GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJOS PRACTICOS Nº 14

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:
- **Resuelva correctamente logaritmos y aplique sus propiedades.**
- **Resuelva ecuaciones exponenciales.**
- **Distinga Modelos Matemáticos discretos expresados mediante Progresiones.**

CONTENIDOS:
- **Logaritmo**
- **Progresiones Aritméticas, Geométricas y Geométricas Modificadas**
- **Modelos Matemáticos Discretos mediante Progresiones**
- **Ecuaciones Exponenciales**

NOTA:
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al segundo parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDADES

- **<u>LOGARITMO</u>**

Recuerde que la potenciación tiene varias definiciones, según el conjunto numérico al que pertenecen la base y el exponente. Por otro lado la potenciación tiene a diferencia de la suma y la multiplicación, dos operaciones inversas, esto ocurre porque la potenciación no satisface la propiedad conmutativa; es efecto, si cambiamos el orden de la base y el exponente, en general obtenemos soluciones distintas.

Las operaciones inversas de la potenciación se llaman radicación y logaritmo. Así dada la potencia $2^5 = 32$, donde 2 es la base, 5 el exponente y 32 la potencia, podemos obtener a partir de dos de esos elementos el tercero. Si nos preguntamos cuál es el número que elevado a la quinta potencia es 32, tal pregunta puede expresarse como una ecuación del tipo: $x^5 = 32$, y para despejar la incógnita *x* debemos pasar el exponente 5 al segundo miembro como índice de la raíz, es decir: $x = \sqrt[5]{32}$, con lo cuál se logra que x=2.

Si en cambio la pregunta es, cuál es el exponente al que debemos elevar el número dos para que la potencia sea 32, debemos recurrir a una nueva expresión:

Definición 1: Logaritmo de un número real y positivo $\boldsymbol{a}$, en la base $\boldsymbol{b}$, es el exponente $\boldsymbol{x}$ de la potencia a que debe elevarse dicha base para obtener el número $\boldsymbol{a}$ dado.

Simbólicamente: $\log_b a = x$ sii $b^x = a$

La operación presentada se llama logaritmo y podemos decir que ***el logaritmo es también operación inversa de la potenciación***.

Es importante indicar que las bases de los logaritmos debe ser un número positivo mayor que 1.

Consecuencias de la definición:

a)Los números negativos no tienen logaritmos.

Ejemplo: $\log_4(-16) \neq \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$ En efecto, pues $4^2 = 16$ y $4^{-2} = \dfrac{1}{16}$, y no -16.

b)El logaritmo de la base es uno.

Ejemplo: $\log_b b = 1$, pués $b^1 = b$

c)El logaritmo de uno es cero.

Ejemplo: $\log_b 1 = 0$, pués $b^0 = 1$

Al buscar el logaritmo decimal de 20 obtenemos 1,30103, este resultado es un número decimal, en realidad, puede obtenerse expresiones periódicas también. La parte entera se denomina ***característica*** y la parte decimal ***mantisa***.

Debemos distinguir tres casos al calcular un logaritmo decimal.

1°)**Logaritmos de las potencias de 10**: los únicos números cuyos logaritmos son números enteros son las potencias de exponentes enteros de 10.

2°)**Logaritmos de números mayores a uno**: son ellos números irracionales expresables en forma decimal con la aproximación que se desee, siendo generalmente con cinco cifras decimales. Además, la característica del logaritmo de un número mayor que uno es igual al número de cifras de su parte entera menos uno.

3°)**Logaritmos de los números positivos menores a uno**: la característica es negtiva, irracional y puede expresarse de dos formas: ***monomial*** o ***binomial***. Para aclarar estos términos veamos la siguiente propiedad.

Propiedad 1: ***Invariabilidad de la mantisa***: La mantisa del logaritmo del producto o cociente de un número por la unidad seguida de ceros es igual a la del logaritmo de dicho número.

Aclaremos esto, con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Conociendo que $\log 5432 = 3{,}73496$ encontrar el logaritmo de 543200 y de 54,32.

Solución: Esto es:

$$\begin{aligned} \log 543200 &= \log (5432 \,.\, 100) \\ &= \log 5432 + \log 100 \\ &= 3{,}73496 + 2 \\ &= 5{,}73496 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 54{,}32 &= \log (5432 : 100) \\ &= \log 5432 - \log 100 \\ &= 3{,}73496 - 2 \\ &= 1{,}73496 \end{aligned}$$

Si la mantisa mantiene su valor inalterable, como justificar que: $\log 0{,}5432 = -0{,}26504$?
Recurriendo al ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} \log 0{,}5432 &= \log (5432 : 10000) \\ &= \log 5432 - \log 10000 \\ &= 3{,}73496 - 4 \\ &= -0{,}26504 \qquad [1] \end{aligned}$$

