2019

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA

“APRENDIZAJE ESTRATÉGICO DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS”

Autores:

- **Especialista Lic. Graciela Inés CARRANZA**
  gicarranza@yahoo.com.ar
- **Ing. Adriana Mabel LEZANA**
  mabelezana@yahoo.com.ar
- **Ing. Raúl Eduardo LEIVA**
  raulleiva05@yahoo.com.ar
- **Prof. Martha Noemí SECO**
  marthanseco@yahoo.com.ar
- **C.P.N. Rosa Margarita RODRÍGUEZ**
  arros01@yahoo.com.ar

Facultad de Ciencias Económicas y de Administración - UNCA
Noviembre de 2018

Colaboradores:

- ✓ C.P.N. Ana Teresa Calvimonte (Coordinación General)

  acalvimonte@eco.unca.edu.ar

- ✓ Mg. Marisa Rosana Juri (Producción Multimedia)

  rosanajuri@eco.unca.edu.ar

- ✓ T.A.E.S. Rodolfo Alejandro Rivas López (Diseño)

  rrivas@unca.edu.ar

Aprendizaje estratégico de conceptos matemáticos : manual de taller para la actividad de nivelación / Graciela I. Carranza ... [et al.]. - 1a ed . -
Catamarca : Editorial Científica Universitaria de la
Universidad Nacional de Catamarca, 2018.
Libro digital, HTML

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-661-297-5

1. Matemática. 2. Estrategia de Aprendizaje. I. Carranza, Graciela I.
CDD 510.711

CONTENIDO

0 INTRODUCCIÓN

0.1 Algunas pautas para ser un estudiante universitario exitoso

En esta instancia de trabajo debe estar consustanciado con el rol de estudiante universitario. Ese rol lleva implícitas **responsabilidades**, **sacrificios**, **estudio**, **dedicación** **y sobre todo** **querer ser**, **querer hacer**, **querer aprender**, ejerciendo en toda su magnitud tal figura.

Muchas de las instancias nuevas que va a vivir en esta trayectoria de estudio, pueden parecer difíciles de pasar, pero las garras que ponga y los objetivos que se proponga deben ser los que guíen su accionar.

0.1.1 Aprender

Aprender no es sólo adquirir nuevos conocimientos, conduce además a contactarse con principios, normas y procedimientos.

El **aprender** es una construcción de significados, y se dice que el aprendizaje es significativo si se ha logrado comprender, en el sentido de captar la idea, interpretar, explicar, justificar, aplicar, vincular, etc.

El aprendizaje es una actividad que debe desarrollar quien quiere aprender, destacándose como el protagonista principal. Para garantizar el aprendizaje no es suficiente con la presencia en la clase o acumulando horas frente a un texto, sino que si desea aprender tendrá que adoptar **actitudes positivas**, **activas**, **ser partícipe del proceso de estudio**, **planificar tareas**, **buscar materiales de lectura**, es decir, dejar de lado la comodidad, la pasividad, el menor esfuerzo, la desazón, etc.

0.1.2 Comprender

La **comprensión** es una actividad indispensable y continua a través de la cual se busca *acomodar* los nuevos datos[1], proporcionados por los sentidos, a lo ya conocido. En el proceso de comprensión los datos provenientes del exterior se unen en forma coherente con los que están guardados en la memoria a largo plazo. Es decir en dicho proceso, se recurre al conocimiento previo o elemental (*base*) y a partir de allí se estructura el nuevo conocimiento.

Para el caso específico de la Matemática, el conocimiento previo se refleja en conceptos, relaciones que los vinculan, operaciones que pueden realizarse entre ellos, propiedades que rigen tales operaciones, fórmulas y procedimientos que permiten resolver problemas. En otras palabras, todo lo que va aprendiendo y comprendiendo, lo debe guardar o almacenar en su carpeta de recuerdos de conceptos matemáticos y luego activarlos cuando requiera relacionarlos con nuevos conceptos por aprender.

La comprensión tiene por función acrecentar el conocimiento y trascenderlo (ir más allá), ya que es la encargada de darle sentido a las cosas.

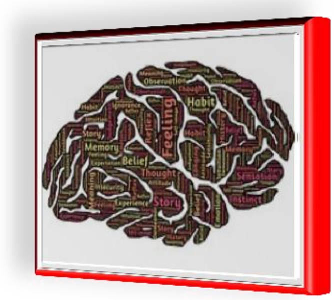
El mayor o menor nivel de comprensión que adquiera se evidenciará a través de sus posibilidades de realizar tareas (también llamadas desempeños de comprensión). Constituyendo, este nivel de comprensión, un pilar importantísimo; mucho más relevante y fructífero que la mera ejecución de cálculos o la memorización de propiedades.

[1] Entendiendo a datos como palabras, conceptos, relaciones, formatos relacionados con cualquier aspecto (lingüístico, cultural, científico, cultural).

0.1.3 Interpretar

Interpretar: se define como el proceso de atribuir un significado personal a los datos contenidos en la información que se recibe; y exige, por lo tanto, efectuar una selección previa de los conocimientos del campo en el que se está trabajando.

La noción de significado es esencial para la educación matemática; no se puede pretender comprensión si no se tiene claro qué es el significado. Siendo el significado el contenido al que se refiere el emisor de una expresión o el que interpreta el receptor -lo que quiere decir uno o lo que entiende el otro–, cuando los significados atribuidos a dicha expresión por dos personas son diferentes se produce un conflicto semiótico[2], y éste, es uno de los factores que obstaculizan el aprendizaje.



El aspecto discursivo permite que quién habla y quién escucha se ubiquen en el mismo espacio, utilizando como instrumento al **lenguaje**. Y ello se alcanzará con mayor o menor eficacia en función de los recursos con que se cuente. Es indudable la *interdependencia* entre el lenguaje y el desarrollo conceptual: si se carece de conceptos no hay comprensión de la palabra que lo identifique y recíprocamente, la carencia del vocabulario hace imposible la acomodación del concepto.

De allí que su rendimiento intelectual se vinculará, en un altísimo grado, con su comprensión lingüística. Si la información llega fallada al cerebro, será producto de no tener claro el significado de los términos o no poder contextualizar el problema, por lo tanto su capacidad de razonamiento se verá trabada y no actuará (o lo hará erróneamente).

El **lenguaje de la Matemática** es un lenguaje formalizado y que a diferencia del lenguaje natural (que es el utilizado para comunicarse con quienes

[2] La semiosis es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos. Incluyendo la creación de un significado. Es un proceso que se desarrolla en la mente del intérprete; se inicia con la percepción del signo y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo.

hablan la misma lengua) incluye símbolos, fórmulas, palabras, oraciones, reglas de operación y de sintaxis rigurosamente definidos.

Conocer el lenguaje matemático no implica solamente centrarse en la coordinación de las palabras que expresan los conceptos (sintaxis) sino dominar el significado y la naturaleza de dichos conceptos (semántica) dentro del contexto adecuado.

En el lenguaje matemático se han adoptado tres registros: el coloquial o natural, el simbólico y el gráfico.

Un objetivo primordial, de Ud. que quiere estudiar, debería ser la adquisición de habilidades y buenas **estrategias cognitivas**, **metacognitivas** y **afectivas.** Desarrollar un pensamiento independiente, crítico y analítico que vaya asociado a la idea de un aprendizaje de interpretación y de transformación.

Por ello es necesario que tenga un motivo para estudiar, es decir que tenga la intención de hacerlo, ya que eso le ayudará a caminar este proceso de formación gradual.

Debe saber que los ingredientes, mínimos, que conforman un buen proceso de aprendizaje son: *motivación, concentración, actitud, organización, comprensión, repetición* y *muchas ganas de aprender*. ¡Vaya, y hay que tenerlos a todos! De allí, que si algunos de éstos condimentos no los tiene en el momento justo, el sabor del aprendizaje será diferente.

