GUIAS DE ACTIVIDADES Y DE TRABAJO PRACTICO N° 15

OBJETIVOS:

Lograr que el Alumno:

- **Interprete las Funciones Exponenciales**
- **Distinga Modelos Matemáticos expresados mediante Funciones Exponenciales.**
- **Represente funciones exponenciales, logarítmicas.**
- **Interprete las funciones inversas de las Exponenciales, logarítmicas.**

CONTENIDOS:

- **Funciones exponenciales.**
- **Modelos Matemáticos Continuos mediante Funciones Exponenciales**
- **Funciones Logarítmicas**

NOTA:

- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al segundo parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDADES

- **Funciones Exponenciales**

La función $y = a^x$, donde x es cualquier valor real con a real positivo, se denomina ***función exponencial***. Se caracterizan por el aumento de la función en forma proporcional al crecimiento de x.

Estas curvas tienen gran importancia en todas las ciencias. El valor de esta función aumenta muy rápidamente con x. Esta ley es característica de aquellos procesos que crecen sin límite, aunque es evidente que en la naturaleza tales procesos no pueden continuar indefinidamente. Siempre otros factores aparecen inhibiendo el crecimiento.

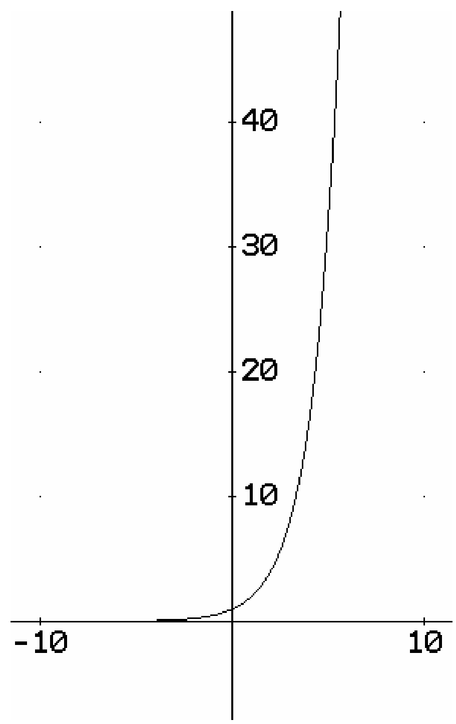
Ejemplo 1: Estudiar la función exponencial $y = 2^x$.

Solución: Dado la potencia de base 2, donde el exponente es todo real x, procedemos a realizar una tabla de valores de tal función. Ante todo recordemos que si el exponente es 0, la potencia es igual a 1. Entonces tomemos en primer lugar exponentes positivos y luego negativos:

x	1	2	3	4	5
$y = 2^x$	2	4	8	16	32

x	-1	-2	-3	-4	-5
$y = 2^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Con los puntos encontrados realizamos la gráfica de la función $y = 2^x$



Observaciones:

1) Es frecuente utilizar distintas escalas en ambos ejes, pues el crecimiento de la exponencial es sumamente rápido. Lo ideal es la escala logarítmica, más aún el uso de papel semilogaritmico.
2) Se utiliza para graficar solo el espacio o semiplano superior del sistema de coordenadas, pues las potencias de base positiva son siempre positivas.
3) Toda curva de la función exponencial pasa por el punto (0,1), ya que $a^0 = 1$, cualquiera sea el número real a.
4) Las representaciones de a^x y $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto al eje *y.*
5) Mientras a^x es monótona creciente, o sea crece a medida que crece x, $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ es monótona decreciente.

EJERCICIOS:

1.- Representar $y = a^x$ en cada uno de los siguientes casos. Investigar si es función, justificar. **a)** $a = 1{,}1$ **b)** $a = 0{,}9$

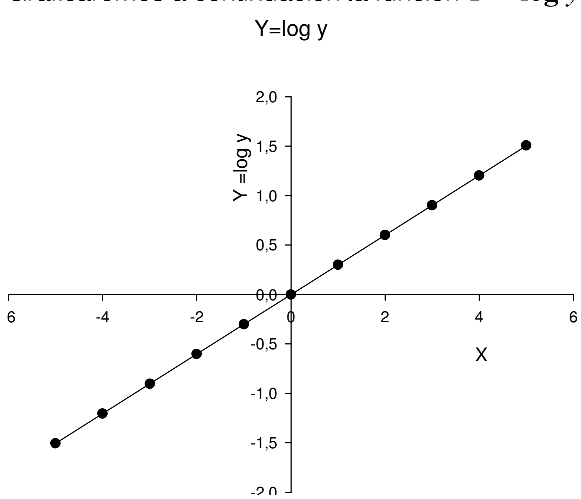
2.- (EO) Representar en un sólo gráfico las curvas que se indica en cada apartado:

a) $y = 3^x$; $y = 4^x$; $y = 5^x$ **b)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