Podemos expresar esto manteniendo fija la mantisa: $\log 0{,}5432 = \bar{1}{,}73496$ [2]

Este nuevo número resulta de restar la parte entera únicamente, y es por eso que el signo se coloca en la parte superior. Las dos formas que mencionamos anteriormente son [1] la forma monomial y [2] la forma binomial.
De lo mencionado hasta aquí, resulta que la potenciación tiene dos operaciones inversas: radicación y logaritmo. Esto lo resumimos así:

$$b = a^n \qquad a = \sqrt[n]{b} \qquad n = \log_b a$$

Mencionamos a continuación las **propiedades de los logaritmos**:

a)Logaritmo del producto: $\log_n (a.b) = \log_n a + \log_n b$

b)Logaritmo del cociente: $\log_n \left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$

c)Logaritmo de una potencia: $\log_n a^k = k.\log_n a$

d)Logaritmo de una raiz: $\log_n \sqrt[k]{a} = \dfrac{\log_n a}{k}$

Finalmente, se menciona la fórmula de **cambio de base**: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Ejemplo 2: Indique el valor del logaritmo a partir de la definición:

$$\mathbf{log}_2 16 = 4 \text{ porque } 2^4 = 16$$

Ejemplo 3: Aplicando las propiedades del logaritmo, calcular: $\mathbf{log}_2(16\times 8) =$

Como $\mathbf{log}_2(16\times 8) = \mathbf{log}_2(2^4 \times 2^3)$ por ser potencias de la misma base del logaritmo

$= \mathbf{log}_2(2^7)$ por producto de potencias de igual base

$= 7 \cdot \mathbf{log}_2 2$ logaritmo de una potencia

$= 7 \cdot 1 = 7$ logaritmo de la base

EJERCICIOS:

1.- Exprese coloquialmente las propiedades de los logaritmos.

2.- Indique el valor del logaritmo a partir de la definición:

a) (EO) $\mathbf{log}_5 125 =$ **b) (EO)** $\mathbf{log}_{\frac{1}{2}} 4 =$ **c)** $\mathbf{log}_{25} \dfrac{1}{5} =$ **d)** $\mathbf{log}_5 \sqrt[3]{5} =$

3.-(EO) Aplicando las propiedades del logaritmo, calcular:

a) $\mathbf{log}_3(27\times 3) =$ **b)** $\mathbf{log}_2(64 : 16) =$ **c)** $\mathbf{log}_2 4^3 =$ **d)** $\mathbf{log}_5 \sqrt[5]{25} =$

4.- (EO) Calcule los logaritmos siguientes escribiendo los números con una aproximación tal que use cuatro cifras decimales.

a.- $\log_2 64 =$ **b.-** $\log_2 512 =$ **c.-** $\log_3 81 =$

d.- $\log 425 =$ **e.-** $\log_5 120 =$ **f.-** $\log 42 =$

g.- $\log 4{,}25 =$ **h.-** $\log 128 =$ **i.-** $\log 0{,}524 =$

- **ECUACIONES EXPONENCIALES**

Nuestro paseo por las ecuaciones lo extendemos a las ecuaciones, en donde la incógnita está en el exponente, por ejemplo:

$$5^x = 8$$

Esta ecuación se llama **ecuación exponencial**, y para resolver debemos tener en cuenta el logaritmo como función inversa, a sus propiedades, que son aplicables en algunos casos, y la fórmula de cambio de base.
Veamos algunos ejemplos de resolución de éstas ecuaciones:

Ejemplo 4: Resolver: $5^x = 8$

Solución: Despejamos la incógnita: $x = \log_5 8$

Por cambio de base resulta: $x = \dfrac{\log 8}{\log 5} = 1{,}29203$

Ejemplo 5: Resolver $4^{2x+1} = 7$

Solución: Aplicando logaritmo decimal en ambos miembros: $\log 4^{2x+1} = \log 7$

Aplicando propiedad del logaritmo de una potencia: $(2x+1)\log 4 = \log 7$

Distribuyendo en el primer miembro se transforma en una ecuación lineal con una incógnita, asi: $x = 0{,}20184$

Ejemplo 6: Resuelva $3^{5x-2} = 4^{x+1}$

Solución: Aplicando logaritmo decimal en ambos miembros y propiedad de logaritmo de una potencia:

$$(5x-2)\log 3 = (x+1)\log 4$$

Distribuyendo en ambos miembros y agrupando según la incógnita se tiene una ecuación lineal cuya solución es: $x = 0{,}87259$.