A no desesperarse, pues justamente, la tarea que debe emprender es la de **aprender a aprender**.

En el área de Matemática tendrá la ayuda para que use su pensamiento en forma crítica, pueda comprender, comparar, asociar, crear, etc. Pero eso sí, no se logrará sin su compromiso de colaboración, por ello debe acompañar este proceso de aprendizaje que se propone, a fin de que adquiera o refuerce algunos conceptos que son básicos y necesarios en su trabajo inicial.

0.1.4 Sugerencias para facilitar el aprendizaje

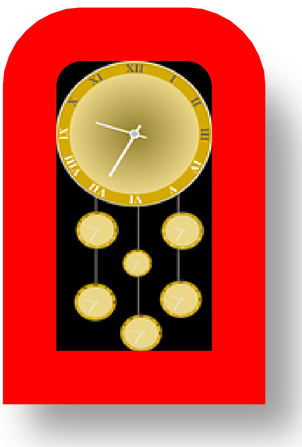
Para poder concretar un aprendizaje eficaz y significativo, debe tener en cuenta ciertos aspectos que hacen que el proceso de estudio se aproveche mejor o se maximice. Entre ellos: planifique los horarios de estudio, ambiente el espacio según la característica de su preferencia, en silencio, con música suave, en grupo, individual, etc.; tenga listo el material de estudio que necesita y concéntrese en la tarea que inicia.

Inicialmente tiene que reforzar los conceptos teóricos, es decir, que debe priorizar conocer el concepto que pretende estudiar y aplicar en la práctica. Para ello, realice lectura previa en los textos o materiales que al efecto brinden los docentes o estén disponibles en la biblioteca de la Facultad. Si puede y necesita, lea en voz alta, en ocasiones esto activa el sentido auditivo de aprendizaje.

En ese proceso de lectura, utilice las siguientes estrategias de aprendizaje: **subraye ideas principales** como así también aquellas **terminologías** cuyo significado desconoce (**busque en el diccionario**); **efectúe lectura comprensiva** del contenido, realizando la **apoyatura gráfica o simbólica**, si así lo considera, para una mejor comprensión de lo leído.

Resuma, **cree analogías**, **formúlese preguntas** y **describa** cómo se relaciona el concepto que lee con el conocimiento ya existente, establezca esas **relaciones** y **jerarquícelas.** Repita la lectura las veces que le sea necesario, según su **concentración y logro interpretativo**.

Busque ejemplos que clarifiquen los conceptos y que le permitan afianzarlos. Luego aplique lo comprendido en las prácticas ofrecidas al efecto. Recuerde que **el aprendizaje es personal**, los **tiempos de estudio** varían en las personas, por lo que debe empezar a conocer los suyos.



No importa cuánto le lleve comprender un concepto, dedíquele el tiempo necesario y se sentirá satisfecho cuando lo logre. Refuerce la teoría con la suficiente práctica. **Resuelva situaciones problemáticas** en las que deba aplicar lo que ya conoce. No es conveniente iniciar la actividad práctica sin efectuar antes la lectura y comprensión del concepto a usar.

Asista a las clases teóricas y prácticas y **plantee las dudas** que le surjan durante el desarrollo de algún tema. No hay peor pregunta que la que no se hace. Siga en forma sistemática el desarrollo de los temas de Matemática, recuerde que un tema nuevo siempre se relaciona con otro anterior que debe conocer, de lo contrario se irán formando lagunas entre temas y temas y de esta manera -en Matemática- no se puede avanzar en la apropiación de los conocimientos. Se recomienda **siempre rever los conceptos previos**, a los efectos de comprender los nuevos a desarrollar.

Cuando trabaje en la resolución de situaciones problemáticas o ejercicios, lea atentamente el enunciado para realizar una buena **interpretación de la consigna** que se pretende que responda. En muchas situaciones la no interpretación de la consigna, es una de las causas que impiden lograr los objetivos, tanto en la práctica cotidiana como en las evaluaciones parciales o finales. **Téngalo en cuenta**

Habilidades estratégicas

El dominio de habilidades y su aplicación estratégica complementan el proceso de comprensión y son parte importante del aprendizaje.

Las habilidades son capacidades que pueden expresarse en conductas desarrolladas a través de la práctica mediante el uso de procedimientos. Éstas se ponen en juego de forma consciente o inconsciente de manera automática.

Las estrategias conforman una sucesión de acciones que se utilizan siempre en formas conscientes e intencionales y dirigidas a un objetivo relacionado con el aprendizaje. Es el proceso por el cual el sujeto observa, piensa, reflexiona, elige y aplica los procedimientos para conseguir un fin.

0.1.5 Glosario[3] orientativo

Observar

Es examinar con atención un fenómeno o hecho para verificarlo empíricamente, resultado inmediato de la experiencia. Implica: **atender, fijar, percibir, advertir, notar, concentrar, supervisar, identificar, buscar, encontrar**, etc.

Analizar

Es destacar los elementos básicos de una unidad de información. Implica: **descomponer un todo en partes, caracterizar, distinguir, resaltar, explorar, relacionar**, etc.

Interpretar

Es atribuir significado personal a los datos contenidos en la información que se recibe. Implica: **razonar, argumentar, comprender, deducir, explicar, anticipar**, etc.

Ordenar

Es disponer de forma sistemática un conjunto de datos a partir de un atributo determinado. Implica: **agrupar, listar, seriar, enumerar, acondicionar,** etc.

Clasificar

Es agrupar en categorías definibles en base a sus características o atributos. Implica: **jerarquizar, compilar, esquematizar, organizar, encasillar, categorizar,** etc.

Representar

Es recrear de manera personal hechos, fenómenos, situaciones. Implica: **simular, modelar, dibujar, construir analogías, esquematizar,** etc.

Memorizar

Es codificar, almacenar y reproducir información. Implica: **archivar, evocar, recuperar, retener, recordar,** etc.

[3] Catálogo de palabras de una misma disciplina o de un campo de estudio, que aparecen definidas, explicadas o comentadas.

Evaluar

Es examinar un proceso o resultado en función de ciertos criterios explícitos o implícitos, valorando el grado de adecuación a los objetivos prefijados. Implica: **tasar, calcular, estimar, determinar, diagnosticar, juzgar,** etc.

Comparar

Es identificar semejanzas y diferencias entre dos o más elementos, considerando similitudes entre ellos. Implica: **reconocer, cotejar, comprobar, contrastar, juzgar**, etc.

Gestionar

Es formular interrogantes, debatir o generar situaciones problemáticas a partir de una situación planteada. Implica: **imaginar situaciones** no previstas en el modelo, **discutir procedimientos** o resultados.

Cuestionar

Es reunir en un enunciado más abarcativo un grupo de conceptos que tienen características comunes. Se basa en un procedimiento inductivo, pues induce o **infiere generalizaciones** a partir de la observación y el análisis de casos particulares.

Deducir

Es concluir, a partir de una premisa general, una afirmación particular coherente con ella o que es consecuencia de ella. Se utiliza para **realizar predicciones**, implica: **inferir, suponer, derivar, concluir, entender, argumentar,** etc.

Sintetizar

Es reducir la información disponible rescatando sus conceptos claves. Supone el **reconocimiento de lo fundamental** y su organización esquemática; implica **resumir, abreviar, simplificar, acortar**, etc.

Relacionar

Es encontrar correspondencias entre situaciones, conceptos o ideas. Implica: **vincular, conectar, unir, asociar,** etc.