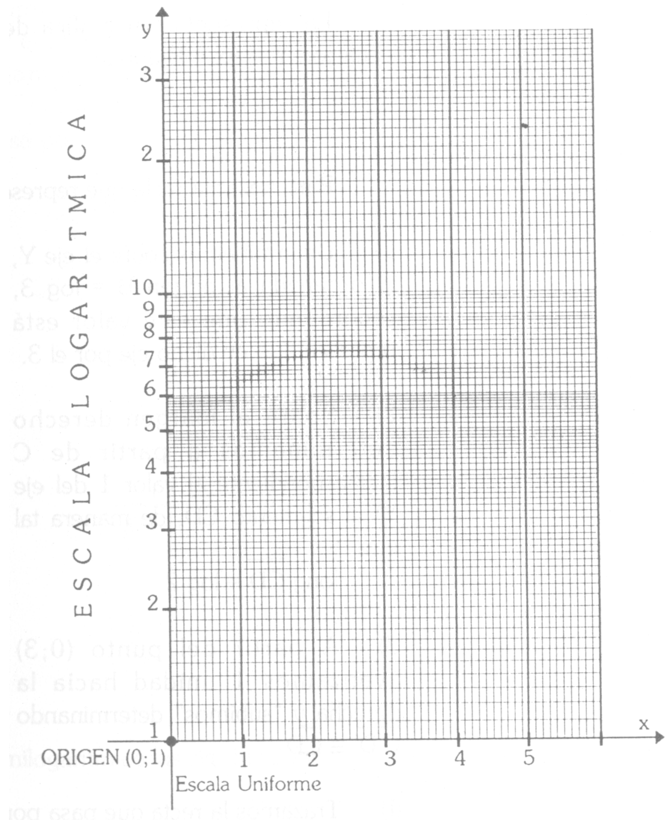
- **Escala logarítmica**

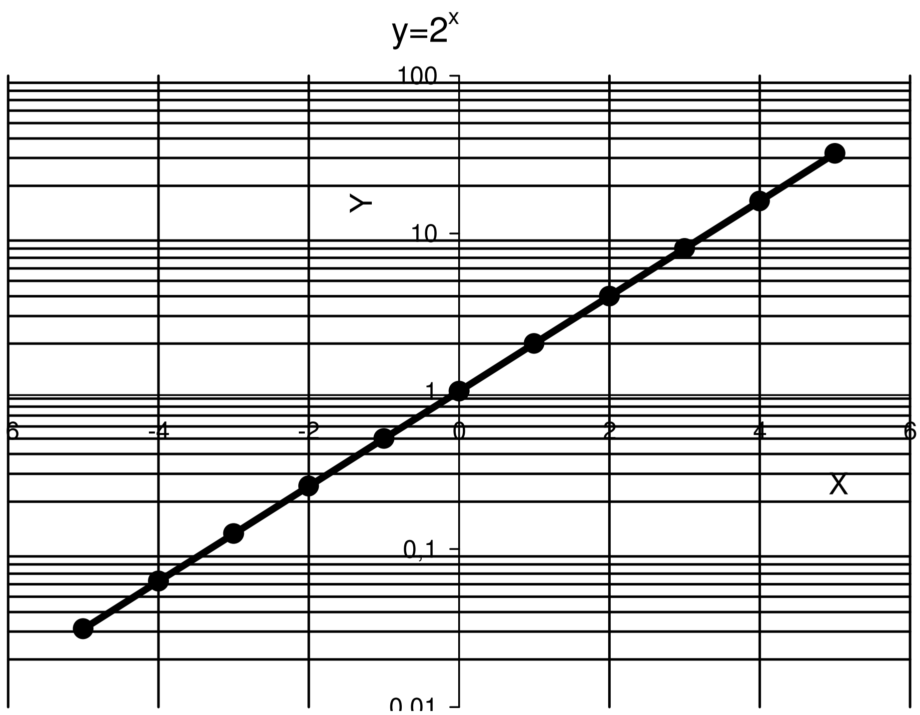
Al graficar la función del ejemplo 1 observamos que el rápido crecimiento de los valores de las imágenes hace que debamos recurrir a una escala en el eje Y que aumente considerablemente, según lo necesario.
Por el momento hemos estado usando en la representación grafica sistemas de coordenadas con escalas uniforme, entendiendo por escala uniforme a aquellas en donde las distancias son equidistantes.
Ahora vamos a transformar cada valor de la imagen calculando su logaritmo de manera que en la tercera columna aparecerá $\log y$.
Graficaremos a continuación la función $Y = \log y$

