GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO N° 13

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:
- **Aplique el Teorema Fundamental del Cálculo**
- **Resuelva integrales definidas**
- **Resuelva Problemas de Aplicación**

CONTENIDOS:
- **Límites al infinito**
- **Integral Definida**
- **Teorema Fundamental del Cálculo**

NOTA:
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al segundo parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

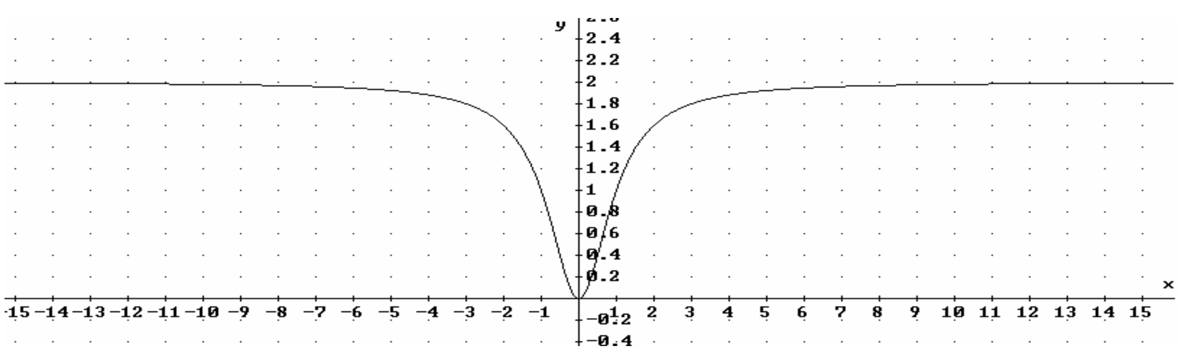
ACTIVIDAD:

- **Limites al infinito:**

Ejemplo 1: Considere la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$, observemos que ocurre con la función cuando la variable independiente alcanza valores indefinidos tan grandes como se pueda, tanto positivos como negativos.

Solución: El dominio son todos los reales. Estudiemos la imagen de los números positivos desde cero. Observemos que a partir de $x=4$ las imágenes parecen acercarse a $f(x)=2$, cada vez más. Esto se expresa diciendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2$.

En forma análoga se tiene cuando la variable independiente se hace grande en valor absoluto pero negativa. Esto es: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2$. Gráficamente resulta:



Formalmente decimos:

Definición 1: Sea f una función definida en todos los puntos de algún intervalo $(a,+\infty)$. El limite de $f(x)$, cuando x crece indefinidamente es L, y se representa por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, si $f(x)$ puede aproximarse tanto a L a medida que x toma valores positivos suficientemente grandes.

Definición 2: Sea f una función definida en todos los puntos de algún intervalo $(-\infty,a)$. El limite de $f(x)$, cuando x decrece indefinidamente es L, y se representa por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, si $f(x)$ puede aproximarse tanto a L a medida que x toma valores negativos con valor absoluto suficientemente grandes.

A los efectos de poder calcular límites al infinito podemos mencionar la siguiente propiedad:

Propiedad 1: Sea r un número entero positivo, entonces i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^r}=0$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r}=0$

Ejemplo 2: Revise las definiciones de límites al infinito y los teoremas correspondientes, posteriormente justifique cada uno de los pasos en el ejemplo anterior:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+5}{5x^2-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-x+5}{x^2}}{\frac{5x^2-6}{x^2}}$$

Dividimos numerador y denominador por x con el mayor exponente

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{6}{x^2}}=$$

Distribuimos el denominador agregado en el numerador y denominador

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+5\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}5-6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

Aplicamos propiedades de limite distribuyendo el limite y sacando constantes

$$=\frac{2-0+5\times0}{5-6\times0}=\frac{2}{5}$$

Aplicamos la propiedad 1 de límites al infinito

EJERCICIOS

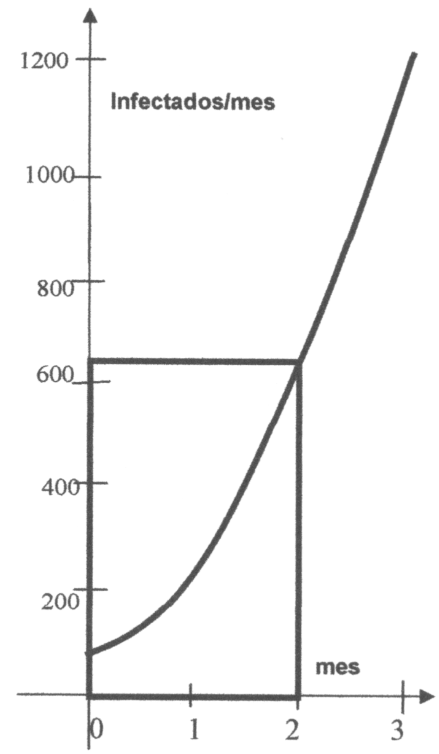
1) Evalúe los siguientes límites:

a) **(EO)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^4}$ c) **(EO)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{5x-2}$

d) **(EO)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-4}{3x+1}$ e) **(EO)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x}{x+1}$