Demostrar

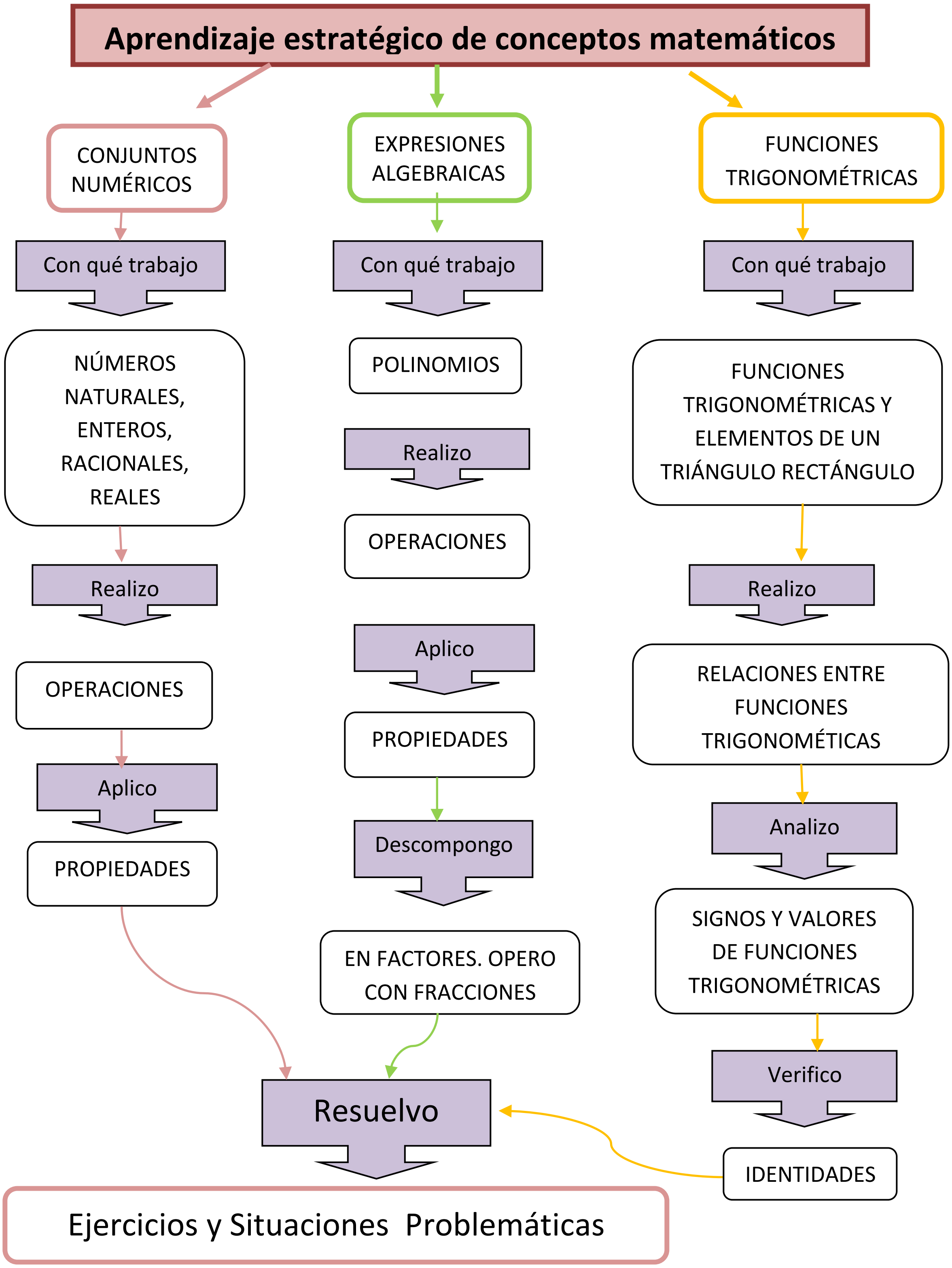
Es un razonamiento deductivo en el que se prueba que una afirmación es siempre verdadera. Implica: **manifestar, probar, argumentar, evidenciar, mostrar, comprobar, justificar,** etc.

Lo invito a conocerse y distraerse con humor, mirando el siguiente **video**:

[Inteligencia Emocional (Cerebro Dividido)]() (t 8:10)

0.2 El Módulo Taller AECMA

0.2.1 Esquema General



0.2.2 Características del Módulo.

a. OBJETIVOS

- **Objetivo General:**
  - Desarrollar sus capacidades cognoscitivas, haciendo uso de un pensamiento matemático estratégico.
- **Objetivos Específicos:**
  - Adquirir los conocimientos impartidos de los tópicos planteados, apropiándose de la lógica propia del pensamiento matemático.
  - Efectuar interpretación y discusión de resultados.
  - Generar habilidades en la traducción del lenguaje coloquial al simbólico.
  - Aplicar estrategias de aprendizaje.

b. CONTENIDOS MÍNIMOS

Conjuntos Numéricos. Operaciones. Propiedades. Expresiones Algebraicas. Polinomios. Operaciones. Propiedades. Factoreo. Fracciones algebraicas. Operaciones combinadas. Funciones trigonométricas de un ángulo. Características. Relaciones entre funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas de ángulos notables. Funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos. Identidades trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos. Aplicaciones prácticas. Resolución de situaciones problemáticas.

c. DOCENTES

Los docentes que lo acompañarán en su experiencia educativa en este Taller son:

Función	Nombre	Correo Electrónico
Coordinadora del Área y de la Especialidad	Especialista Lic. Graciela Inés CARRANZA	gicarranza@yahoo.com.ar
Docente	Ing. Adriana Mabel LEZANA	mabelezana@yahoo.com.ar
Docente	Ing. Raúl Eduardo LEIVA	raulleiva05@yahoo.com.ar
Docente	Prof. Martha Noemí SECO	marthanseco@yahoo.com.ar

d. METODOLOGÍA

El documento de trabajo se basa en los lineamientos del aprendizaje significativo. Allí dispone de pautas estratégicas que lo posicionan como estudiante universitario, indica los aportes que debe realizar para cumplir con ese rol y marca el camino a seguir para lograr aprender mediante una construcción de significados. El texto lo alienta a ser el protagonista principal, sugiriendo acciones y actitudes que irán guiando el proceso de estudio. Resalta la importancia de la flexibilización de los tiempos dedicados a las tareas, según la capacidad, interés, actitud y respuesta personal.

La lectura y comprensión de las definiciones y propiedades resaltadas y el aprovechamiento de los conocimientos previos, le posibilitará responder cuestionarios que se incorporan en diferentes tramos del texto, pudiendo llevar, de esta forma, un control de lo aprendido.

Se incorporan videos, unos contienen desarrollos prácticos de algunos temas, otros son motivadores, incursionando en algún tramo de la historia de la matemática y no faltan aquellos que con un poco de humor generan espacios de distención y risas.

La estructura que presenta el documento, alienta el trabajo protagónico personal y autónomo, ya sea individual o grupal, a los efectos de detectar posibles dificultades. Así también, se señalan algunas soluciones para superarlas.

Los ejemplos y ejercicios resueltos, permiten apreciar la aplicación de conceptos estudiados en diferentes situaciones prácticas. La ejercitación propuesta lo lleva, paso a paso, de lo más simple a lo más complejo, posibilitando un aprendizaje comprensivo. El material tiene instancias interactivas en las que debe reflexionar y resolver situaciones problemáticas reales de la vida cotidiana, usando un pensamiento lógico y crítico.

A los efectos de un control de su aprendizaje, se proponen actividades auto evaluativas, que una vez concluidas y cotejadas con las guías de respuestas, lo incluyen en algún nivel de rendimiento, brindándole las pautas a seguir para mejorar su resultado, si esto fuera necesario.

La revisión de los contenidos que se incorporan en el documento, se revaloriza en el hecho que más allá de que los conceptos sean aprendidos, se busca que éstos sean internalizados y puedan ser aplicados al momento de la acción.

