dirección y sentido de **B**, figura 1.

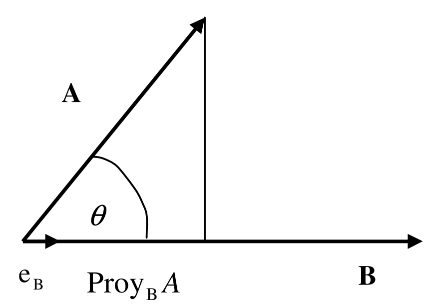

Fig. 1: Vector Proyección

La componente de un vector **A** a lo largo de otro vector **B** no nulo, se denota como un escalar que es el módulo del vector proyección.

- **Componentes rectangulares**

Cualquier vector **V** puede considerarse como la suma de dos o más vectores, siendo el número de posibilidades, infinito. A cualquier conjunto de vectores que al sumarse resulte **V**, se les llama componentes de **V**.
Las componentes más comúnmente usadas son las rectangulares, es decir, el vector se expresa como la suma de vectores perpendiculares entre sí, figura 2. En el plano, **V** puede expresarse:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_x + \boldsymbol{V}_y$$

con $\boldsymbol{V}_x = \boldsymbol{u}_x V_x$, $\boldsymbol{V}_y = \boldsymbol{u}_y V_y$

o bien: $V_x = V \cos \alpha$;
$V_y = V \text{ sen } \alpha$

siendo $\boldsymbol{u}_x$ y $\boldsymbol{u}_y$, vectores unitarios.

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}_x V_x + \boldsymbol{u}_y V_y$$

Esta ecuación expresa un vector en función de sus componentes rectangulares en dos dimensiones.
Así: $\boldsymbol{V} = V \cos \alpha \; \boldsymbol{u}_x + V \text{ sen } \alpha \boldsymbol{u}_y$

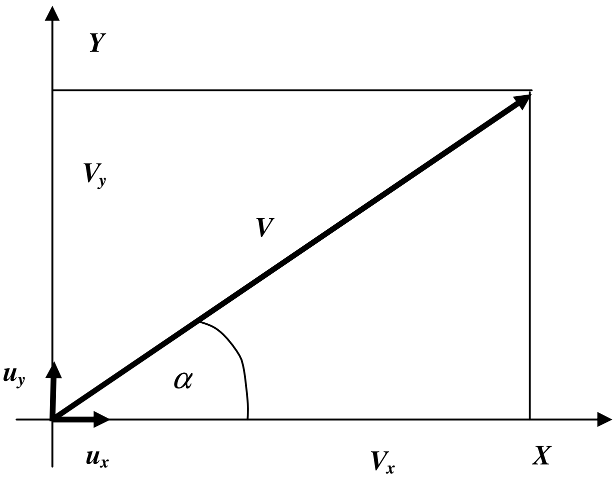

Fig.2. Descomposición rectangular de un vector

Es importante rescatar que las componentes de un vector en una dirección particular son iguales a la proyección del vector en aquella dirección.

EJERCICIOS:

1.- (EO) Siendo A un vector de 6 unidades con ángulo de 65° respecto del semieje $+X$, halle las componentes respecto de los ejes coordenadas.

2.- (EO) Encontrar las componentes ortogonales de un vector de 12 unidades de longitud, cuando éste forma con respecto al eje positivo de las X un ángulo de:
a)40° b)60° c)120° d)250°.

- **Adición de varios vectores: Método de la Poligonal**

Para sumar varios vectores $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \ldots$, extendemos el procedimiento indicado para el caso de dos vectores. El método gráfico para tres o más vectores se muestra en la fig. 3, y se lo denomina ***método de la poligonal***. Asi, dibujamos un vector después de otro, o sea consecutivo, indicando la suma del vector por la línea que va del origen del primero al extremo del último. Luego:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \ldots$$

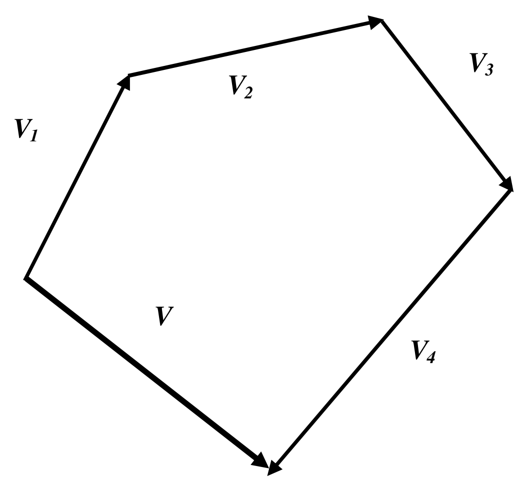

Fig.3. Suma de varios vectores

La forma de expresar $\mathbf{V}$ en términos de los vectores sumandos $\mathbf{V}_i$ es a través del uso de las componentes rectangulares de cada vector. Consideremos que todos los vectores están en un mismo plano, de esta forma existen sólo dos componentes de cada vector. El método que usaremos es el llamado ***método de descomposición rectangular***, y que conviene aparte de la gráfica de la descomposición de cada uno de los vectores dados, emplear el siguiente desarrollo algebraico.