EJERCICIOS:

5.- (EO) Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $3^x = 243$	**b)** $5^x = \dfrac{1}{125}$	**c)** $2^{x+2} = 64$	**d)** $3^x = 1$
e) $5^{x-2} = 1$	**f)** $2^{2x+3} = 1$	**g)** $4^{2x-1} = 5^{x+2}$	**h)** $3^{x+4} = 7^{2x-1}$
i) $3^{2x-1} \cdot 5^x = 12$	**j)** $2^{2x+4} \cdot 5^{2x-1} = 8$	**k)** $5^{2x-1} \cdot 2^x = 3^{x+5}$	

- **PROGRESIONES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS Y GEOMÉTRICAS MODIFICADAS**

Definición 2: Una sucesión se llama ***progresión aritmética*** si un término cualquiera es igual al anterior más una constante, llamada diferencia de la progresión.

En símbolos: $x_{n+1} = x_n + d \ , \ \forall n \geq 0$

Ejemplo 7: Hallar los primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer elemento es 3 y la diferencia es 4.
Solución: Siendo $x_0 = 3$, podemos hallar algunos de los siguientes términos:

$$x_1 = x_0 + d = 3 + 4 = 7$$
$$x_2 = x_1 + d = 7 + 4 = 11$$
$$x_3 = x_2 + d = 11 + 4 = 15$$

Definición 3: Una sucesión se llama ***progresión geométrica*** si un término cualquiera es igual al anterior multiplicado por una constante llamada razón.

En símbolos: $x_{n+1} = r.x_n \ , \ \forall n \geq 0$

Ejemplo 8: Hallar los primeros términos de la progresión geométrica cuyo primer elemento es 3 y la razón es -2.
Solución: Siendo $x_0 = 3$, podemos hallar algunos de los siguientes términos:

$$x_1 = r.x_0 = -2 \times 3 = -6$$
$$x_2 = r.x_1 = -2 \times (-6) = 12$$
$$x_3 = r.x_2 = -2 \times 12 = -24$$

Definición 4: Una sucesión se llama ***progresión Geométrica Modificada*** si un término cualquiera es igual al anterior multiplicado por una constante llamada razón, todo esto más otra constante llamada diferencia.

En símbolos: $x_{n+1} - ax_n = b \ , \ a \neq 0, n = 0,1,2,....$

EJERCICIOS:

6.- (EO) Halle en cada apartado los primeros seis términos de cada progresión solicitada:
a) Progresión aritmética con primer elemento 5 y diferencia -2.
b) Progresión aritmética con primer elemento -11 y diferencia 4.
c) Progresión geométrica con primer elemento 3 y razón $\frac{1}{2}$.
d) Progresión geométrica con primer elemento $\frac{3}{72}$ y razón -2.
e) Progresión geométrica modificada con primer elemento 8, razón -1 y diferencia 3.

7.- Hallar los primeros cinco términos siguientes de las progresiones dadas, indicando previamente el tipo de progresión, según las definiciones dadas:
a.- 3,5,7,9,........ **b.-** 4,8,16,32,........ **c.-** 5,-10,20,-40,.........

- **MODELOS MATEMÁTICOS DISCRETOS MEDIANTE PROGRESIONES**

Consideremos un cultivo bacteriano, con alimento y espacio limitado, que crece a razón de un porcentaje constante *r* en un periodo cualquiera respecto del número de bacterias en ese periodo, tal que para el periodo i- ésimo ese número se denota por P_i. Siendo la población inicial P_0, podemos encontrar los restantes valores de la población por iteración. En efectos estamos ante una progresión geométrica, o más bien ante un modelo geométrico de crecimiento. Por lo tanto para el i-ésimo periodo la población tiene un tamaño determinado por:

$$P_i = P_0(1+r)^i$$

Ejemplo 9: Se estima que la población de cierta ciudad se incrementa en un 10% anual durante cuatro años. ¿En qué tanto por ciento aumentará la población a los cuatro años?

Solución: Siendo P_0 la población inicial y el incremento $r = 0{,}10$, entonces al cuarto año se tiene:

$$P_4 = P_0(1+0{,}10)^4 = 1{,}4641 P_0$$

Luego el crecimiento es del 46,41% respecto de la población inicial.

EJERCICIOS:

8.- (EO) (AB) La población de ciertos animales sometidos a un experimento se incrementa en un 20% semanales durante las diez semanas bajo observación. Indique la cantidad de individuos durante el experimento, sabiendo que inicialmente se contaba con ocho ejemplares.

9.- (EO) (AB) La población de un cierto poblado crece durante diez años a una tasa de 12% anual. Si inicialmente habia 1.500 habitantes, cuantos habrá a los cinco, siete y diez años?.

10.- (EO) (AB) La población de una ciudad crece a una tasa de 17% anual en los últimos veinte años. Si hace doce años habia 12.500 habitantes cuantos habrá actualmente?.

Respuestas a algunos ejercicios:

8.- Trabaje con los resultados a dos decimales y luego efectue el redondeo: 8,10,12,14, 17,20,24,29,34 y 41.
9.- 2.644, 3316 y 4659.
10.- 82251