CAPÍTULO I:

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Autores:

- ✓ Especialista Lic. Graciela Inés CARRANZA
- ✓ Ing. Adriana Mabel LEZANA
- ✓ Ing. Raúl Eduardo LEIVA
- ✓ Prof. Martha Noemí SECO
- ✓ C.P.N. Rosa Margarita RODRÍGUEZ

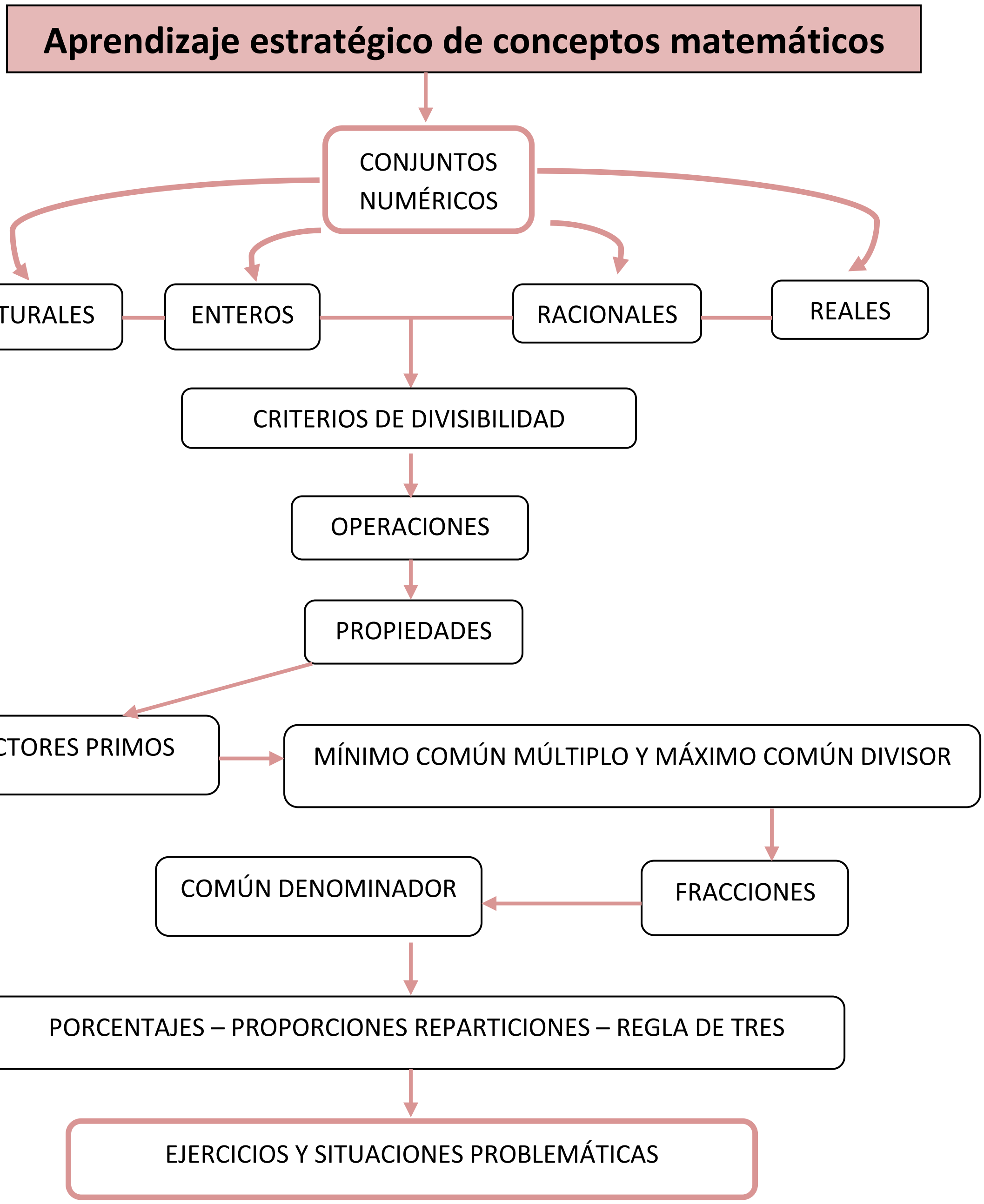
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

CAPÍTULO I: CONJUNTOS NUMÉRICOS

PRIMERA PARTE

CONJUNTOS DE NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

ESQUEMA CONCEPTUAL



OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Se pretende que el estudiante logre:

- ✓ Adquirir los conocimientos impartidos de los tópicos planteados, apropiándose de la lógica propia del pensamiento matemático.
- ✓ Aplicar buenas estrategias en su proceso de aprendizaje.
- ✓ Ejercitar actividades que tiendan a desarrollar la interpretación y la resolución de situaciones problemáticas.
- ✓ Interpretar consignas.
- ✓ Resolver operaciones combinadas con N y Z, aplicando las propiedades correspondientes.

CONTENIDOS

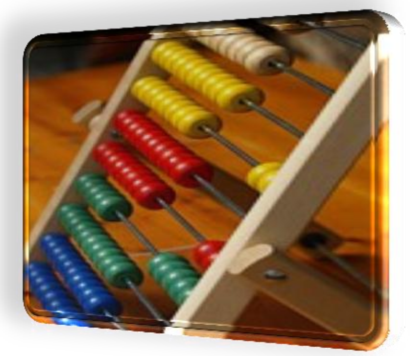
- ✓ Conjunto de números Naturales (N)
- ✓ Operaciones – Propiedades
- ✓ Divisibilidad. Criterios
- ✓ Números primos y compuestos
- ✓ Descomposición de un número en sus factores primos
- ✓ Máximo común divisor – Mínimo común múltiplo
- ✓ Resolución de ejercicios y situaciones problemáticas
- ✓ Conjunto de números Enteros (Z)
- ✓ Operaciones – Propiedades
- ✓ Resolución práctica de situaciones específicas

Una mente que se abre a una nueva idea jamás volverá a su tamaño original.

Albert Einstein

I.1 Breve historia de los números

Cuando se habla de números, pareciera que existieron desde siempre. Sin embargo, las poblaciones más antiguas tuvieron que establecer reglas y símbolos que les permitieran contar objetos y controlar sus pertenencias. El hombre debió idear sistemas de numeración que les facilitaran desarrollar actividades con sus vecinos. De los numerosos sistemas que crearon los diferentes pueblos, sólo algunos resultaron viables y eficientes a la hora de aplicarlos, ello dependió de las culturas con las que se manejaron y que les permitió avanzar en el estudio de esos sistemas. De las grandes civilizaciones occidentales, en Babilonia y Grecia se observó notable predisposición a la creatividad matemática. Estas ideas de números que manejaban los occidentales se fueron enriqueciendo con el paso de los años.



Hacia el año 2000 a.C., los egipcios comienzan a trabajar con algunas fracciones sencillas, que junto con la organización administrativa de los babilónicos, permitieron a los griegos llevar los estudios realizados a la categoría de Ciencia. Es así que en el siglo V a.C. los griegos de la escuela Pitagórica descubrieron que existía otro tipo de número, fuera del natural y el fraccionario, llamado número irracional (denominación que señalaba el caos que vivieron los griegos al descubrir estos números).

En el siglo XVI se dio lugar a la consideración de los números negativos, lo que posibilitó dar soluciones a ecuaciones algebraicas. Recién en el siglo XVII esta noción de número negativo tomó fuerza al usarse en el sentido espacial en Geometría. Sin embargo en oriente los chinos manejaban esta idea de los números negativos, muchos siglos antes, hacia el siglo IV a.C. ya trabajaban simbólicamente con bolas rojas (positivos) y con bolas negras (negativos) en sus operaciones.