Entonces $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{u}_x\ V_{1x} + \boldsymbol{u}_y\ V_{1y}) + (\boldsymbol{u}_x\ V_{2x} + \boldsymbol{u}_y\ V_{2y}) + (\boldsymbol{u}_x\ V_{3x} + \boldsymbol{u}_y\ V_{3y}) + ...$

$$= \boldsymbol{u}_x\,(V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + ...) + \boldsymbol{u}_y\,(V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + ...)$$

Por consiguiente existen para la resultante dos componentes que son las sumas de las componentes de cada vector según las distintas proyecciones:

$$V_x = \sum_i V_{ix} = \sum_i V_i \cos\alpha_i \qquad V_y = \sum_i V_{iy} = \sum_i V_i \operatorname{sen}\alpha_i \qquad [1]$$

donde α_i es el ángulo que cada vector V_i hace con el semieje positivo X .Conocido estas componentes resultantes se halla **V**.

Ejemplo 1: Dados cuatro vectores coplanares de 8,12,10 y 6 unidades de longitud respectivamente; los tres últimos hacen con el primer vector ángulos de 70º, 150º y 200º. Encontrar la magnitud y la dirección del vector resultante.

Solución: Realizaremos la descomposición rectangular de los vectores dados. En forma paralela se realizará dos métodos que resultan apropiados, uno geométrico, que permite visualizar los vectores dados, y las componentes de ellos en las direcciones de los ejes X e Y, y que finalmente permitirá comparar y verificar con el resultado que se obtenga a través del otro método, el algebraico, el cuál es inmediato por la fórmula [1].

Calculamos las resultantes de las proyecciones de los vectores sobre el eje X y sobre el eje Y por separados, según [1], y posteriormente reconociendo a éstas como las componentes del vector suma, comparamos con la gráfica correspondiente del método de la poligonal:

$$R_x = 8\cos0° + 12\cos70° + 10\cos150° + 6\cos200° = 8 + 4{,}104 + (-8{,}66) + (-5{,}638) = -2{,}194$$

$$R_y = 8\operatorname{sen}0° + 12\operatorname{sen}70° + 10\operatorname{sen}150° + 6\operatorname{sen}200° = 0 + 11{,}276 + 5 + (-2{,}052) = 14{,}224$$

Así, la magnitud del vector resultante según sus componentes está dado por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 14{,}3922$$

Por último, calculamos el ángulo del vector resultante respecto al eje X:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{R_y}{R_x} = -81°\ 13'53''$$

Ejemplo 2: Hallar la suma de los vectores: $\mathbf{V_1} = 5\,\mathbf{u}_x + 6\,\mathbf{u}_y$ $\quad \mathbf{V}_2 = -3\,\mathbf{u}_x + 8\,\mathbf{u}_y$

$\mathbf{V_3} = 2\ \mathbf{u}_x + (-5)\ \mathbf{u}_y$ $\quad \mathbf{V_4} = 9\ \mathbf{u}_x +\ \mathbf{u}_y$ $\quad \mathbf{V_5} = -4\,\mathbf{u}_x + (-2)\,\mathbf{u}_y$

Solución: Aplicando la ecuación [1], tenemos:

$V_x = 5 + (-3) + 2 + 9 + (-4) = 9$

$V_y = 6 + 8 + (-5) + 1 + (-2) = 8$ es decir : $\mathbf{V} = 9\,\mathbf{u}_x + 8\,\mathbf{u}_y$

La magnitud de **V** es $V = \sqrt{81+64} = \sqrt{145} = 12{,}04$ unidades.

La dirección se halla a partir de: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{V_y}{V_x} = 0{,}889$, es decir $\alpha = 41º38´$, que es el ángulo que **V** hace con el eje X.

EJERCICIOS:

3.- (EO) Tres vectores situados en un mismo plano tienen 8, 3 y 6 unidades de longitud. El primero y el segundo forman un ángulo de 60°, mientras que el segundo con el tercero forman un ángulo de 50°. Encontrar la magnitud del vector resultante de la suma de los tres vectores dados y su dirección con respecto al primero de ellos.