x	$y = 2^x$	$\log y$
-5	$\frac{1}{32}$	-1,50515
-4	$\frac{1}{16}$	-1,20412
-3	$\frac{1}{8}$	-0,90309
-2	$\frac{1}{4}$	-0,60206
-1	$\frac{1}{2}$	-0,30103
0	1	0
1	2	0,30103
2	4	0,60206
3	8	0,90309
4	16	1,20412
5	32	1,50515



Esta alternativa de poder representar a las funciones que contienen a expresiones exponenciales, mediante una transformación puede ser reemplazada por las escalas logaritmicas, las cuales en vez de transformar la imagen son las escalas las que se hallan modificadas.
Estas escalas no son equidistantes, sino que a partir de un origen correspondiente al numero 1, se le asignan a la derecha potencias positivas de 10 y a la izquierda potencias negativas de 10.
Si solo el eje vertical lleva esta escala se llama al sistema de ejes escala semilogaritmica, y si se usa en ambos ejes escala logaritmica, o simplemente loglog.
A la derecha se muestra un sistema de ejes en escala semilogaritmica.





EJERCICIOS:

3.- (EO) Representar el ejercicio 2.a) en escala semilogaritmica.

- **Modelos Matemáticos Continuos: el número *e* , crecimiento exponencial**

Si continuamos con la idea de un modelo de crecimiento, pero esta vez hacemos que nuestro tiempo de observación sea cada vez más inmediato al anterior, tendremos una observación continua. En general, si la unidad se halla particionada en m intervalos de tiempo, en los cuales se evalúa el crecimiento, tendremos en el i-ésimo intervalo de tiempo la población con tamaño:

$$P_i = P_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^i$$

Llega el momento más apasionante, debido a que el lector se pone a trabajar cuál si fuera un verdadero investigador, en realidad eso es lo que hará. Con una calculadora manual, y con todo el entusiasmo que consiga, encuentre el límite de la potencia que está dentro del corchete de la última expresión, para ello sugerimos completar la siguiente tabla dados algunos valores particulares:

Z	$\frac{1}{z}$	1+z	$(1+z)^{\frac{1}{z}}$
1			
0,1			
0,01			
0,001			
0,0001			

Cada valor encontrado se aproxima más al número irracional e, que cuenta con una cantidad infinita de cifras decimales no periódicas, pero que se suele mencionar con el valor redondeado de 2,71828, y es la base los logaritmos naturales o nepperianos.

Volviendo al problema inicial de crecimiento poblacional, llegamos al llamado ***Crecimiento Exponencial*** donde la notación es:

$$P_i = P_0 e^{ir}$$

Ejemplo 2: La tasa de crecimiento de la población de una ciudad dada es proporcional a la población. Si la población en 1930 era de 50.000 habitantes y en 1960 era de 75.000, ¿cuál será la población esperada para el 2005?

Solución: De los datos se tiene: $P_0 = 50.000; P_{30} = 75.000$. Entonces: $P_{30} = P_0 e^{30r}$

Reemplazando por los valores conocidos y simplificando nos queda: $e^{30r} = \frac{3}{2}$

Dando r=0,0135155. Con éste valor buscamos la población para el 2005, o sea t= 75: $P_{75} = P_0 e^{75r} = 137.784$

EJERCICIOS:

4.- (EO) (AB) La tasa de crecimiento natural da la población de una cierta ciudad es proporcional al número de habitantes. Si la población crece de 40.000 a 60.000 habitantes en 40 años, ¿cuándo habrá 80.000 habitantes en la ciudad?

