## RECOMENDACIONES A LOS ALUMNOS

La Asignatura Matemáticas de las carreras Profesorado y Licenciatura en Biología, corresponde a primer año; su régimen es anual, con tres horas de clases semanales. Requiere desde sus inicios conceptos básicos de aritmética, algebra y geometría, contenidos que son propios de la enseñanza pre universitaria.
Tal vez la primera pregunta será por que debemos aprender Matemáticas en Biología. Para responder a esto conviene antes recurrir a una segunda pregunta: ¿hemos aprendido a estudiar Matemáticas?. Ocurre generalmente que aprendemos a hacer cuentas, conseguir resultados y cuando mucho controlar estos valores y revisar si el resultado coincide o no con otro supuestamente bueno.
Pero, ¿que es estudiar Matemáticas?. ¿Cuantas veces hemos leído una definición?, ¿distinguimos acaso una definición de una propiedad?, ¿interpretamos un resultado?, ¿resolvemos problemas de aplicación?. Todo esto incluye el aprendizaje de las Matemáticas.

Ahora intentemos responder para que aprender la matemáticas en biología.
Desde el comienzo la Biología se ha caracterizado por ser una disciplina contemplativa y descriptiva, hecho particularmente notorio en anatomía, que poco ha cambiado a lo largo de los años. La Biología como ciencia comenzó realmente al surgir la Genética, la Evolución y la Fisiología; y los avances más notables en Biología se lograron posteriormente con los progresos aportados por la Física en cuanto a los métodos de medición.

La Matemática en Biología o ***Biomatemática*** o ***Ecología Matemática***, nació como Ciencia en los años 1926 y 1927. Si bien hubo una prehistoria que forman una constelación de famosos como Malthus o Verhulst, fueron los trabajos de Volterra (1926), Lotka (1927) y Kostitzin (1927) los que iniciaron el feliz matrimonio entre la Ecología y la Matemática.
Volterra, motivado por un problema que le sugirió su yerno, el zoólogo Humberto D´Ancona, demostró, usando un modelo matemático, que las fluctuaciones de la pesca en el Mar Adriático podían deberse a la interacción entre depredadores y presas.
A partir de allí, la mayoría de los conceptos de la Ecología han tenido expresión en forma de modelos matemáticos que explican o predicen lo que pasa en la naturaleza, con mayor o menor grado de realismo y precisión.

Un ecólogo matemático hoy en día puede dedicarse a varios aspectos: predecir la probabilidad de inundaciones, modelar el clima, diseñar estrategias de vacunación o prevención para enfermedades infecciosas, manejar parques nacionales o, simplemente, intentar hacer crecer el cuerpo teórico de la Ecología.

## INTRODUCCION

La Matemática en Biología resulta imprescindible hoy en día en la enseñanza; así pues, con ese propósito la presente asignatura persigue la inserción del Alumno ingresante, en la actividad interdisciplinaria, tal cuál se viene haciendo en la Asignatura Matemática desde 1994.

En efecto, la Biología es posiblemente la Ciencia que más ha evolucionado en el siglo que acaba de terminar, dando en sus investigaciones espacio a otras ciencias que interactuando en forma aplicada fortalecieron la interdisciplinariedad. Así, la Genética, Fisiología, Anatomía, Ecología entre otras ramas de la Biología se vieron apoyadas por la Matemática a través de la Estadística y el Cálculo, por la Física a través de la Estática, Dinámica y Electricidad y por la Química con la Estructura Molecular, explicando nuevas teorías y dando a luz conocimientos que por si sola, la Biología no hubiera podido obtener respuesta inmediata.

Es por ello que resulta importante impartir una enseñanza aplicada de la Matemática, base de las Asignaturas Física, Estadística y Ecología de la Carrera, como así también para la Investigación de cualquier rama especifica de la Biología, aportando a temas de investigación y formación con vistas a la Tesis y a la vida profesional.

"…Los números y la matemática parecen estar en todas partes. En nuestros cuerpos las redes de nuestro sistema cardiovascular, los impulsos eléctricos que nuestros cuerpos usan para producir movimientos, las maneras en que se comunican las células, el diseño de nuestros huesos, la misma estructura molecular de los genes …. todos ellos poseen elementos matemáticos. En consecuencia, en un esfuerzo destinado a cuantificar las funciones del cuerpo humano, la ciencia y la medicina han recurrido a los números y a otros conceptos de la matemática. Por ejemplo, se han diseñado instrumentos para traducir los impulsos eléctricos del cuerpo a curvas sinusoides, haciendo de este modo factible la comparación de resultados. Los resultados de un electrocardiograma, un electromiograma, un ultrasonido, muestran la forma, amplitud y cambio de fase de una curva. Todo esto proporciona información a técnico entrenado. Números, porcentajes y gráficos son aspectos de la matemática adaptados a nuestros cuerpos. ….
"….. Los aspectos físicos y fisiológicos del cuerpo también nos conducen a otras ideas matemáticas. El cuerpo es simétrico, lo que le da equilibrio y un centro de gravedad. Además de permitir el equilibrio, las tres curvas de la columna vertebral son muy importantes para el buen estado físico y para conferir al cuerpo la capacidad física de sostener su propio peso y otras cargas. Artistas como Leonardo da Vinci y Alberto Durero trataron de ilustrar la concordancia del cuerpo con diversas proporciones y medidas, tales como la sección áurea." (Theoni Pappas en El Encanto de la Matemática. Zugarto Ediciones).

Finalmente, puede mencionarse que en la conferencia inaugural de la Primera Escuela Argentina de Biología Matemática realizada el pasado mes de diciembre de 2005 en La Cumbre, Córdoba, quedó reconocida la Matemática, como el nuevo microscopio con el que cuenta la Biología, debido al gran aporte que tal instrumento brindó para obtener nuevos descubrimientos dentro de la Biología, en comparación con lo que hoy es la Matemática a través de las diferentes modelizaciones.

# GUIA DE ACTIVIDADES Y TRABAJOS PRACTICOS N° 1

**OBJETIVOS:**
**Lograr que el Alumno:**

- **Actualice el manejo algebraico de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos.**
- **Desarrolle la habilidad de operar con números fraccionarios.**
- **Adquiera la destreza de resolver operaciones de potencias y radicaciones en los distintos sistemas numéricos.**
- **Resuelva ecuaciones lineales y cuadráticas.**
- **Adquiera la destreza de resolver problemas mediante ecuaciones lineales.**
- **Identifique la notación científica como un instrumento de representación de medidas de magnitudes.**
- **Adquiera la habilidad de manejar y expresarse en el plano numérico.**
- **Interprete gráficamente una ecuación.**
- **Reconozca las distintas ecuaciones de una recta.**
- **Adquiera la habilidad del manejo bibliográfico, como recurso para el estudio.**

**CONTENIDOS:**

- **A) Sistemas de Números.**
- **B) Potenciación**
- **C) Fracciones.**
- **D) Radicación.**
- **E) Ecuaciones lineales. Soluciones.**
- **F) Ecuaciones Lineales con dos incógnitas**
- **G) Ecuaciones de segundo grado en una variable**
- **H) Notación Científica**
- **I) Gráficas de una ecuación**
- **J) Ecuación de la recta**

**NOTA:**
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al primer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

## ACTIVIDAD:

### A) Sistemas de Números.

Los números que utilizamos para contar: 1, 2, 3, 4, …. se denominan **números naturales**, y al conjunto se lo indica con $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,.......\}$$

**Ejemplo 1:** La cantidad de huesos en el cuerpo humano es un número natural.

El orden natural de tales números permite efectuar las operaciones de suma y resta, no siendo esta ultima posible cuando el minuendo es menor que el sustraendo, así también para minuendo y sustraendo iguales la resta es cero, al cual se lo suele incluir entre los números naturales usando a veces $\mathbb{N}_0$ como la notación para el conjunto cuyo primer elemento es el cero.

$$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,.......\}$$

Para efectuar la resta cuando el minuendo es menor que el sustraendo, se definen los números opuestos a los naturales, llamándolos **enteros negativos**. Por ello a los naturales se los denomina también **enteros positivos**, mientras que el cero carece de signo. Todos forman en conjunto los **números enteros**, denotado con $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{...,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4,.......\}$$

**Ejemplo 2:** Si la temperatura de una sustancia química se la baja en 30ºC respecto de la temperatura ambiente de 22ºC, estará a -8ºC.

