GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO N° 11

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:

- **Adquiera la destreza de graficar funciones aplicando el criterio de la segunda derivada.**
- **Resuelva ejercicios y problemas de aplicación.**

CONTENIDOS:

- **Criterio de la Segunda Derivada**
- **Funciones con Concavidad. Puntos de inflexión**
- **Aplicaciones en el Trazo de la Gráfica de una Función**

NOTA:

- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al primer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDAD:

- **Criterio de la Segunda Derivada:**

a) Supongamos que f es una función tal que $f\,'$ y $f\,''$ existen en algún intervalo abierto $]a,b[$ que contenga a un punto c, y que $f\,'(x)=0$. Además supongamos que $f\,''$ es negativa en ese intervalo, por lo tanto esa negatividad hace que $f\,'$ es decreciente en el intervalo $[a,b]$. Como el valor de $f\,'$ en un punto de la gráfica de f da la pendiente de la recta tangente en el punto, concluimos que la pendiente de la recta tangente es decreciente en $[a,b]$.
En la gráfica de una función f, vemos éstas propiedades, (fig 3), y se muestran segmentos de algunas rectas tangentes. Observamos que la pendiente de la recta tangente es decreciente en $[a,b]$. Notemos que f tiene un valor máximo relativo en c, donde $f\,'(c)=0$ y $f\,''(c)<0$.

Figura 3

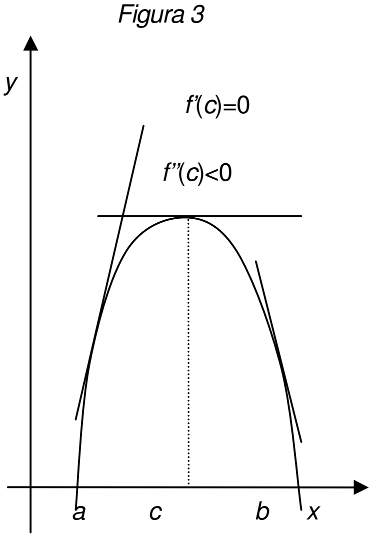
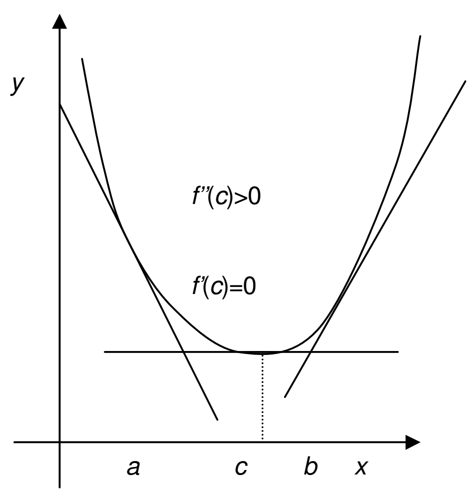


Figura 4



b) Por otro lado, supongamos que f es una función que tiene las propiedades de la función del apartado **a)**, excepto que f'' es positiva en el intervalo abierto $]a,b[$; por lo tanto concluimos que la primera derivada f' es creciente en $[a,b]$. Esto es, la pendiente de la recta tangente crece en $[a,b]$. En la figura 4 tenemos una función con estas propiedades, y además hay segmentos de algunas rectas tangentes cuyas pendientes crecen en $[a,b]$. La función f tiene un valor mínimo relativo en c, donde $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$.

- **Prueba de la Segunda Derivada:**

Sea c un número crítico de una función f en la cuál $f'(c)=0$, y la derivada f' existe para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a un punto c. Si la segunda derivada f'' existe entonces:
a) si $f''(c)<0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en el punto c.
b) si $f''(c)>0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en el punto c.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$, obtener los máximos y mínimos relativos de f aplicando el criterio de la segunda derivada.

Solución: Calculamos la primera derivada, esta es: $f'(x)=4x^3+4x^2-8x$, la cuál se anula en $x=1$, $x=0$ y en $x=-2$. Siendo estos tres puntos críticos.

Determinamos si existe o no un extremo relativo en cualquiera de estos números críticos hallando el signo que la segunda derivada tenga en cada punto.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x=-2$	$-\frac{32}{3}$	0	+	f tiene un mínimo relativo
$x=0$	0	0	-	f tiene un máximo relativo
$x=1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tiene un mínimo relativo

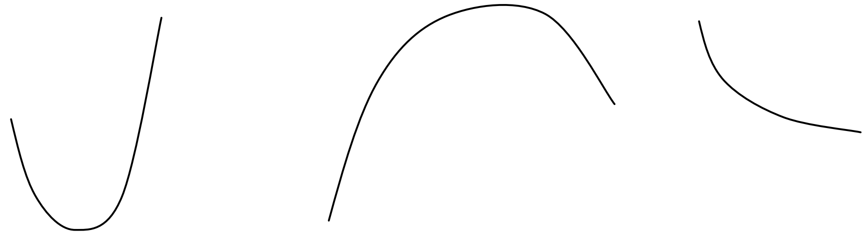
EJERCICIOS:

1) (EO) Obtenga los extremos relativos de la función dada usando la prueba de la segunda derivada, si se puede aplicar. Si no se puede aplicar, emplee la de la primera derivada.

a) $f(x)=3x^2-2x+1$ **b)** $f(x)=x(x-1)^3$ **c)** $f(x)=4\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}$

- **Concavidad de una función. Puntos de inflexión**

A partir de la posición que tiene las rectas tangentes a una curva respecto a dicha curva se dan las definiciones de cóncava hacia arriba y hacia abajo de una función continua en un dominio. Lea las definiciones correspondientes y complete las siguientes graficas con trazos de segmentos tangentes en algunos puntos y determine que tipo de concavidad existe.