5.- (EO) (AB) La población de una cierta ciudad particular se duplicó en 60 años, de 1930 a 1990. Si la tasa de crecimiento de la población en cualquier instante es proporcional a la población en ese momento, y la población en 1990 era de 80.000 habitantes, calcule el número de habitantes para el año 2005.

6.- (EO) (AB) Una población bacteriana que se desarrolla en un cierto cultivo crece a una razón que es proporcional al número presente. Si inicialmente hay 1.000 microorganismos en el cultivo y el número se duplica a los 30 minutos, ¿cuántas bacterias habrá en dos horas?.

- **Modelos Matemáticos continuos mediante funciones exponenciales**

Entre las funciones exponenciales se encuentra aquella conocida como la **función exponencial natural**, esta es, $y = e^x$,donde e es el número trascendente cuyo valor aproximado es $2{,}71828$ denominado número exponencial y que aparece continuamente en los trabajo científicos.

Ejemplo 3: En un cierto cultivo bacteriano, el número de bacterias presentes a los *t* minutos se calcula según la función $f(t)$, donde

$$f(t) = Be^{0{,}04t}$$

donde B es una constante. Si inicialmente hay 1.500 bacterias presentes, ¿cuántas habrá después de una hora?.

Solución: Se sabe que $f(0)=1.500$ y además $f(0) = Be^{0{,}04X0} = B.1 = B$ .En consecuencia *B*=1.500
Luego $f(60) = 1500e^{0{,}04X60} = 16.535$
Es decir, al cabo de una hora hay 16.535 bacterias.

Si el problema se reduce a una función que presenta la forma: $f(t) = Be^{-kt}; t \geq 0$ donde B y t son constantes positivas, se dice que el problema en estudio corresponde a un **decrecimiento exponencial.**

Si una población decrece con el tiempo, lo cuál podría ocurrir si la tasa de mortalidad es mayor que la tasa de natalidad, se está frente a un caso de la ley de decrecimiento. Esto ocurre con la radiactividad en los organismos, pues mientras tienen vida existe en ellos cierto grado de radiación, la cuál disminuye o decae a partir del momento en que mueren. Por eso cobra gran importancia las pruebas de radiación en cuerpos sin vida, para determinar su edad estimada. La prueba más conocida es la del Carbono 14.

Ejemplo 4: Si $f(t)$ gramos de una sustancia radiactiva están presente después de t segundos, entonces $f(h) = h.e^{-0{,}3t}$ donde h es una constante. Si inicialmente hay 100gr. De la sustancia, ¿qué cantidad habrá después de 5 segundos?

Solución: La cantidad inicial nos determina la constante, así $h = 100$. Luego, calculando:

$$f(5) = 100.e^{-0{,}3X5} = 22{,}31$$

Por lo tanto a los cinco segundos habrá 22,31 gramos de sustancia radiactiva.

Es imposible predecir cuanto tardará un núcleo determinado en emitir una cierta radiación o en desintegrarse. En cambio es posible describir en promedio el número total de núcleos que se han desintegrado o que quedan por desintegrarse, de una cierta población en un instante dado.
Así se observa que el número de núcleos N presentes que se producen en un tiempo t, es proporcionalmente menor al número de núcleos presentes en un instante $t=0$, por lo que identificamos ***un Decrecimiento Exponencial***, es decir

$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$, donde λ se denomina ***Constante de Desintegración***.

Se define como ***semivida*** de un material radiactivo determinado, al tiempo necesario para que el número inicial de núcleos se reduzca a la mitad. Es decir, la vida media es el tiempo tal que:

$$N_t = \frac{N_0}{2}$$

Esto nos lleva a la expresión: $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Esta es una característica de cada elemento radiactivo y se ha calculado con mucha precisión. Por ejemplo la semivida del radio es de 1656 años, la del polonio es aproximadamente 140 días, mientras que algunos isótopos del uranio tienen semividas del orden de mil millones de años.
Inversamente, en la función exponencial el valor de x queda determinado para todo valor de y, y este valor de x es el logaritmo de y en base a, siempre que éste sea positivo distinto de uno.

En la práctica, sólo se utilizan los logaritmos en base 10 y en base e. De aquí que las funciones logarítmicas en base b son aquellas tales que $y = \log_b x$, con b real positivo distinto de uno.

EJERCICIOS:

7.- (EO) (AB) Si $f(t)$ gramos de una sustancia radiactiva están presentes después de t segundos, entonces

$f(t) = ke^{-0,3t}$ donde k es una constante.