La suma, resta y multiplicación entre números enteros da siempre otro número entero, mientras que la división entre enteros no siempre da enteros, así pues indicamos a los **números racionales** como una razón o cociente entre dos números enteros en donde el divisor nunca es nulo, y al conjunto se lo indica con $\mathbb{Q}$, es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\right\}$$

**Ejemplo 3:** Una indicación dada dice que debe colocarse tierra en la maceta hasta una ¾ parte. Esto significa que tomando la altura de la maceta se la divide en cuatro y de esas cuartas partes se toma tres.

Una alternativa de escribir un numero racional en forma aparente entera es usando los llamados decimales, que consiste en una parte entera y una mantisa, menor que la unidad. En efecto, si deseamos dividir 12 en 5, el resultado es el racional $\frac{12}{5}$, que equivale al decimal 2,4 siendo 2 la parte entera y 4 la mantisa o parte decimal.

No siempre esto es posible, por lo que reconocemos a estos números que tienen mantisa **infinita periódica**, por ejemplo, $\frac{14}{3}$; en efecto, no se convierte en decimal sino en una expresión infinita periódica 4,66666…. tantos 6 como se desee escribir o se necesiten para su notación. En tal caso la notación es $\frac{14}{3} = 4,\widehat{6}$

Si la forma aparente entera tiene una mantisa **infinita no periódica**, tal como $\sqrt{5} = 2,236068...$ el número pertenece a los llamados **números irracionales**, estos no pueden escribirse como una razón entre dos enteros.

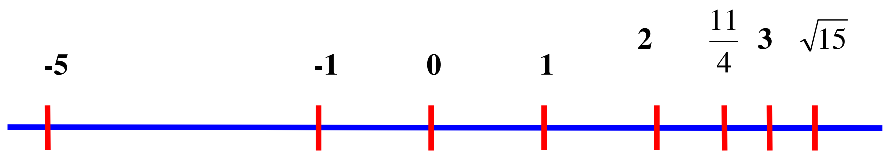
Los números racionales e irracionales forman los números reales, que se denotan con $\mathbb{R}$.

En cada conjunto numérico mencionado se define un orden creciente y otro decreciente, en cuyo caso podemos representar gráficamente a los números reales en

la recta real bajo ese orden, la cual tiene un punto origen al que se le asigna el cero, con una unidad de medida a la derecha se ubica el uno, y los restantes se denotan a continuación siguiendo esa unidad de medida.
Recordando que para números racionales la comparación es:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ cuando } a.d > b.c$$

Así la recta real se grafica de la siguiente manera.




**EJERCICIOS:**

**1.- (EO)** En la recta real grafique los siguientes números:

-4 ; 5,65 ; 4,23 ; 3,14 ; $\sqrt{2}$ ; 0 ; $\frac{3}{4}$ ; $\pi$ ; $-\frac{7}{8}$ ; $\frac{15}{4}$

**B) Potenciación**

Recuerde que la potenciación tiene varias definiciones, según el conjunto numérico al que pertenecen la base y el exponente.

La definición de potenciación fue variando a medida que se nos presentaban los distintos conjuntos numéricos, sin que esto signifique una operación distinta, pues si nos dicen que calculemos dos elevado a la quinta, sabemos que debemos resolver una multiplicación con cinco términos iguales a dos. Pero si el exponente es negativo o fraccionario ¿cómo contamos la cantidad de factores que tiene esa multiplicación?.

**Definición 1:** Se llama potencia de un número real $a$ con exponente natural $n$ a la expresión

$$a^n = \underbrace{a.a......a}_{n \text{ veces}}.$$

**Ejemplo 4:** Resolver las potencias

**a)** $5^4$ **b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ **c)** $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^4$

**Solución:**

**a)** $5^4 = 5.5.5.5 = 625$ **b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{125}$ **c)** $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{16}$

**Definición 2:** Se llama potencia de un número real $a$ con exponente entero negativo $-n$ a la expresión

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n .$$

**Ejemplo 5:** Resolver las potencias

**a)** $5^{-2}$ **b)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}$ **c)** $\left[\frac{\sqrt{2}}{5}\right]^{-3}$

**Solución:**

**a)** $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ **b)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8}$ **c)** $\left[\frac{\sqrt{2}}{5}\right]^{-3} = \left[\frac{5}{\sqrt{2}}\right]^3 = \frac{125}{\sqrt{8}}$

**Definición 3:** Se llama potencia de un número real $a$ con exponente racional $\frac{p}{q}$ a la expresión

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} .$$

**Ejemplo 6:** Resolver las potencias

**a)** $5^{\frac{1}{2}}$ **b)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{3}{2}}$ **c)** $\left[\frac{4}{3}\right]^{-\frac{1}{2}}$

**Solución:**

**a)** $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ **b)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^3} = \sqrt{\frac{8}{343}}$ **c)** $\left[\frac{4}{3}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**B.1) Propiedades de la Potenciación**

Para el cálculo de la potenciación es conveniente tener en cuenta la validez de las siguientes expresiones, conocidas como propiedades de la potenciación:

i) Producto de potencias de igual base: $a^m . a^n = a^{m+n}$

ii) Cociente de potencias de igual base: $a^m : a^n = a^{m-n}$

iii) Potencia de otra potencia: $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$

iv) Potencia de un producto: $(a.b)^n = a^n . b^n$

v) Potencia de un cociente: $(a : b)^n = a^n : b^n$

**EJERCICIOS:**

**2.- (EO)** Resolver los siguientes ejercicios con potencias:

**a)** $(4)^{-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=$ **b)** $\left(2^3\right)^{-2}=$ **c)** $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\times5^3\times4^{-1}=$ **d)** $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-1}\right\}^2=$

**e)** $\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{5}{4}\right)^0=$ **f)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\left(\frac{-1}{3}\right)^{-2}=$ **g)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3\times5^{-2}\times\left(\frac{10}{3}\right)^2=$

**3.-** A partir de las propiedades de la potenciación dadas, expréselas coloquialmente.

## C) Fracciones

Recuerde que para sumar y restar fracciones debemos hallar previamente un común denominador, el cual o puede ser el producto de ambos o mejor aún, el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

**Ejemplo 7:** Realizar la siguiente suma algebraica de números fraccionarios:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{6}=$$

**Solución:** Para realizar la suma algebraica, debemos hallar un común denominador entre las fracciones dadas, más aún, podríamos hallar el menor de los comunes denominadores, el cuál es el mínimo común múltiplo de los denominadores dados. En efecto este valor es 12, es decir.

m.c.m. (2,4,6)= 12

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{6}=\frac{6\times3+3\times5-2\times7}{12}=\frac{18+15-14}{12}=\frac{19}{12}$$

En cuanto al producto de fracciones, se multiplica numeradores entre si y denominadores entre sí.