En la actualidad se tiene la ventaja de contar con un sistema de numeración, llamado sistema de numeración decimal pues utiliza 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) y es el que permite operar en un sin fin de transacciones que se presentan en la vida cotidiana. El único esfuerzo que implica es estudiarlo y aplicarlo en forma correcta.

Si le interesa un poco de historia matemática, vea el **video**:

La historia del número 1 (t 57:55)

I.2 Conjuntos Numéricos

Usando la simbología provista desde el sistema decimal de números, se realizará un repaso de los distintos conjuntos numéricos estudiados en su formación anterior, sus operaciones y propiedades correspondientes.

El esquema que a continuación se presenta, resume la integración de los conjuntos numéricos que se analizarán, dando una idea de la formación de los conjuntos numéricos:

I.3 Números Naturales

La sucesión[4] de infinitos números **1; 2; 3; 4; 5; 6;...** conforma lo que se denomina conjunto de los números **Naturales** (símbolo **N**). En ella, después de cualquier número hay un número que le es sucesivo[5] inmediato mayor que él en una unidad.

Si a la sucesión dada de los naturales se le antepone el número **cero 0**, se tiene el conjunto de números Naturales incluido el cero.

[4] Sucesión: Conjunto ordenado de números según una cierta ley. Dichos números son los términos de la sucesión.
[5] Sucesivo: Que sucede o sigue a algo.

I.3.1 Operaciones

I.3.1.1 Propiedades

En este conjunto se definen operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

Las operaciones mencionadas satisfacen leyes formales denominadas propiedades, en ellas ***a, b, c, m y n*** representan cualesquier número natural:

$$\forall a \in N, \forall b \in N : c \in N \ ; \quad \textbf{el símblo } \forall \textbf{ se lee para todo}$$

a) Propiedad uniforme[6]

$a + b = c$ (a, b, c términos)

$a \, . \, b = c$ (a, b factores, c producto)

$a : b = c$ (a dividendo; b divisor; c cociente)

$a^n = b$ (a base; n exponente; b potencia)

b) Propiedad asociativa

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a \, . \, (b \, . \, c) = (a \, . \, b) \, . \, c$

c) Propiedad conmutativa

$a + b = b + a$

$a \, . \, b = b \, . \, a$

d) Propiedad distributiva

$(a \pm b) \, . \, m = a \, . \, m \pm b \, . \, m$

$(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$

$(a : b)^n = a^n : b^n$

[6] Cualquiera de estas operaciones goza de la propiedad uniforme, significando que el resultado al operar los números es único. La operación de radicación es multiforme.

e) Propiedad de las potencias

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$, si $m = n \Rightarrow a^m : a^m = a^0 = 1$

$[a^m]^n = a^{m \cdot n}$

f) Propiedad de las raíces

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n.m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, $n\ y\ m\ naturales > 1$

- El **cero** es elemento neutro en la suma.
- El **uno** es el elemento neutro en la multiplicación.

En el conjunto de números naturales hay ciertas restricciones para operar, lea atentamente lo expresado en el siguiente esquema:

Para resolver una **resta** de números naturales $a - b$ se debe ver que se cumpla la condición de que el minuendo *a*, sea mayor o igual que el sustraendo *b*

En la **división** $a : b$ se debe cumplir la condición de que el dividendo *a*, sea múltiplo del divisor *b*, y que el divisor debe ser diferente de cero, ya que no se encuentra número alguno que multiplicado por cero de el número *a*. No se acepta la división por cero.

Un número *a* es múltiplo de otro *b*, si es posible encontrar un número *c* que multiplicado por *b* nos dé *a*.

Ej. 18 es múltiplo de 3 pues 6 . 3 = 18

En la **radicación**, el radicando debe ser potencia enésima de un número natural.

Ahora pensemos en la siguiente reflexión:

Voy por la vida

haciendo matemática:

- ***Sumo alegrías***
- ***Resto dolores***
- ***Divido las penas***
- ***Multiplico el amor***
- ***Elevo la esperanza***
- ***Saco de raíz mis problemas***

I.3.1.2 Suma Algebraica

Se llama **suma algebraica** a una sucesión de sumas y restas**.**

Todo paréntesis, corchete o llave, precedido por el signo **más (+)**, puede suprimirse, quedando los términos que encierra con sus respectivos signos.

Todo paréntesis, corchete o llave, precedido por el signo **menos (-)**, puede suprimirse, escribiendo los términos que encierra con signos contrarios a los que tenían.

Ejemplo:
$$\{12 - [7 - 9 - 2] + (4 + 8 - 1)\} =$$
$$\{12 - [7 - 9 - 2] + 4 + 8 - 1\} =$$
$$\{12 - 7 + 9 + 2 + 4 + 8 - 1\} =$$
$$12 - 7 + 9 + 2 + 4 + 8 - 1 =$$
$$(12 + 9 + 2 + 4 + 8) - (7 + 1) =$$
$$35 - 8 =$$
$$27$$

I.3.1.3 Multiplicación

Se llama **producto** de un número natural *a* por otro número *n*, siendo *n* > 1, al número natural *b* que se obtiene sumando *n* veces el número *a*.

Simbólicamente se escribe: $a.\ n = b$ si $b = \overbrace{a + a + a + \ldots + a}^{\text{n veces}}$

Ejemplo: 5 . 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20

- El producto de un número natural por la unidad es igual al mismo número.
- El producto de un número natural por cero es igual a cero.
- El producto de un número por 2, se denomina duplo del número.
- El producto de un número por 3, se denomina triplo del número.
- El producto de un número por 4, se denomina cuádruplo del número.
- Cada uno de los números que se multiplican se denomina factor.
- En una multiplicación es condición necesaria y suficiente[7] que alguno de los factores sea cero, para que la misma se anule.

I.3.1.4 División

✓ **Cociente exacto**

Cuando se divide un número por otro y el **resto de la división es cero**, la división se dice **exacta**.

[7] Condición necesaria significa que si el producto es cero, alguno de los factores debe ser nulo.
Condición suficiente significa que si alguno de los factores es cero, el producto se anula.

Ejemplo: Sean los números 28 y 4, si se efectúa la división en ese orden, se escribe:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array}$$

Se obtiene un cociente 7 y un resto cero (**división exacta**), por lo que se dice que 28 es un **múltiplo** de 4 y se escribe **28 = 4 . 7**

✓ **Cociente entero**

Se denomina **cociente entero** de un número (dividendo) por otro número (divisor), al mayor número que multiplicado por el divisor da un producto menor o igual al dividendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 429 & 5 \\ \cline{2-2} 2\,9 & 85 \\ 4 & \end{array}$$

entonces se escribe 429 = 85 . 5 + 4

En forma general y simbólica la división se expresa:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \quad ; \quad D = d . q + r$$

Aplicación

1. ¿Qué entiende cuando se dice que el cero es elemento neutro para la suma? Escriba dos ejemplos que muestren esa situación.
2. Sabiendo que x es un número natural, escriba a la par, todos los valores que puede tomar en cada uno de los siguientes casos:

   $0 \leq x \leq 5 \rightarrow$ ———————; $2 < x \leq 7 \rightarrow$ ———————

   $0 < x < 2 \rightarrow$ ———————; $4 \leq x \leq 9 \rightarrow$ ———————

   $x > 0 \wedge x \leq 10 \rightarrow$ ———————; $x \leq 6 \rightarrow$ —————
3. Resolver las siguientes operaciones combinadas:

   a) $18 - \{2 - [7 + (6 - 1) - (3 + 9 - 5)] - 4\} + 10 =$

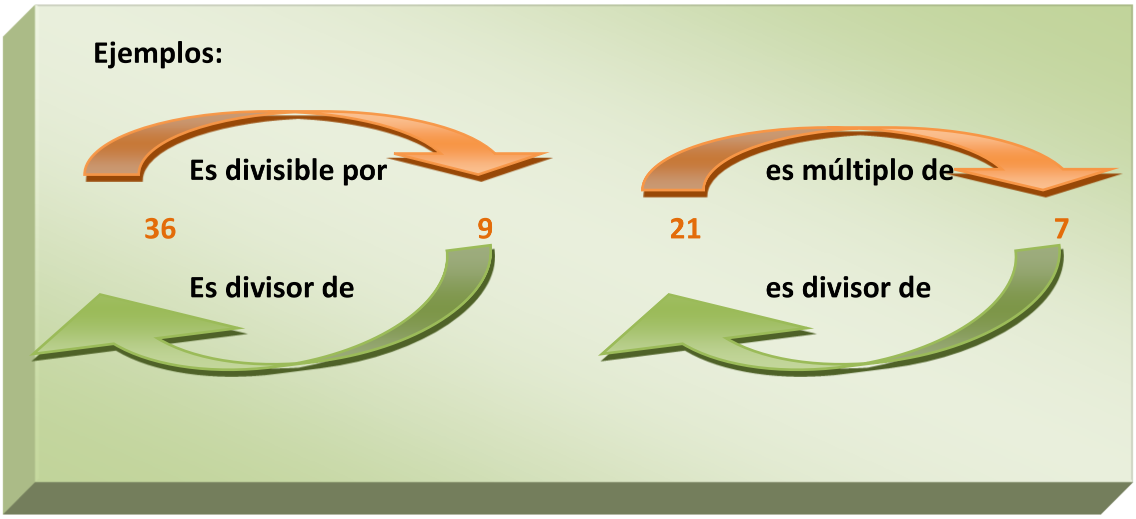
   b) $(4 - x + 8).3 - [1 - (9 + 3x - 2) - y] + 3 - (2 + y + 1) =$

   c) $(45 - 18 + 36):9 + (15 - 3).5 =$

- ✓ **Divisibilidad**

Un número se dice que es **divisible** por otro si al ser dividido por éste da un cociente exacto.

Cuando se efectúa la división entre dos números y el resto resulta cero, se expresa también que el primer número es **múltiplo** del otro valor.



- Todo número es divisible por sí mismo.
- El número 1 es divisor de todos los números.
- Todo número distinto de cero tiene un número limitado de divisores

I.3.1.5 Potenciación

La potencia enésima de un número natural *a* (a^n), siendo ***n*** un número natural mayor que uno, es el producto de ***n*** factores iguales a ***a***.

La operación se llama potenciación, el número ***a*** se denomina base de la potencia y en número ***n*** es el exponente de la potencia. Simbólicamente se expresa como:

$$a^n = \overbrace{a.a.a \dots .a}^{\text{n veces}}$$

Ejemplos: $5^2 = 5.5 = 25$; $3^4 = 3.3.3.3 = 81$

- La potencia primera de un número es igual a ese número
- La potencia cero de un número diferente de cero es 1.

✓ **Propiedades de la potenciación**

- La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación
- La potenciación es distributiva con respecto a la división.

Ejemplos: $(4.3.6)^2 = 4^2.3^2.6^2 = 5184$

$(5.2.3)^3 = 5^3.2^3.3^3 = 27000$

$(6:3)^2 = 6^2:3^2 = 36:9 = 9$

- El producto de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes dados. Simbólicamente: $a^n.a^m = a^{n+m}$
- El cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes dados. En símbolos: $a^n:a^m = a^{n-m}$

Ejemplos: $3^2.3^4 = 3^6 = 729$, $2^5:2^3 = 2^2 = 4$

- Potencia de otra potencia es igual a otra potencia cuyos exponentes se multiplican. En símbolos: $[(a)^n]^m = a^{n.m}$

Ejemplo: $[(2)^2]^3 = 2^6 = 64$

- El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo término. En símbolos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$

I.3.1.6 Radicación

Dados dos números naturales ***a*** y ***n***, siendo ***n*** ≥ 1 y ***a*** una potencia enésima, se llama raíz enésima del número natural ***a*** al número ***x*** tal que elevado a la potencia enésima dé por resultado ***a***.

Simbólicamente se indica: $\sqrt[n]{a} = x \quad \Longrightarrow \quad x^n = a$

La operación se llama radicación, el signo $\sqrt{\ }$ se denomina radical, el número *a* se llama radicando y el número ***n*** índice de la raíz.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{729} = 9 \quad \Longrightarrow \quad 9^3 = 729$$
$$\sqrt[4]{625} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 5^4 = 625$$
$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2^5 = 32$$
$$\sqrt{49} = 7 \quad \Longrightarrow \quad 7^2 = 49$$

- Si a la raíz enésima de un número se la eleva a la potencia enésima, se obtiene el primer número: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- Si a la potencia enésima de un número se le extrae la raíz enésima, se obtiene el mismo número: $\sqrt[n]{a^n} = a$
- La raíz enésima de la unidad es igual a la unidad: $\sqrt[n]{1} = 1$

Ejemplos: $\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4 \quad ; \quad \sqrt[4]{5^4} = 5 \quad ; \quad \sqrt[5]{1} = 1$

✓ **Propiedades de la radicación**

- La raíz enésima del producto de varios factores es igual al producto de la raíz enésima de cada factor: $\sqrt[n]{a.b.c} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}\,.\sqrt[n]{c}$
- La raíz enésima del cociente entre dos números es igual al cociente de la raíz enésima de cada número: $\sqrt[n]{a:b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- La raíz enésima de la raíz emésima de un número es igual a la raíz de índice ***m.n*** del número dado: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

I.3.2 Criterios de Divisibilidad

Le ayudará recordar los criterios de divisibilidad que a continuación se definen:

Dos

Un número se dice que es divisible por dos si **el mismo termina en 0, 2, 4, 6 u 8.**

Tres

Un número es divisible por tres sí y sólo si **la suma de sus cifras es un múltiplo de tres.**

Cuatro

Un número es divisible por cuatro sí y sólo si **sus dos últimas cifras forman un número que es múltiplo de cuatro.**

Cinco

Un número es divisible por cinco si **su última cifra es cero o cinco.**

Seis

Un número es divisible por seis sí y sólo si **lo es de dos y de tres.**

Nueve

Un número es divisible por nueve si **la suma de sus cifras es un múltiplo de nueve.**

Diez

Un número es divisible por 10, 100, 1000 sí y sólo si **termina en un cero, dos ceros o tres ceros.**

Once

Un número es divisible por once sí y sólo si **la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y la suma de las cifras que ocupan un lugar impar da un número que es múltiplo de 11.**

I.3.3 Números primos y compuestos

NÚMERO PRIMO

Se dice que un número natural es **primo**, si sólo es divisible por él mismo y por la unidad.

- El número primo sólo admite como divisores a él mismo y a la unidad.
- El número uno (1) sólo admite un divisor.

Ejemplos de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc.

NÚMERO COMPUESTO

Un número natural distinto de cero se dice **compuesto** cuando no es primo, es decir que admite otros divisores además de él mismo y la unidad.

Ejemplos de números compuestos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, etc.

- Se dice que el número cero no es ni primo ni compuesto, porque no tiene un número finito de divisores.
- El número uno se dice que no es ni primo ni compuesto por que no tiene dos divisores distintos.
- Todo número compuesto se puede expresar como producto de números primos (Teorema Fundamental de la Aritmética).
- El proceso que consiste en escribir un número como producto de números primos o de sus potencias se llama factorización.