EJERCICIOS:

2) **(EO)** Determine donde la gráfica de la función indica que es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo y, si existen, encuentre los puntos de inflexión.

a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$ **b)** $g(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 5x - 20$ **c)** $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

3) Complete y conteste los siguientes enunciados:

i) ¿Es lo mismo $f''(x)$ que $\dfrac{d^2y}{dx^2}$?. Escriba como se lee la anterior expresión.

ii) Si $f''(x)$ es negativa, la gráfica resulta ser ....

Si $f''(x)$ es positiva, la gráfica resulta ser ....

Si en $x = a$, se tiene que $f''(a) = 0$, y para valores de x a medida que varían desde menores a a hasta mayores a a, se tiene un cambio de signo de positivo a negativo, o viceversa, entonces el punto a se dice ....

iii) Revise el criterio de la primera y segunda derivada. ¿Cuando no podemos aplicar el criterio de la segunda derivada?

- **Aplicaciones en el Trazo de la Gráfica de una Función**

Ejemplo 2: Dada la función $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$, encuentre los extremos relativos de f; los puntos de inflexión de la gráfica de f; los intervalos donde f es creciente; los intervalos donde f es decreciente; donde la gráfica es cóncava hacia arriba; donde la gráfica es cóncava hacia abajo. Finalmente trace la gráfica.

Solución: Busquemos la primera derivada, esta es: $f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$

Los puntos críticos son aquellos que anulan esta derivada, esto es: $3x^2 + 10x + 3 = 0$

En consecuencia los tres valores críticos son $-\dfrac{1}{3}$ y -3. Ahora buscamos la segunda derivada, esta es: $f''(x) = 6x + 10$

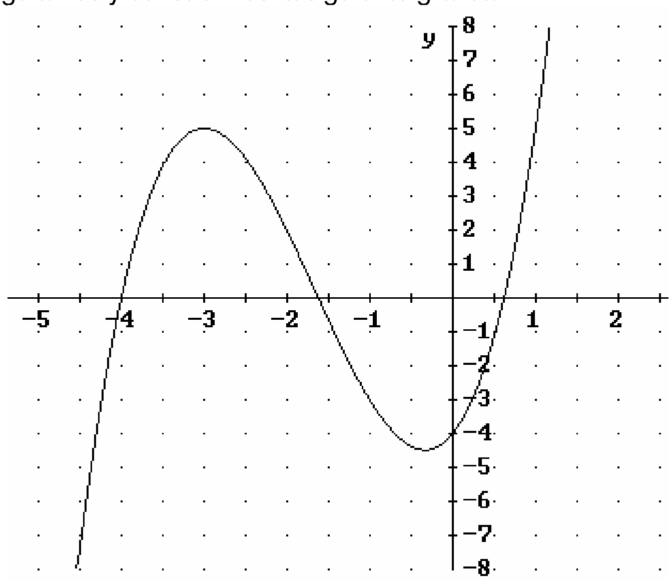
La segunda derivada se anula en $-\dfrac{5}{3}$. De esta manera el dominio de la función se debe estudiar dividido en tres puntos y los cuatro intervalos, así usamos una tabla donde volcamos el análisis de la función. Completamos con los valores que anulan la primera y segunda derivada. Posteriormente dentro de cada intervalo tomamos un valor de donde solo conoceremos su signo para completar la tabla.

Por ejemplo: Para completar la tercera columna, correspondiente a la derivada, tomamos a $x = -4$ en el primer intervalo y vemos que $f'(-4)$ es positiva. En el segundo intervalo to-

mamos $x=-2$, resultando $f'(-2)$ es negativa. En el tercer intervalo consideramos $x=-1$, donde $f'(-1)$ que vuelve a ser negativa, y en el cuarto intervalo tomamos $x=0$, donde su imagen vuelve a ser positiva.
Para la cuarta columna realizamos un trabajo idéntico. Una vez completado esto sacamos las conclusiones en cada fila según los criterios de la primera y segunda derivadas, y las definiciones de puntos extremos y punto crítico.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x<-3$		+	_	Creciente y cóncava hacia abajo
$x=-3$	5	0	_	Existe un máximo
$-3<x<\frac{-5}{3}$		−	−	Decreciente y Cóncava hacia abajo
$x=-\frac{5}{3}$	$\frac{10}{27}$	−	0	Punto de inflexión
$-\frac{5}{3}<x<-\frac{1}{3}$		−	+	Decreciente y cóncava hacia arriba
$x=-\frac{1}{3}$	$-\frac{121}{27}$	0	+	Existe un mínimo
$x>-\frac{1}{3}$		+	+	Creciente y cóncava hacia arriba

Con la tabla nos guiamos y construimos la siguiente grafica:



EJERCICIOS:

4) **(EO)** Para cada una de las siguientes funciones encuentre los extremos relativos de *f*; los puntos de inflexión de la gráfica de *f*; los intervalos donde *f* es creciente; los intervalos donde *f* es decreciente; donde la gráfica es cóncava hacia arriba; donde la gráfica es cóncava hacia abajo. Finalmente trace la gráfica.

a) $f(x)=2x^3-6x+1$

b) $f(x)=3x^4+4x^3-6x^2-4$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<0 \\ 2x^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

d) $g(x)=(x+1)^3(x-2)^2$