**Ejemplo 8:** Realizar la siguiente multiplicación de números fraccionarios:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{-20}{9}\right)=$$

**Solución:** Para realizar la multiplicación, debemos expresar la multiplicación de los numeradores entre sí y de los denominadores entre sí, y realizar todas las simplificaciones posibles:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{-20}{9}\right)=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times5\times(-\overset{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{20}})}{\underset{1}{\cancel{2}}\times\underset{2}{\cancel{4}}\times\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{-25}{6}$$

**EJERCICIOS:**

**4.- (EO)** Resolver las siguientes operaciones con fracciones:

**a)** $\frac{1}{5}+\frac{5}{30}=$ **b)** $\frac{1}{3}-\frac{5}{8}+\frac{5}{12}=$ **c)** $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=$ **d)** $\frac{5x}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=$

**e)** $10-\frac{2}{x^2}=$ **f)** $\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{10}{3}\right)\times\left(-\frac{9}{2}\right)=$ **g)** $\left(\frac{ab}{c}\right)\times\left(\frac{c^2}{3a^2b}\right)\times\left(\frac{1}{abc}\right)=$

**h)** $\frac{7}{27}\div\frac{5}{9}=$ **i)** $\frac{x-1}{x^2-5x-4}\div\frac{x-1}{x-4}=$ **j)** $\frac{x^2-1}{x^2}\div\frac{x-1}{x^3}=$

## D) Radicación

Vimos ya en la definición 3 de potencia como un exponente fraccionario equivale a una raíz. En consecuencia definimos

**Definición 4:** Si $a^n=b$ entonces $a$ se denomina la raíz enésima de $b$.

La notación es $a=\sqrt[n]{b}$, y se lee: *$a$ es la raíz enésima de $b$.*

La expresión bajo es signo radical $\sqrt{\ }$ se denomina radicando.
La radicación es una operación inversa de la potencia y por ello sus propiedades son análogas.

### Propiedades de la Radicación

Para el cálculo de la radicación es conveniente tener en cuenta la validez de las siguientes expresiones, conocidas como propiedades:

i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ ii) $(a+b)\sqrt[n]{x}=a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x}$

iii) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ iv) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

**EJERCICIOS:**

**5.- (EO)** Resolver

**a)** $a^{3/2}.a^{4/3}=$ **b)** $x^{1/3}.x^{2/5}.x^{3/10}=$ **c)** $\left(a^{3/2}\right)^{5/6}=$ **d)** $\left(-3x^{2/3}\right)^3=$

**e)** $\frac{a^{3/2}}{a^{1/6}}=$ **f)** $\left(x^{2/3}\cdot x^{4/5}\right)^2=$ **g)** $\left(x^{2/5}\cdot x^{1/3}\right)\div x^{3/5}=$

## E) Ecuaciones Lineales. Soluciones

El término ***ecuación*** es, a ésta altura de sus conocimientos, por demás conocido. Resulta inmediato pensar que una ecuación es toda igualdad entre dos expresiones algebraicas que contiene al menos una ***incógnita***. Las cantidades que acompañan a esas incógnitas son valores o números específicos, denominado ***constantes*** o escalares.
En todo nuestro estudio, salvo que se diga lo contrario, trabajaremos con constantes reales; con lo cuál generalizamos un sistema numérico.

Por una ***ecuación lineal*** con $n$ incógnitas $x_1, x_2, ....., x_n$ entendemos a toda ecuación que puede escribirse en la forma convencional:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ..... + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, ....., a_n, b$ son constantes. La constante $a_i$ se denomina el ***coeficiente*** de la incógnita y $b$ se denomina la constante de la ecuación, o ***término independiente***.

**Ejemplo 9:** En las siguientes ecuaciones indicar cuales son lineales y cuales no:

**a)** $x + 3y + z = 6$ **b)** $2x + 7yz + 3y = 2$ **c)** $3x + 2y^3 + 3z = 6$

**Solución**: La primera ecuación es lineal por ser una expresión de primer grado cada sumando; es decir, lineal cada incógnita. La segunda ecuación no es lineal, pues el segundo sumando es cuadrático, al tener el producto de dos incógnitas $y$ y $z$. La tercera ecuación tampoco es lineal pues el segundo sumando es cúbico en la incógnita $y$.

Una ***solución*** o ***raíz*** de la ecuación lineal es un conjunto de valores de las incógnitas, digamos $x_1 = k_1; x_2 = k_2; ....; x_n = k_n$, o simplemente una lista ordenada de valores reales constantes $\boldsymbol{u} = (k_1, k_2, ....., k_n)$, denominada $n$-upla ó $n$-ada, que tiene la propiedad tal que es cierta la siguiente expresión:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + .... + a_nk_n = b$$

que resulta de reemplazar cada $x_i$ por $k_i$.

Luego, decimos que este conjunto de valores satisface la igualdad.
La solución puede no ser única, en cuyo caso todas las soluciones forman un conjunto denominado ***conjunto solución***, y una expresión que las represente a ellas se dice ***solución general***.

**Ejemplo 10:** Verificar que la terna $\boldsymbol{u}$ = (2,3,1) es solución de la ecuación lineal con tres incógnitas:

$$2x - y + 5z = 6$$

y además que la terna $\boldsymbol{v}$ = (4,-1,3) no es solución.

**Solución:** En efecto, se verifica que $\boldsymbol{u}$ es solución, pues, al sustituir, queda:

$$2.2 - 3 + 5.1 = 4 - 3 + 5 = 6$$

Mientras que sustituyendo por $\boldsymbol{v}$, se tiene: $2.4 - (-1) + 5.3 = 8 + 1 + 15 = 24 \neq 6$
por lo tanto $\boldsymbol{v}$ no es solución.

**Ejemplo 11:** Resolver la siguiente ecuación: $2x + 3y = 6$

**Solución:** La primera variable es $x$, mientras que $y$ es variable libre; parametrizando a $y$ de forma que: $y$=$a$, queda: $2x + 3a = 6$

Despejando $x$, resulta: $2x = 6 - 3a$. Así: $x = 3 - \frac{3}{2}a$

Luego, todo par de la forma $(3 - \frac{3}{2}a, a)$ con $a$ real arbitraria es solución de la ecuación.

## EJERCICIOS

**6.- (EO)** Determinar si cada una de las siguientes ecuaciones es lineal:

**a)** $5x + 7y - 8yz = 16$ **b)** $x + \pi y + e z = \log 5$ **c)** $3x + k y - 8z = 10$

**7.- (EO)** Considérese la ecuación lineal $3x - 2y + 3z = 5$. Determinar si $\mathbf{u}$=(4,2,-1) es solución.

**8.-**Determinar si: $\boldsymbol{u}$=(1,2,1,-2) y $\boldsymbol{v}$=(0,-1,1/4,6) , son soluciones de la ecuación:

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 3$$

## E.1) Ecuaciones Lineales con una Incógnita

Cuando la ecuación lineal tiene una sola incógnita su forma es: $ax = b$. El siguiente enunciado nos determina su solución.