- **Integrales definidas: Teorema Fundamental del Cálculo:**

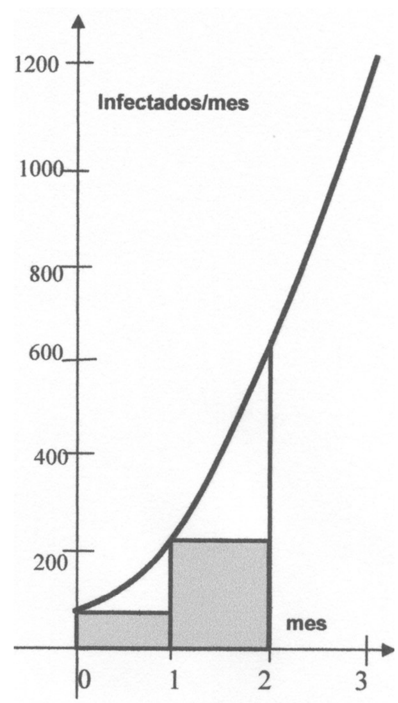
Ejemplo 3: Supóngase que la tasa instantánea de cambio de infectados por cierto virus, en una población dada, durante los tres meses que dura esta afección es tal, que si han transcurrido t meses desde que se detectó dicho virus, entonces se observan $f(t)$ personas afectadas al mes, donde $f(t) = 95t^2 + 88t + 60$. Esto es, conocemos a través de la función la velocidad a la que se incrementa el número de infectados.



Así, la variable independiente t indica la cantidad de tiempo transcurrido desde que se inicia la infección, mientras que la variable dependiente $f(t)$ da la velocidad con la que se propaga el número de infectados por tiempo, por lo tanto el producto $t \times f(t)$ da el número de infectados para un determinado momento.

De ésta manera supongamos para el tiempo $t = 2$, o sea al segundo mes, la velocidad a la que se propaga el virus es de $f(2) = 95 \times 2^2 + 88 \times 2 + 60 = 636$, infectados por mes, en el momento que se cumple el segundo mes, sin embargo nos podría interesar conocer el numero de infectados en el momento que se cumple el segundo mes.
Si observamos la grafica, y entendemos lo que significa las unidades en cada eje, nuestro problema se traslada a calcular el área de la región que se halla debajo de la curva de la función entre los valores de la v.i. t, entre 0 y 2.

Un primer intento de calcular el área es tomando el rectángulo de base 2 y altura $f(2)$, es decir $2 \times f(2) = 2 \times 636 = 1272$ infectados. Pero esto ocurriría si la intensidad de la infección se hubiera mantenido constante durante todo el primer y segundo mes, tal como lo muestra el área del rectángulo de la primera grafica.



Para calcular el área de la región debajo de la curva, podríamos comenzar pensando en el área de un rectángulo, que es base por altura, como lo acabamos de hacer, y trazar un rectángulo por defecto para cada mes.
De ésta manera tendríamos que sumar las dos áreas de los rectángulos,

$$A_1 = 1 \times f(0) = 1 \times 60 = 60 \quad \text{y}$$
$$A_2 = 1 \times f(1) = 1 \times 243 = 243$$

teniendo la suma de las dos áreas el valor de 303, esto es, 303 infectados a lo largo de las dos semanas.

Si continuamos reduciendo el ancho de cada rectángulo y por lo tanto aumentando la cantidad de rectángulos para cubrir las dos semanas, podríamos tomar un punto cada media semana, y por allí trazar dos nuevos rectángulos con lo que tendríamos cuatro rectángulos debajo de la curva, tal lo mostrado en la grafica de abajo.

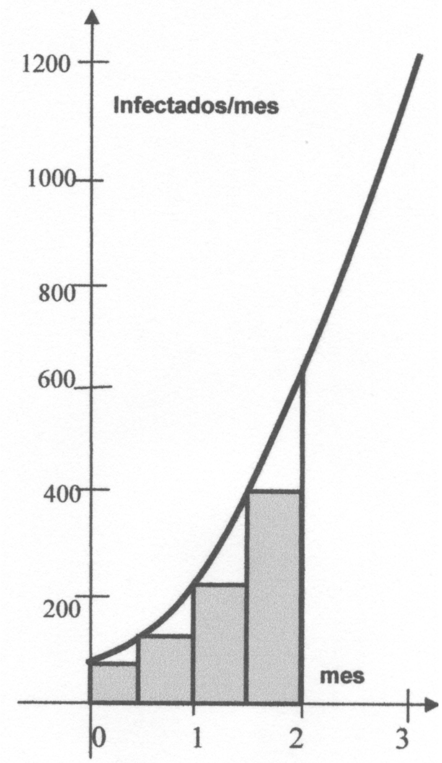
Ahora las cuatro áreas tienen valor de:

$$A_1 = \frac{1}{2} \times f(0) = 30$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times f(0{,}5) = 63{,}875$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \times f(1) = 121{,}5$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \times f(1{,}5) = 202{,}875$$



La suma de estas cuatro áreas da 418,25 que es aproximadamente 218 infectados durante las dos semanas

Podemos continuar indefinidamente aumentando el número de rectángulos los cuales tendrán un ancho que se aproxima a cero, con lo cual se dice que el área total de la región debajo de la grafica de la función entre los valores 0 y 2 de la v.i. es:

$A = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_i)$ donde Δx_i es al ancho y $f(x_i)$ es la altura del rectángulo i.