Si inicialmente hay 100gr de la sustancia,¿qué cantidad habrá después de 5s?

8.- (EO) (AB)¿Después de cuántos segundos habrá solamente un gramo de sustancia radiactiva en el ejercicio anterior?.

9.- (EO) (AB) Suponga que $f(t)$ es el número de bacterias presentes en un cierto cultivo a los t minutos y, $f(t) = ke^{0,035t}$ donde k es una constante. Si hay 5.000 bacterias presentes después de 10 minutos, ¿cuántas bacterias hubo inicialmente?

- **Funciones Logarítmicas**

Definición: Se llama función logarítmica de base b en la variable x, a toda imagen y de la forma $y = \log_b x$, donde b es cualquier número real distinto de 1, y x es cualquier numero real.

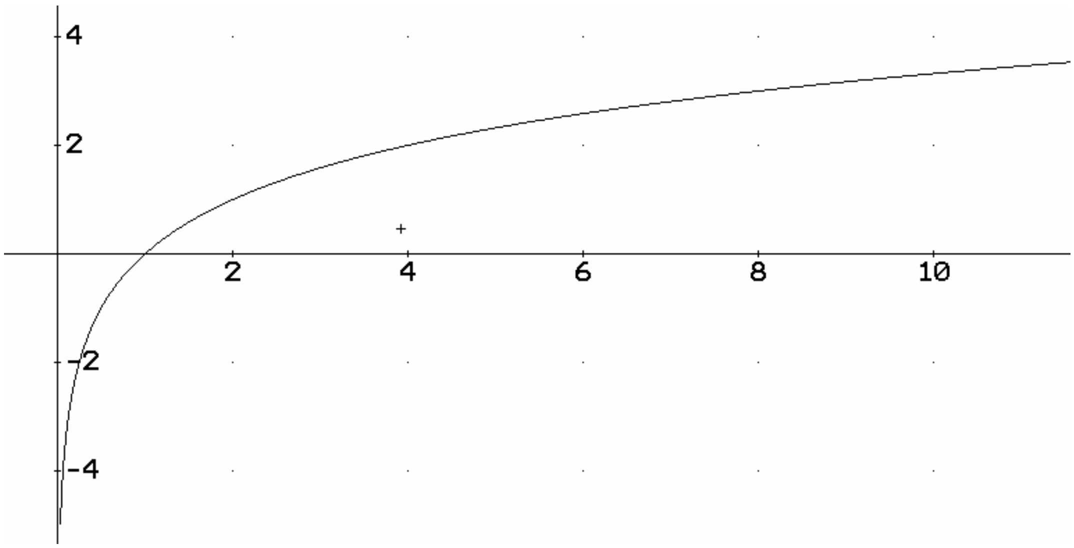
Ejemplo 5: Estudiar la función logarítmica $y = \log_2 x$.

Solución: Dado el logaritmo de base 2, donde la variable es todo real *x*, procedemos a realizar una tabla de valores de tal función. Ante todo recordemos que el logaritmo esta definido para todo número positivo, entonces tomemos primero valores de la variable mayores que 1 y luego menores a 1:

x	$y = \log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{16}$	-4
$\frac{1}{32}$	-5

Con los puntos encontrados realizamos la grafica de la función $y = \log_2 x$



Observaciones:

1) No hay puntos en el segundo y tercer cuadrante.
2) El punto (1,0) siempre pertenece a una grafica de la función logarítmica cualquiera sea la base.
3) La función es siempre creciente.
4) Cuando x crece indefinidamente el crecimiento de y es cada vez más lento, pero y sobrepasa cualquier valor por grande que sea; por lo tanto no hay asíntotas horizontales.
5) Cuando x disminuye, acercándose más y más a cero, y toma valores negativos de módulos tan grandes como se quiera, en consecuencia el eje y es una asintota de la curva.

EJERCICIOS:

10.-Representar en un mismo sistema de coordenadas cartesianas las siguientes funciones. Comparar en cada caso con $y = \log_3 x$ y enunciar una conclusión.

a) $y = 1 + \log_3 x$ **b)** $y = (\log_3 x) - 2$ **c)** $y = \log_3 (x+1)$ **d)** $y = \log_3 (x-2)$

11.-Representar en un sólo gráfico las curvas que se indican: $y = \log_2 x$ $y = \log_4 x$