**Propiedad 1:** Sea la ecuación lineal con una incógnita $ax = b$

- **a)** si $a \neq 0$, la única solución es $x = \frac{b}{a}$
- **b)** si $a = 0$ con $b \neq 0$ la solución no existe.
- **c)** si $a = b = 0$, entonces cualquier escalar $k$ es solución .

**Ejemplo 12:** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 8 = 5$ b) $6x - 2 - x = -2x - 6 + 7x$ c) $2x - 3 + 5 = 4x + 2 - 2x$

**Solución**:
**a)** Realizando pasajes de términos a efectos de obtener la forma convencional, tenemos:

$$3x = 5 - 8$$
$$3x = -3$$

multiplicando por $\frac{1}{3}$ en ambos miembros, resulta $x = -1$; la cuál es la única solución.

**b)** Con los pasajes de términos obtenemos: $6x - x + 2x - 7x = -6 + 2$
es decir: $0x = -4$
resultando una ecuación que no tiene solución, pues no existe valor para $x$ que satisfaga la igualdad.

**c)** Reescribiendo se obtiene: $2x-4x+2x=2+3-5$
o sea: $0x=0$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, pues cualquier real $k$, satisface la igualdad.

### E.2) Ecuaciones Lineales Degeneradas

Toda ecuación lineal que tiene nulos a los coeficientes de las incógnitas se denomina **degenerada**. Es decir, tiene la forma:

$$0x_1+0x_2+....+0x_n=b$$

La siguiente propiedad nos indica lo que sucede con la solución de tal tipo de ecuación:

**Propiedad 2:** Dada una ecuación lineal degenerada con $n$ incógnitas, se tiene:
**a)** si $b\neq 0$ la ecuación no tiene solución.
**b)** si $b=0$ , la solución es cualquier $n$-upla $\boldsymbol{u}=\left(k_1,k_2,....,k_n\right)$

**Ejemplo 13:** Describir la solución de $3x-y-5-2x=x+4y-2-5y-3$

**Solución**: Al tomar la forma convencional tenemos:

$$3x-y-5-2x=x+4y-2-5y-3$$

o sea $0x+0y=0$

Por lo que cualquier par $(a,b)$ de números reales, es solución de la ecuación dada.

### E.3) Ecuaciones Lineales no Degeneradas

Para el caso de ecuaciones lineales con *n* incógnitas donde no todos los coeficientes de las incógnitas son nulos, la ecuación se dice ***no degenerada***. En cuyo caso entendemos por ***primera incógnita*** en tal ecuación a la primera que posee coeficiente no nulo. Las otras incógnitas distinta de la primera incógnita se conoce como ***variables libres***. Este nombre se desprende de los valores que pueden adoptar en la solución de la ecuación. Esto se indica en la siguiente propiedad.

**Propiedad 3:** Dada una ecuación lineal no degenerada con *n* incógnitas, cuya primera incógnita es $x_p$, resulta:

**a)** cualquier conjunto de valores de las incógnitas distinta de $x_p$ es una solución de la ecuación.
**b)** toda solución de la ecuación se obtiene del conjunto solución obtenido en **a)**.

De ésta propiedad, resulta que una vez reconocidas las variables libres, la solución de la ecuación se expresa en términos de las primeras variables, esto significa que las variables libres adoptan un valor llamado ***parámetro***.

**Ejemplo 14:** Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $2x+3y=6$ **b)** $3x+y-2z=4$

**Solución**:

**a)** La primera variable es $x$, mientras que $y$ es variable libre; parametrizando a $y$ de forma que: $y=a$, queda: $2x+3a=6$
Despejando $x$, resulta: $2x=6-3a$

$$x=3-\frac{3}{2}a$$

Luego, todo par de la forma $\left(3-\frac{3}{2}a;a\right)$ con $a$ real arbitraria es solución de la ecuación.

**b)** Las variables libres son $y$ y $z$. Hacemos $y= a$ y $z = b$, la ecuación queda:

$$3x+a-2b=4$$

Luego $x=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$

Así toda terna $\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b;a;b\right)$ con $a$ y $b$ reales arbitrarios es solución de la ecuación.

## EJERCICIOS

**9.- (EO)** Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

**a)** $-x + 6x = 3$ **b)** $1+ cx = 0$ **c)** $3x - 5 - x = 4x + 2$ **d)** $5x - 3x - 2 = x + 3 - 4x$

**10.-** Resolver las siguientes ecuaciones, distinguiendo primero que números no pertenecen al dominio del conjunto solución:

**a) (EO)** $\frac{3}{x+4}=\frac{2}{3x-2}$

**b)** $\frac{1}{2x+5}-\frac{4}{2x-1}=\frac{4x+4}{4x^2+8x-5}$

**c) (EO)** $\frac{3x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{5}{6}$

**d)** $-2[y-(5-4y)]+4=-3y$

**e) (EO)** $\frac{3}{8}+\frac{1}{2x}=\frac{2}{x}$

**f) (EO)** $\frac{2}{3x-4}=\frac{5}{6x-7}$

**11.- (EO) (AB)** Resolver los siguientes problemas:

**a)** Un cantero de un jardín tiene forma rectangular. El largo es 3 metros menor que cuatro veces su ancho; además el perímetro es de 19m. Encuentre las medidas del cantero.

**b)** A un corredor le toma 3minutos con 45 segundos terminar una carrera, mientras que otro necesita 4min para la misma carrera. La velocidad del corredor más rápido es de 0,4 m/s más que la del corredor lento. Calcular esas velocidades.

## F) Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas

Consideremos ahora ecuaciones lineales con dos incógnitas, sean éstas $x$ e $y$. La forma de las ecuaciones es: $ax + by = c$, donde $a$, $b$ y $c$ son números reales. Entendemos por solución de ésta ecuación a todo par de números reales $k_1, k_2$, que reemplazados en la ecuación por $x$ e $y$ respectivamente, satisfacen la igualdad. Consideramos aquí a las constantes ambas no nulas, es decir, a ecuaciones no degeneradas.

Gráficamente podemos interpretar a la ecuación como el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas en el sistema de coordenadas XY, sean $k_1, k_2$. Dichos puntos se hallan situados a lo largo de una recta que se toma como gráfico de la ecuación. De aquí resulta inmediato ver que toda ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

**Ejemplo 15:** Vimos ya en el Ejemplo 13, que las soluciones estaban dadas por todos los pares de la forma $\left(3 - \frac{3}{2}a; a\right)$ con $a$ real arbitrario. Esta forma general, permite obtener algunos pares a medida que $a$ toma distintos valores. Así con $a = 0$, se tiene $(3,0)$; otros pares son $(0,2)$; $(-3,4)$. Graficando estos pares como puntos en el plano y cualquier otro que se obtenga al dar valor a $a$, se observa que están alineados. Dichos puntos se grafican en la figura 1.