Formalmente decimos:

Definición 1: Si f es una función continua definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, se define como la integral definida de f de a hasta b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, a la expresión dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \text{ , si el límite existe.}$$

La forma de hallar el valor de esta integral definida usando la antidiferencial, se reduce a aplicar la siguiente regla de cálculo conocida como Teorema Fundamental del Cálculo, también llamada Regla de Barrow:

Teorema Fundamental del Cálculo: Sea f una función continua definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, y sea g una función tal $g'(x) = f(x)$, para toda x del intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Ejemplo 4: Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo evalue $\int_2^5 x^2 dx$.

Solución: La antiderivada de la función x^2 es $\frac{1}{3}x^3$, por lo tanto al aplicar el teorema queda:

$$\int_2^5 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_2^5 = \frac{1}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3}$$

- **Propiedades de la Integral Definida:**

Propiedad 1: Siendo k una constante, resulta $\int_a^b k\, dx = k(b-a)$

Propiedad 2: Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$ y si k es una constante, entonces $\int_a^b k\ f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Propiedad 3: Si las funciones f y g son integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ es una función integrable en el mismo intervalo y se verifica $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Propiedad 4: Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a,b],[a,c],[c,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Propiedad 5: Si f es una función integrable en un intervalo cerrado que contiene a tres números reales a, b y c entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ independientemente del orden de los números dados.

Propiedad 6: Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a,b]$ y si $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

EJERCICIOS

2) (EO) Calcule el valor de la integral definida utilizando antidiferencial de la función dada:

a) $\int_1^3 x^2 dx$ **b)** $\int_2^6 5x^2 dx$ **c)** $\int_1^3 x^2 + 3x + 2dx$

3) (EO) Evalúe las integrales definidas usando el Teorema Fundamental del Cálculo:

a) $\int_0^3 \left(3x^2 - 4x + 2\right)dx$ **b)** $\int_0^4 \left(x^3 - x^2 + 1\right)dx$ **c)** $\int_3^6 \left(x^2 - 2x\right)dx$ **d)** $\int_{-1}^3 \left(3x^2 + 5x - 1\right)dx$

e) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}dx$ **f)** $\int_1^4 \sqrt{x}(x+2)dx$ **g)** $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$ **h)** $\int_0^3 \sqrt{x+1}(x+2)dx$

- **<u>Problemas de Aplicación:</u>**

Ejemplo 4: Aplicando la integral definida hallaremos el valor correspondiente al numero de infectados durante las dos semanas de iniciado la infección del virus.

De lo mencionado hasta aquí, estamos interesados en conocer: $\int_0^2 95t^2+88t+60dt$, la cual da $549{,}333\ldots$, es decir, que se tiene 549 infectados durante las dos semanas de iniciado la infección del virus.

EJERCICIOS

4)Suponga que en 5 minutos una secretaria puede escribir a máquina a razón de $f(x)$ palabras por minutos a los x minutos de empezar, donde, $f(x)=75+10x-3x^2$, con $0\le x\le 5$.¿Cuántas palabras escribe la secretaria en 5 minutos?.

5) (EO) (AB) Se calcula que en *x* años a partir de ahora, la población de una cierta ciudad crecerá a razón de $f(x)$ personas por año, donde, $f(x)=400+100x^{3/2}$, con $0\le x\le 5$. Determine el crecimiento de la población en los próximos 4 años.

6) (EO) (AB) En un pequeño poblado, un rumor se extiende a razón de $f(t)$ personas por hora desde que el rumor se inició y $f(t)=40t-3t^2$

a)¿Cuántas personas escuchan el rumor durante las primeras 4 horas?.
b)¿Cuántos más oyen el rumor durante la sexta hora?.

7) (EO) (AB) En los dos últimos días de la semana, ¿qué número de personas se espera queden expuestas a un cierto virus si se calcula que en *t* días a partir del lunes el virus se extenderá a razón de $f(t)$ personas por día, donde $f(t)=9t(8-t)$?

Respuesta de algunos ejercicios:

4) 375 palabras en cinco minutos.
5) El crecimiento en los próximos cuatro años será de 9600 personas.
6) Durante las cuatro primeras horas 256 personas escuchan el rumor. Durante la sexta hora oyen el rumor 216 personas.
7) El número de personas expuestas al virus en los dos últimos días es de 228.