4.- (EO) Tres vectores situados en un mismo plano tienen 6, 7 y 5 unidades de longitud. Los ángulos que forman con respecto del primero de ellos son de 65° y 150°. Hallar la suma de los vectores dados.

5.-Cuatro vectores coplanares tienen 4,7,10 y 12 unidades respectivamente y sus ángulos respecto del semi eje positivo de las X es de 40° 125° 160° y 225°. Encuentre el vector suma de los dados.

- **Aplicaciones a problemas de Cinemática**

Como una aplicación de los vectores en situaciones problemáticas puede considerarse el uso en planteos Físicos, tales como la cinemática, estática y dinámica. En estos casos la suposición Física es el reconocer que la velocidad, la aceleración, la fuerza entre otras son cantidades vectoriales.
Supongamos que tenemos un pez moviéndose con una velocidad $\mathbf{V_P}$ relativa al agua. Si el agua esta quieta $\mathbf{V_P}$ es también la velocidad del pez medida con relación a un observador en la orilla. Pero si el agua fluye a una cierta velocidad, esto introduce un factor de arrastre que afecta a la velocidad del pez. Asi la velocidad resultante del pez, medida por el pescador en la orilla, es la suma vectorial de la velocidad del pez $\mathbf{V_p}$ relativa al agua y la velocidad de arrastre $\mathbf{V_c}$ debida a la corriente del agua. Esto es, $\mathbf{V}=\mathbf{V_p}+\mathbf{V_c}$ **.**
En forma análoga se pueden presentar ejemplos con objetos (aves) que vuelan con viento.

Ejemplo 3: Un barco navega hacia el este a 12 metros por segundo. Un pasajero se mueve en la cubierta del barco a $5\ m/s$ en dirección perpendicular al del movimiento de éste y hacia el norte. ¿Cuál es la velocidad del pasajero respecto al mar?.

Solución: El pasajero tiene dos velocidades simultáneas. Debido a encontrarse a bordo del barco, se está moviendo hacia el este a razón de $12m/s$. Posee además una velocidad de $5m/s$ sobre la cubierta del barco. Su velocidad real, respecto al mar, es la suma de estas dos velocidades. La suma aparece representada en la figura 4. La suma vectorial de la velocidad AB del barco, y de la velocidad BC del pasajero respecto al barco, es el vector AC que une el origen libre con el extremo libre. En este caso el triángulo es rectángulo y, según el teorema de Pitágoras:

$$\overline{\boldsymbol{AC}}^{2} = \overline{\boldsymbol{AB}}^{2} + \overline{\boldsymbol{BC}}^{2} = \left(12^2 + 5^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right)^2 = 169\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right)^2$$

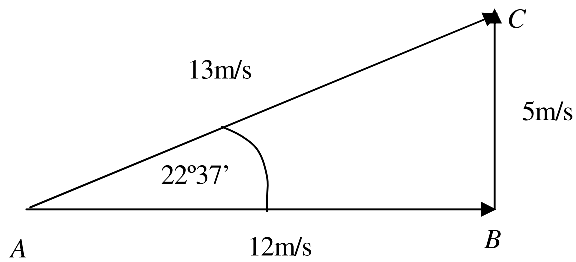

Fig.4. Representación del ejemplo 3

Así, el valor de la velocidad del pasajero respecto al mar es de $13 m/s$.

Para hallar la dirección de esta velocidad se tiene: $\operatorname{tg}\theta = \frac{5}{12} = 0{,}4167$ y, por lo tanto: θ = 22º37´ al norte del este.

PROBLEMAS

6.- (EO) Una lancha de motor va cruzando en línea recta un río, pero es arrastrada por la corriente. Sin la corriente, la velocidad del bote sería de $5 km/hora$ cruzando el río directamente, sin el motor la lancha sería arrastrada por la corriente a una velocidad de $3\ km/hora$ río abajo. Encuentre la velocidad de la lancha de motor al cruzar el río.

7.-En forma gráfica determine cada uno de los desplazamientos siguientes, posteriormente halle la ubicación final luego de los tres desplazamientos, grafica y analíticamente:
I) $20\ m$ a $30°$ II) $16\ m$ a $97°$ III) $12\ m$ a $125°$

8.- (EO) Un automóvil recorre $80 km$ al oeste y después $30 km$ al suroeste a $45°$ de la dirección anterior. ¿Cuál es la distancia del punto de partida luego de efectuar los dos desplazamientos?