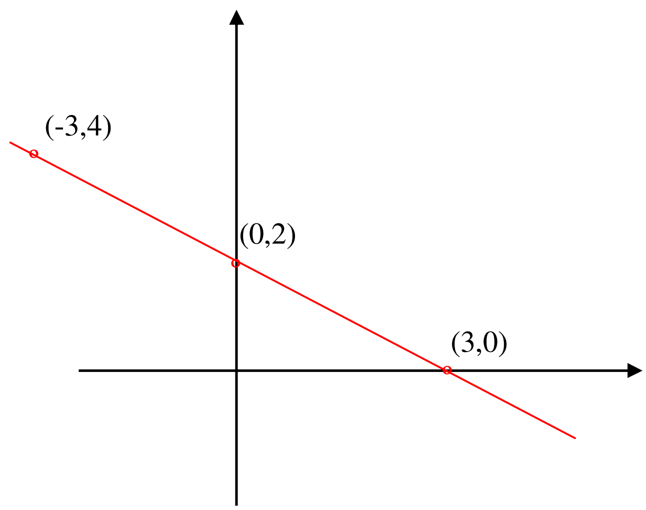


Figura 1.-Soluciones de la ecuación $2x + 3y = 6$

**EJERCICIOS**

**12.-**Complete:
**a.-**Una ecuación es una........................ que posee al menos un termino o variable ........................ llamado ...............
**b.-**La forma general de una ecuación lineal con una incógnita es..............................
**c.-**La forma general de una ecuación lineal con dos incógnitas es .....................

**13.- (EO)** En las siguientes ecuaciones lineales con dos incógnitas identifique la variable libre y halle la solución de tal ecuación en términos de la primera variable y la variable libre:

**a)** $3x + 5y = 6$ **b)** $6x - 11y = 12$ **c)** $-7x + 3y = 4$

## G) Ecuaciones de segundo grado en una variable

Se dice ***ecuación de segundo grado en una variable*** $x$ a la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a$, $b$ y $c$ son constantes reales, con *a* no nulo. También se la suele llamar ***ecuación cuadrática*** en $x$.

El término $a$ se llama ***cuadrático*** y no debe ser cero, pues deja de ser cuadrática la ecuación. El término $b$ se llama ***lineal,*** y puede ser nulo. El restante término, $c$ se llama ***independiente***, y también puede se nulo. Por eso la forma dada se llama general, y es un polinomio completo de segundo grado en $x$.

**Ejemplo 16:** son ecuaciones de segundo grado en $x$, las siguientes:

**a)** $5x^2 + 6x + 1 = 0$ **b)** $x^2 - 7 = 2x$ **c)** $\frac{1}{4}x^2 - 3x = 0$

**d)** $4x^2 = 16$ **e)** $\frac{x}{x-3} = \frac{4}{x+1}$

En efecto, las cuatro primeras se las reconoce inmediatamente, en **a)** los términos cuadráticos, lineal e independiente son 5, 6 y 1. En **b)** debemos pasar al primer miembro restando $2x$, con los cual los términos son 1, -2 y -7 respectivamente. En **c)** falta el término independiente, o sea es nulo. En **d)** el término que falta es el lineal. La ecuación **e)** también es cuadrática, solo que deben pasarse los denominadores multiplicando, y buscar la forma general, que es $x^2 - 3x + 12 = 0$

Una vez que distinguimos los términos de la ecuación vamos a proceder a resolver, para ello tenemos la siguiente fórmula que expresa las raíces de la ecuación,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Ejemplo 17:** Resolver la ecuación $5x^2 + 6x + 1 = 0$

**Solución:** En el ejemplo anterior distinguimos a los términos $a$=5, $b$=6 y $c$= 1. Apliquemos ahora la ecuación anterior:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{10} == \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{-6+4}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{-6-4}{10} = -\frac{10}{10} = -1 \end{cases}$$

Las raíces son entonces $x_1 = -\frac{1}{5}$ y $x_2 = -1$

La expresión que se halla debajo del signo radical en la fórmula de la solución de la ecuación cuadrática $b^2 - 4ac$ ,se llama ***discriminante*** . En efecto, a partir de ella se puede saber la forma que tiene la solución, pues:

1. si es positivo el discriminante se tiene dos raíces reales y distintas:

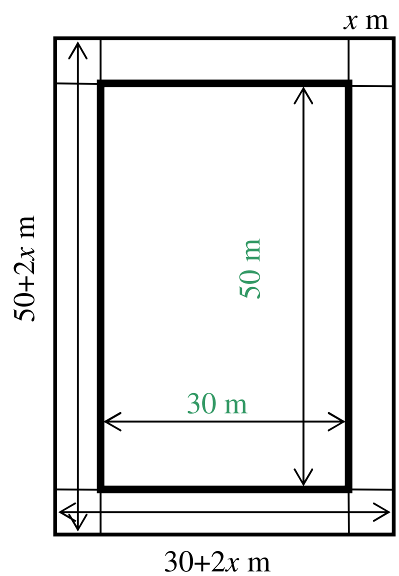
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. si el discriminante es nulo, las raíces coinciden y se tiene:
$$x = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$
3. si el discriminante es negativo, la raíz cuadrada no puede resolverse dentro de los números reales, y en tal caso su solución en imaginaria, por lo que las raíces de la ecuación son complejas.

**Ejemplo 18:** Un parque tiene un jardín de 50m de largo y 30 m de ancho; y una vereda de ancho uniforme a su alrededor. Si el área de la vereda es de 600 $m^2$, hallar su ancho.

**Solución:** Realicemos una figura de análisis, en donde llamamos $x$ al ancho de la vereda. Así el área de la vereda es igual al área del parque menos el área del jardín, esto es:

$$(50+2x)(30+2x) - 50 \cdot 30 = 600$$
$$1500 + 100x + 60x + 4x^2 - 1500 = 600$$
$$4x^2 + 160x - 600 = 0$$




$$x = \frac{-160 \pm \sqrt{160^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-600)}}{2 \cdot 4}$$

Esto da dos raíces, una negativa que se la descarta del problema, pues la medida debe ser positiva, en cuyo caso tomamos como solución a 3,45; con lo cuál el ancho de la vereda debe ser 3,45 m.

**EJERCICIOS**

**14.-** Complete los siguientes enunciados:
**a)** La forma general de una ecuación cuadrática con una incógnita es: ..........................................
**b)** Una ecuación cuadrática tiene .............. raíces. Las mismas quedan determinadas por las siguientes expresiones:
**c)** Las raíces de una ecuación cuadráticas pueden ser: ambas ................., o bien ambas reales e ..............., o bien ...............................conjugadas.

**15.- (EO)** Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

**a)** $x^2 - 4x + 3 = 0$ **b)** $x^2 - 8x + 12 = 0$ **c)** $x^2 - 7x = 0$

**d)** $4x^2 - 1 = 3$ **e)** $\frac{4}{x^2} - 1 = 0$ **f)** $\frac{x+3}{3} = \frac{-4}{x-4}$

**16.- (EO)(AB)** Hallar el largo y el ancho de una zona experimental de un sembradío si su área es de 360$m^2$, y su largo es dos metros más que el ancho.

**17.-** Una página de impresión con 144 $cm^2$ de área impresa tiene un margen de 4,5 cm en las partes superior e inferior y márgenes laterales de 2 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de la página si el ancho de la misma equivale a 4/9 de su longitud?

**18.- (EO)(AB)** Un parque en forma de rectángulo tiene dimensiones de 60 m por 100 m. Si el parque contiene un jardín rectangular rodeado por una vereda de concreto, ¿qué ancho tiene dicha vereda si el área del jardín es la mitad del área del parque?