✓ **Descomposición de un número compuesto en sus factores primos**

Para expresar un número compuesto como el producto de sus factores primos, se debe dividir el número dado en el menor primo por el que sea divisible, luego el cociente obtenido se divide por el número primo anterior o el primo que le siga inmediatamente y por el cual sea divisible, se repite esta operación con los sucesivos cocientes que se obtengan hasta obtener la unidad.

Este proceso de expresar un número como producto de sus factores primos se denomina factorizar.

Ejemplo: factorizar en sus factores primos los números 240 y 138

240	**2**
120	**2**
60	**2**
30	**2**
15	**3**
5	**5**
1	

240 = $2^4 . 3 . 5$

138	**2**
69	**3**
23	**23**
1	

138 = 2 . 3 . 23

Aplicación

1. Si al número A se le resta 67 unidades, y a esa diferencia se la divide en 13, el cociente de la división es cero. ¿Puede decir cuánto vale A?
2. Piense un número de tres cifras y divídelo en 8, indique si la división es exacta o no y por qué.
3. Analice y escriba los primeros quince números primos.
4. Descomponga, cada uno de los números compuestos, que se dan a continuación, en el producto de sus factores primos: 240, 345, 1250, 765

I.3.4 Máximo Común Divisor

Para poder determinar de dos números dados, cuál es el **mayor de sus divisores comunes (*mcd*)** se procede a descomponer los números dados en sus factores primos. Luego de obtenidos los factores primos correspondientes, se lo obtiene de la siguiente forma:

***Mcd* (máximo común divisor)** es el producto de los factores primos comunes, tomados con su menor exponente.

Ejemplo: Determine el *mcd* de los números 270 y 45

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

45	3
15	3
5	5
1	

$45 = 3^2 . 5$

$270 = 2.3^3 .5$

Luego el *mcd* **(270 y 45)** $= 3^2 . 5 =$ **45**

I.3.5 Mínimo Común Múltiplo

Para determinar el **mínimo común múltiplo (*mcm*)** de dos números se efectúa la descomposición de los números en sus **factores primos**. Luego se procede de la siguiente forma para determinarlo:

***Mcm* (mínimo común múltiplo)** es el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Determine el *mcm* de 120 y 315

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$120 = 2^3 . 3 . 5$

$315 = 3^2 . 5 . 7.$

Luego *mcm* **(120; 315) =** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ = **2520**

Puede clarificar el proceso de obtención del MCM y MCD mirando el siguiente **video**:

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo (t 10:17)

Aplicación

1. Determine el máximo común divisor de los siguientes números: 540, 2520 y 210.
2. Con un procedimiento similar al propuesto anteriormente, determine el mínimo común múltiplo de: 504, 720 y 2970.
3. En el vivero El Álamo, han recibido 1830 plantines de margaritas y 1170 plantines de helechos y deben acomodarlos en el menor número de canteros que contengan el mismo número de plantines de ambas especies. Determine la cantidad de plantines que debe contener cada cantero.
4. Don Julio recibe en su negocio, cada 20 días, al distribuidor de gaseosas, cada 15 días el distribuidor de lácteos y fiambres y cada 24 días al distribuidor de cigarrillos. Si en el día de hoy se encuentran los tres distribuidores, ¿cuántos días pasarán para que se encuentren nuevamente en este almacén?

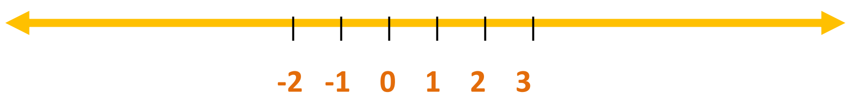
I.4 Números Enteros

La sucesión infinita de números negativos **-1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; ...** permite dar solución a las restas de números ***a - b*** cuando ***a*** es menor que ***b***. Estos números están compuestos de una cantidad y de un signo menos, esto último es lo que los diferencia de los números positivos o naturales.

Por ello, con frecuencia va a expresar que **-5** y **5** tienen el mismo valor absoluto[8] y distinto signo, en referencia a que representan la misma cantidad pero con signos contrarios. En situación más concreta se diría que en un caso ***debo*** cinco pesos (**$-5**) y en el otro que ***tengo*** cinco pesos (**$5**).

Si se reúnen la sucesión de números naturales y la sucesión de números negativos, se forma el conjunto de números **Enteros** (símbolo Z). Aunque el **0** puede ser considerado como un número natural, por lo general se lo define como un número entero que no es positivo ni negativo. No hay un número entero que sea el primero ni un número entero que sea el último.

Estos números se pueden representar en una recta, en donde a cada uno de los números se le hace corresponder un punto de esa recta, por ello la recta se denomina numérica. Se procede como sigue: se traza una recta horizontal y en ella se marca un punto al que se le hace corresponder el número cero, y a partir de él hacia la derecha y tomando unidades iguales se distribuyen los números naturales (números positivos), y hacia la izquierda del cero se procede similarmente dando ubicación a los números negativos:



Se observa que estos números enteros no cubren todos los puntos de la recta, quedan espacios entre dos números enteros en donde no se encuentra otro entero, esos espacios representan segmentos que son conjuntos de infinitos puntos (se verá más adelante su correspondencia).

Cuanto más a la derecha se recorre la recta, se encuentran números cada vez más grandes, mientras que si se hace el recorrido hacia la izquierda los números son cada vez más chicos.

[8] Valor absoluto: es el valor que representa la cantidad independiente de su signo. Ver concepto y propiedades más adelante.

De dos números enteros es mayor el que está a la derecha en la recta numérica. El cero es mayor que cualquiera de los números negativos, y menor que cualquier número positivo.

I.4.1 Operaciones

Con los números enteros se opera en forma similar a lo visto para números naturales.

I.4.1.1 Suma y Resta

Restar un número entero es equivalente a sumar su opuesto:

$$a - (-b) = a + b$$

Si los números que se suman tienen igual signo, al resultado se le coloca este signo y se suman sus valores absolutos[9]:

$$-a + (-b) = -(a + b)$$

Si los signos fueran diferentes se coloca el signo del mayor (el de mayor valor absoluto) y se restan los números:

$$-a + b = -(a - b)$$ **siendo** $a > b$.

I.4.1.2 Multiplicación y División

Para hallar el producto (o cociente) de dos números enteros, se multiplican (o dividen) sus valores absolutos. El resultado es un número:

- ***Positivo***, *si los dos números tienen igual signo.*
- ***Negativo***, *si tienen diferente signo.*

[9] En estos casos y en situaciones similares se sobreentenderá que al comparar dos números negativos se lo hace considerando sus valores absolutos, y en los casos de sumas o restas, la referencia que se efectúa es también con sus valores absolutos.

Ejemplos:

$$21 \cdot (-2) = -42$$
$$(-5) \cdot (-4) = 20$$
$$(-15) : 3 = -5$$
$$(-8) : (-2) = 4$$

La suma, la resta y la multiplicación de números enteros, siempre tienen solución en **Z**, es decir son operaciones cerradas en **Z**. Con la división no ocurre lo mismo, esto se observa cuando el dividendo no es múltiplo del divisor (ej. 7 : 2).

I.4.1.3 Potenciación y Radicación

- Toda potencia de exponente par tiene resultado positivo.
- En toda potencia de exponente impar el resultado lleva el signo de la base.
- Si de la radicación de números enteros se trata, debemos tener en cuenta el signo del radicando:
- Si el radicando es un número **positivo**, el resultado será el número entero que verifique la operación.