**19.- (EO)(AB)**¿Cuál es el ancho de una franja de tierra que debe ararse alrededor de un campo rectangular, de modo que se aren dos tercios de la superficie del campo, sabiendo que todo el campo tiene 100 m de largo por 60 m de ancho?

## H) Notación Científica

Una importante aplicación de la potenciación se halla presente en la escritura de ciertos números que expresan cantidades que al ser comparadas con otras, por ejemplo su unidad de medida, parecen muy distantes.
En efecto, si se nos preguntaran cuántos gramos hay en una tonelada, debemos recordar que en un kilogramo hay mil gramos y en una tonelada existen mil kilogramos, por lo tanto en la tonelada existen un millón de gramos. Usando símbolos la cantidad de dígitos que necesitamos para expresar el número un millón son siete: 1.000.000. Si alguien se propusiera escribir la cantidad de centímetros que caben en el radio terrestre tendría un poco más de complejidad, salvo que escriba en forma resumida el número de varios dígitos.
La forma abreviada de escribir un número de varias cifras es a través de potencias de diez, así el número: 43.200.000.000.000 puede denotarse de la siguiente manera: $4{,}32 \times 10^{13}$.

Esta forma abreviada se llama ***Notación Científica***, y permite escribir en forma exacta o aproximada, a un número de varias cifras. Para ello se tiene un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra, y a partir de allí la coma decimal corre tanto lugares según lo indica el exponente de diez, siendo a la derecha el desplazamiento si dicho exponente es positivo.

Veamos algunos ejemplos:

$633.000 = 6{,}33 \times 10^{5}$ $\qquad$ $4.402.000.000 = 4{,}402 \times 10^{9}$

$0{,}0000000501 = 5{,}01 \times 10^{-8}$ $\qquad$ $0{,}0000000000000081 = 8{,}1 \times 10^{-15}$

## EJERCICIOS

**20.- (EO)(AB)** En un libro de Ciencias Biológicas, encontramos el siguiente texto: ***" Si pusiéramos diez millones de átomos en fila india, su longitud sería de un solo milímetro".***
¿Cuántos átomos podríamos colocar en una fila de un metro? Expréselo en notación científica.

**21.-**El espesor de todas las hojas de un libro de 500 páginas es de 1,788 cm. Exprese en notación científica el espesor aproximado de una hoja.

**22.- (EO)(AB)** El diámetro de un glóbulo rojo es de 0,00007377 mm y el diámetro de un glóbulo blanco es de 1,47x $10^{-4}$ mm. ¿Cuál de los dos glóbulos es mayor?

## I) Grafica de una ecuación

Consideremos la ecuación $y = x^2 - 2$. Para ciertos lectores, la relación algebraica dada por la ecuación será más reveladora para un análisis, mientras que otros puedan preferir una tabla con todas las soluciones posibles, o al menos algunas de ellas si estas son infinitas, para dar una idea más clara de la realidad. Sin embargo, no siempre es posible conocer o deducir de la ecuación algebraica sus soluciones, y a menudo es preciso conformarse con una tabla de los valores correspondientes. En estos casos es conveniente y más útil una ***representación gráfica*** de los pares de valores $(x, y)$ que satisfacen la ecuación.

En la figura 1 se muestra los datos de la tabla 1, presentados en forma gráfica. El eje horizontal tiene divisiones adecuadas para representar la primera variable $x$ y a lo largo del eje vertical se ha construido una escala correspondiente a la segunda variable $y$. El punto de intersección de ambos ejes es el ***origen***.

Cada observación de la tabla 1 se indica sobre la gráfica señalando los puntos cuya distancia horizontal al origen, llamado ***abscisa***, corresponde a la variable $x$ y cuya distancia vertical al origen, llamada ***ordenada***, corresponde a la variable $y$. Posteriormente trazamos una línea continua entre estos puntos siguiendo la secuencia de los valores crecientes de la primera variable.

| $x$ | $y = x^2 - 2$ |
|---|---|
| -4 | 14 |
| -3 | 7 |
| -2 | 2 |
| -1 | -1 |
| 0 | -2 |
| 1 | -1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 7 |
| 4 | 14 |

Tabla 1: soluciones de la ecuación $y = x^2 - 2$

La ***gráfica de una ecuación*** en el plano real $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son números que satisfacen la ecuación.

En forma idéntica podemos decir que la ***ecuación de una gráfica*** es aquella que se verifica para todo par de coordenadas de los puntos de la gráfica.

Para la ecuación $y = x^2 - 2$, la gráfica de la ecuación esta dada por la figura 1. Esta se denomina parábola; el punto más bajo de la misma, en este caso (0,-2) se llama **vértice**. Por ello se dice que la parábola se abre hacia arriba, y por la simetría que presenta respecto del eje Y, este es el eje de simetría.

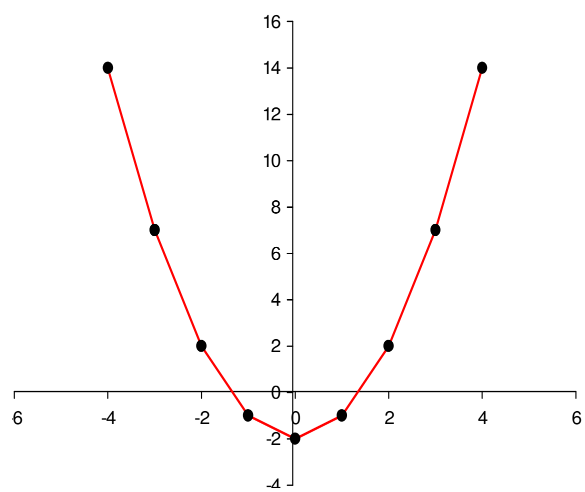



Figura 1: grafica de la ecuación $y = x^2 - 2$

Debe quedar en claro que si una parábola se abriera hacia abajo, el vértice será el punto más alto de la parábola.

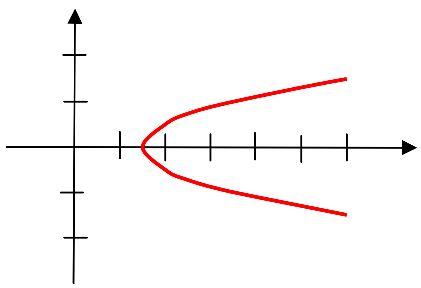
**Ejemplo 19:** Trazar la gráfica de la ecuación $y^2 = x - 3$

**Solución:** Primero buscamos despejar $y$ de la ecuación. Esto es

$$y = \pm\sqrt{x-3}$$

Construimos una tabla con pares de valores $(x, y)$, aunque debemos tomar para cada $x$ dos valores de $y$ según el signo. Antes de dar valores a $x$ debe tenerse en cuenta que éste debe ser mayor o igual a 3 para poder obtener $y$ real.

| $x$ | $y = +\sqrt{x-3}$ | $y = -\sqrt{x-3}$ |
|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | -1 |
| 5 | 1,4142… | -1,4142… |
| 7 | 2 | -2 |
| 12 | 3 | -3 |



En éste caso se tiene también una parábola, pero con eje de simetría en el eje X, y el vértice es el punto que se halla mas a la izquierda, es decir, la parábola se abre hacia la derecha.

Grafica de la ecuación $y^2 = x - 3$

- Una grafica muy conocida es la ***circunferencia***, sea esta de radio $r$ y con centro en el punto de coordenadas $(h\,,k)$, entonces la ecuación esta dada por

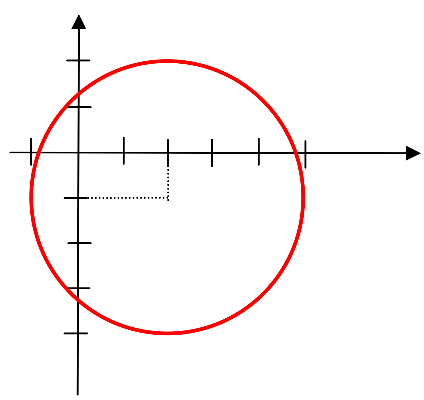
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Para el caso de una circunferencia de centro en el origen del sistema de coordenadas, la ecuación es: $x^2 + y^2 = r^2$

Al igual que antes, para hallar pares de valores se debe despejar $y$.

**Ejemplo 20:** Trazar la gráfica de la ecuación $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

**Solución:** Podríamos primero buscar despejar $y$ de la ecuación para hallar los pares de valores de las coordenadas de algunos puntos de la circunferencia, pero esto queda como un ejercicio. Haremos un pequeño análisis, usemos la ecuación dada y comparemos con la ecuación de la circunferencia de centro en el punto de coordenadas $(h\,,k)$. Esto es, $h$ es 2 mientras que $k$ es -1, así el centro de la circunferencia es el punto (2,-1). En cuanto al radio es 3, pues $r^2 = 9$.



**EJERCICIOS**

**23.-** Hallar los pares de valores de las coordenadas de puntos de la grafica de la ecuación $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, de manera que se hallen en la grafica del ejemplo 3 anterior.

**24.-**Completar: Se entiende por grafica de una ecuación ……………………….................
……………………………………………..........................................................................................

**25.-** Realizar la grafica de las siguientes ecuaciones, recuerde que un proceso valido es despejar *y* y luego hallar pares de valores completando una tabla, y finalmente graficar:

**a.- (EO)** $x^2 + y^2 = 4$ **b.- (EO)** $y = \sqrt{x}$ **c.- (EO)** $y = \sqrt{x-3}$

**d.-** $y = \sqrt{x+5}$ **e.-** $y^2 - x + 1 = 0$ **f.- (EO)** $y = 3 - x^2$

**g.-** $x^2 - y^2 = 1$ **h.-** $(x-2)^2 + y^2 = 9$

**J) Ecuación de la recta**

Daremos a continuación una presentación formal de la ***ecuación de la recta***, para lo cuál usaremos la notación matemática adecuada.

Sea *r* una recta no paralela al eje de las $y$, o sea no es vertical. Sean dos puntos en esa recta $r$, que los llamaremos $R$ y $Q$. Dichos puntos según la ubicación en el plano se determinan en forma única a través de sus coordenadas.

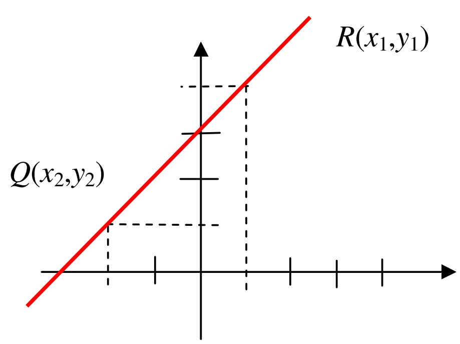
Sean entonces: $R(x_1, y_1); Q(x_2, y_2)$ los puntos sobre $r$.

Se define como ***pendiente de una recta*** a la diferencia entre las ordenadas de dos puntos cualesquiera de la misma, dividida por la diferencia entre sus correspondientes abscisas, midiéndose cada diferencia en las unidades adecuadas, elegidas para las escalas tomadas a lo largo de cada eje. Formalmente:

**Definición 5:** Se define como ***pendiente de la recta*** $r$, al cociente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Si la recta es paralela al eje $y$, o sea si es vertical, la pendiente no esta definida.

Es decir la pendiente es un número real, siendo positivo cuando el ángulo que forma la parte de la recta que esta por arriba del eje X, con respecto al semieje positivo, es agudo, o sea, menor que un ángulo recto. La pendiente es negativa si el ángulo mencionado es mayor que un ángulo recto pero menor que un o llano.




**Ejemplo 21:** Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $R(4,-6)$ y $Q(5,-2)$.

**Solución:** Reemplazando queda $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-2+6}{5-4} = \dfrac{4}{1} = 4$

Así la pendiente es $m = 4$

**Ejemplo 22:** Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $R(1,4)$ y $Q(3,-2)$.

**Solución:** Reemplazando queda $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-4}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3$

Así la pendiente es $m = -3$

Realice las graficas correspondiente a los ejemplos 3 y 4 para interpretar la relación entre el signo de la pendiente y el ángulo citado.
La pendiente de la recta será nula si el numerador de la definición es nulo, esto ocurre cuando la recta es paralela al eje X.
La pendiente de una recta es independiente de los puntos que se elijen, así este valor se obtiene a partir de dos puntos cualesquiera de la recta.

La ecuación de la recta no vertical es aquella igualdad que satisface todo punto de esa recta, para ello tendremos en cuenta que una recta está bien definida:
i) cuando se conocen dos puntos de la misma, y
ii) cuando se conoce la pendiente y un punto.

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la recta, por lo tanto la pendiente entre los puntos $P$ y $R$ es la misma que la pendiente entre los punto $R$ y $Q$, por lo tanto:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora despejemos *y:* $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

Esta es la ***ecuación de la recta que pasa por dos puntos.***

**Ejemplo 23:** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $R(1,4)$ y $Q(3,-2)$.
**Solución:** Reemplazando los valores de las coordenadas en la expresión anterior nos queda:

$$y = \frac{-2-4}{3-1}(x-1) + 4 = \frac{-6}{2}(x-1) + 4 = -3x + 3 + 4 = -3x + 7$$

La ecuación de la recta es $y = -3x + 7$.

Por otro lado si sustituimos la expresión correspondiente a la pendiente nos queda:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

La cuál se llama ***ecuación de la recta de punto y pendiente.***

**Ejemplo 24:** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $R(1,4)$ y tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$

**Solución:** Reemplazando los valores de las coordenadas en la expresión anterior nos queda:

$$y = \frac{2}{3}(x-1) + 4 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 4 = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

La ecuación es $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

Un punto importante de la recta, es el que corta al eje vertical Y, supongamos que este punto corta al eje en el valor $b$, así las coordenadas del punto es $(0,b)$. Siendo entonces la pendiente $m$, la ecuación resulta ser:

$$y = mx + b$$

Esta se llama ***ecuación de pendiente y ordenada al origen***.

Podemos expresar en términos de la pendiente a las rectas paralelas diciendo que dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente.

**Ejemplo 25:** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(3,-1)$, y es paralela a la recta con ecuación $y = 2x - 5$.

**Solución:** Al ser paralela a la recta dada tiene igual pendiente, o sea es $m = 2$, además conociendo un punto reemplazamos en la ecuación de punto y pendiente:

$$y = 2(x-3) + (-1) = 2x - 6 - 1 = 2x - 7$$

Así la ecuación es $y = 2x - 7$

Cuando se trata de ecuaciones perpendiculares se tiene la propiedad trigonométrica que dice si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

**Ejemplo 26:** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(-2,5)$, y es perpendicular a la recta con ecuación $y = \frac{3}{2}x - 4$.

**Solución:** Sea $m$ la pendiente de la recta que buscamos, el producto por la pendiente de la recta dada es menos uno, o sea:

$$m \cdot \frac{3}{2} = -1$$

De donde $m = -\frac{2}{3}$

Con esta pendiente y el punto dado resulta:

$$y = -\frac{2}{3}\left[x - (-2)\right] + 5 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 5 = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

Luego la ecuación es $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

Finalmente consideremos la recta vertical. Sea $r$ una recta vertical que corta al eje X en el punto $(c,0)$, entonces todo punto de la recta tiene todos los valores reales posibles como segunda componente, y la primera componente siempre es $c$, por ello no se define la pendiente, y en tal caso la ***ecuación de la recta vertical*** es $x = c$.

Todo lo dicho hasta aquí, puede resumirse diciendo que la ***ecuación general de la recta en el plano*** es $ax + by = c$, con $a$, $b$ y $c$ números reales.

A partir de la ecuación general se deducen todas las anteriores.

## EJERCICIOS

**26.- (EO)** Complete
**a.-**La representación gráfica en el plano de una ecuación lineal con dos incógnitas es una ...............................
**b.-**La ecuación general de la recta es..........................
**c.-**Se entiende por pendiente de una recta que pasa por dos puntos de coordenadas (...,...) y (....,...) a la expresión.......................................
**d.-**Siendo P un punto de coordenadas (..,...) sobre una recta y ...... la pendiente de tal recta, la ecuación de tal recta es.....................
**e.-**La ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos de coordenadas (....,...) y (...,...) es .................

**27.- (EO)** Determine la pendiente de la recta que pasa por los pares de puntos dados:
**a)** p(4,-3) q(-4,1) **b)** a(5,0) b(-2,-2)

**28.- (EO)** Obtenga para cada apartado, la ecuación de la recta que cumpla las condiciones que se indican:
**a)**La pendiente es 3 y pasa por el punto (1,-3).
**b)**Pasa por los puntos (5,2) y (-3,6).
**c)**Pasa por los puntos (-4,0) y (3,0).
**d)**Pasa por el punto (-1,-6) y es paralelo a la recta cuya ecuación es $3x-5y+4=0$.
**e)**Pasa por el punto (-2,3) y es perpendicular a la recta con ecuación $2x-4y+1=0$.

**29.- (EO)** Se encontró que la conductividad de una cierta disolución biológica varía con la concentración del siguiente modo.
Represéntense los datos en forma gráfica, y determínese la pendiente de la recta obtenida. Escríbase una ecuación que dé la relación funcional entre la conductividad $k$ y la concentración $c$.

| Concentración (mol/m$^3$) | Conductividad |
|---|---|
| 0,10 | 6,1 |
| 0,15 | 8,9 |
| 0,20 | 11,5 |
| 0,25 | 14,9 |
| 0,30 | 17,8 |
| 0,35 | 20,0 |
| 0,40 | 22,4 |
| 0,45 | 25,5 |
| 0,50 | 29,0 |
| 0,55 | 31,6 |
| 0,60 | 34,2 |

**30.- (EO)(AB)** La gráfica de una ecuación que relaciona las lecturas de la temperatura en grados Celsius y en grados Fahrenheit es una recta. El agua se congela a 0° Celsius y 32° Fahrenheit; y ebulle a 100° Celsius y 212° Fahrenheit.
**a.-**Si $y$ grados Fahrenheit corresponden a $x$ grados Celsius, escriba una ecuación que incluya a $x$ y a $y$.
**b.-**Trace la gráfica de la ecuación obtenida.
**c.-**¿Cuál es la temperatura en Fahrenheit equivalente a 45° Celsius?
**d.-**¿Cuál es la temperatura en Celsius equivalente a 74° Fahrenheit?

**31.- (EO)(AB)** La altura media de la malva real en un conjunto de tablas experimentales variaba con el número de aplicaciones de un líquido fertilizante, los resultados aparecen en la siguiente tabla:
Represente los resultados en una gráfica y trate de establecer una ecuación que exprese la relación funcional entre las variables.

| Altura (cm) | Número de veces |
|---|---|
| 20,2 | 0 |
| 20,9 | 1 |
| 21,8 | 2 |
| 22,7 | 3 |
| 23,3 | 4 |
| 24,2 | 5 |
| 25,1 | 6 |
| 25,8 | 7 |

## SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS

**2.- a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{64}$ **c)** $5$ **d)** $\frac{729}{64}$ **e)** $\frac{16}{1125}$ **f)** $\frac{100}{9}$ **g)** $\frac{1}{18}$

**4.- a)** $\frac{11}{30}$ **b)** $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{x-2}{x^2}$ **d)** $\frac{7x+x^2}{x^2-4}$ **e)** $\frac{10x^2-2}{x^2}$
**f)** $-3$ **g)** $\frac{1}{3a^2b}$ **h)** $\frac{7}{15}$ **i)** $\frac{1}{x-1}$ **j)** $x(x+1)$

**5.- a)** $a^{17/6}$ **b)** $x^{31/30}$ **c)** $a^{5/4}$ **d)** $-27x^2$ **e)** $a^{4/3}$ **f)** $x^{44/15}$ **g)** $x^{2/15}$

**6.- a)** No es lineal porque el ultimo termino tiene el producto de dos variables.
**b)** Es lineal **c)** Es lineal

**7.-** Si es solución.
**8.- a)** No es solución ; **b)** Si es solución.
**9.- a)** $x=\frac{3}{5}$ **b)** $x=\frac{-1}{c}; c\neq 0$ **c)** $x=-\frac{7}{2}$ **d)** $x=1$

**10.-a)** $x=2$ **b)** No tiene solución **c)** $x=2$ **d)** $y=2$ **e)** $x=4$ **f)** $x=2$

**11.-a)** Largo 7 metros y ancho 2,5 metros.
**b)** Las velocidades son 6,4 y 6 metros por segundo.

**13.-a)** $\left(2-\frac{5}{3}a;a\right)$ **b)** $\left(2+\frac{11}{6}a;a\right)$ **c)** $\left(\frac{-4+3a}{7};a\right)$

**15.-a)** $x_1=3; x_2=1$ **b)** $x_1=6; x_2=2$ **c)** $x_1=7; x_2=0$
**d)** $x_1=1; x_2=-1$ **e)** $x_1=2; x_2=-2$ **f)** $x_1=0; x_2=1$

**16.-** El largo es de 20 m y el ancho 18m.
**17.-** La página tiene 27 cm de largo y 12 de ancho.
**18.-** El ancho de la vereda es de 10,845m.
**19.-** El ancho de la franja es de 15,50 m.
**20.-** Hay $10^9$ átomos en una fila india de un metro.
**21.-** Cada hoja tiene un espesor de $7{,}152\times10^{-3}$ cm.
**22.-** El glóbulo blanco es mayor.
**27.- a)** $m=-\frac{1}{2}$ **b)** $m=\frac{2}{7}$
**28.-a)** $y=3x-6$ **b)** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ **c)** $y=0$ **d)** $y=\frac{3}{5}x-\frac{27}{5}$ **e)** $y=-2x-1$

**30.- a)** $y=\frac{9}{5}x+32$ **c)** $113°F$ **d)** $23{,}3°C$