Ejemplo:

$$\sqrt{9} = 3 \; porque \; 3^2 = 9 \quad \wedge \quad \sqrt{9} = -3 \; porque \; (-3)^2 = 9$$
$$\sqrt[3]{8} = 2 \; porque \; 2^3 = 8$$

- Si el radicando es **negativo**, debemos analizar la posibilidad o imposibilidad de hallar el resultado. Recordar las propiedades de la potenciación enunciadas antes, en relación al exponente.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \; porque \; (-2)^3 = -8$$

$\sqrt{-4} \wedge \sqrt[4]{-16}$ *Son **raíces de índice par y radicando negativo**, **no tienen solución**, ya que ningún número entero elevado a un exponente par da por resultado un número negativo.*

✓ **Algunas propiedades de los números enteros**

- **Z** es un conjunto infinito.
- Cada número tiene un ***único antecesor*** y un ***único sucesor***.
- Entre ***dos números enteros, no consecutivos,*** existe un conjunto finito de números enteros. **Z** es un conjunto discreto.

Responda

1. ¿Qué número precede a -2 en 8 unidades? ¿Cuál le sigue en 5 unidades?
2. Exprese con palabras las propiedades que corresponden a la potenciación de números enteros.
3. Ilustre, con ejemplos, las propiedades de la potenciación, utilizando los números enteros.
4. Ídem a lo anterior para la radicación.
5. Resuelva los siguientes cálculos, para ello deberá prestar atención a los signos de cada uno:
   - **a)** $75 : 5 . 3 =$
   - **b)** $42 . 2 : 12 – 5 =$
   - **c)** $10 – 10 : 2 + 3 . 9 =$
   - **d)** $8 : 8 + 5 . 3 – 7 =$

Aplicación

1. La escalera de una casa tiene 125 escalones y una altura total de 25 metros. ¿Cuál será, en centímetros, la altura de cada peldaño?
2. ¿Qué peso lleva un camión que transporta 95 sacos de trigo de 68 kg. cada uno y 67 sacos de cebada de 54 kg. cada uno?
3. ¿Cuánto costarán 15 rollos de membrana, si por 19 rollos se pagaron U$S 893 (dólares)?
4. Un esquiador novato quería subir hasta el lugar de largada de la pista de esquí, de una longitud de 1500 metros, sin usar el Funicular. Inició su recorrido, desde el final de la pista, avanzando 215m, luego descendió 68m, insistió y subió 310m, pero la falta de experiencia lo llevó a bajar 52m, su tenacidad lo ayudó a subir 193m más, pero ya cansado decidió volver para tomar el transporte hacia la cima. ¿Cuál fue el recorrido máximo de la pista que pudo efectuar? ¿A qué distancia mínima del lugar de largada llegó?

Trabajo Práctico 1

Realice el Trabajo Práctico 1

Clic aquí

CAPÍTULO I: CONJUNTOS NUMÉRICOS

SEGUNDA PARTE

CONJUNTOS DE NÚMEROS RACIONALES Y REALES

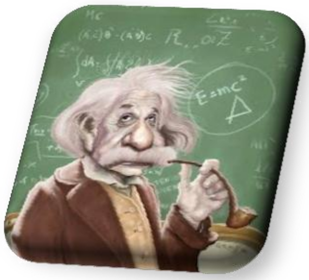
OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Durante el proceso formativo, se espera que el alumno pueda:

- ✓ Distinguir y emplear los números racionales y reales, comprendiendo las propiedades que los definen y sus diferentes formas de representación.
- ✓ Adquirir confianza y autonomía en la resolución de problemas.
- ✓ Desarrollar estrategias de resolución de situaciones problemáticas, identificando las más efectivas, previo análisis comparativo de las mismas
- ✓ Operar correctamente con números racionales y reales.

CONTENIDOS

- ✓ Números Racionales
- ✓ Formas de presentación. Clasificación
- ✓ Operaciones con números racionales
- ✓ Suma y Resta
- ✓ Simplificación de una fracción
- ✓ Multiplicación
- ✓ División
- ✓ Potenciación
- ✓ Radicación
- ✓ Números Decimales
- ✓ Temas adicionales de revisión
- ✓ Razón
- ✓ Proporcionalidad
- ✓ Regla de tres simple directa
- ✓ Porcentaje
- ✓ Repartición proporcional
- ✓ Números irracionales
- ✓ Números Reales
- ✓ Propiedades de importancia para la relación de orden
- ✓ Valor absoluto de un número real
- ✓ Propiedades de valor absoluto
- ✓ Orden de las operaciones



Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber.

Albert Einstein

I.5 Números Racionales

Se llama **número racional** a todo aquel que puede ser expresado como el cociente entre dos números enteros.

$2 = \frac{8}{4}$ $0,5 = \frac{1}{2}$ $-5 = -\frac{15}{3}$ $0 = \frac{0}{9}$

Una fracción es el cociente entre dos números enteros ***a*** y ***b***, llamados numerador y denominador, respectivamente. La fracción dada se escribe como $\frac{a}{b}$, donde el denominador indica la cantidad de partes iguales en las que se divide el entero, y el numerador cuántas de esas partes debemos considerar. El conjunto numérico que resulta de reunir los números enteros con los números fraccionarios recibe el nombre de **Racional** (símbolo **Q**).

Los números racionales pueden expresarse mediante una fracción o una expresión decimal. En este conjunto si se suman, restan, multiplican o dividen números racionales, se obtiene otro número racional, excepto cuando se divide por cero (operación no válida). Estas son operaciones cerradas en **Q**. Los números fraccionarios surgen de la necesidad de expresar partes o porciones de la unidad, por lo tanto en la recta numérica se posicionan entre dos números enteros consecutivos.

I.5.1 Formas de presentación. Clasificación

Un número racional, por lo tanto, puede ser positivo o negativo y además puede escribirse como fracción o como número decimal. En el cuadro siguiente se ven varios ejemplos:

Número racional	**Forma fraccionaria**	**Forma decimal**[10]
-1/3	-2/6; -3/9; -5/15; etc.	-0,3333...; $-0,\widehat{3}$
7,2	72/10; 720/100; 36/5; etc.	7,2;7,20; 7,200; 7,2000; etc.
-0,48	-48/100; -480/1000; etc.	-0,48;-0,480; -0,4800; etc.
-5	-5/1; -10/2; -30/6; etc.	-5,00, -5,0; -5,000; etc.
2,5555...	23/9; 46/18; 92/36; etc.	2,555...; $2,\widehat{5}$

Existen diferentes tipos de fracciones, según como se conformen se clasifican como:

- ✓ Fracción unidad
- ✓ Fracción propia
- ✓ Fracción impropia
- ✓ Fracción aparente
- ✓ Fracción decimal
- ✓ Fracciones equivalentes
- ✓ Fracción irreducible
- ✓ Fracciones inversas

Fracción Unitaria: se denomina así a la fracción cuyo numerador es igual a su denominador (ej. **15/15**). Dicha razón representa la unidad.

Fracción Propia: una fracción se denomina propia cuando el numerador es menor que el denominador (ej. **3/8**). En este caso la fracción es un número menor que la unidad, se representa en la recta numérica entre el cero y el uno si la misma es positiva y entre menos uno y cero si la fracción es negativa.

Fracción Impropia: una fracción se dice impropia cuando el numerador es mayor que el denominador (ej.**8/3**). Esta fracción representa una cantidad mayor que la unidad, se ubica en la recta numérica a la derecha del uno y se aleja de él según las veces que el numerador contenga al denominador.

- ➢ **Número mixto:** es la fracción impropia que se representa por un número entero y una fracción propia. Por ejemplo la fracción impropia:

[10]Más adelante se trabaja con los números decimales.

$$\frac{17}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=1+1+1+1+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}$$

Otra forma de expresar una **fracción impropia** como **número mixto** es efectuar la división entre el numerador y el denominador, el cociente así obtenido representa el número entero del número mixto y el resto es el numerador de la fracción propia cuyo denominador es el denominador inicial. Así para el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{l|l} 17 & 4 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

Resto Cociente $\Rightarrow$ $\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$

Si se tiene un **número mixto** y se quiere pasar a **fracción impropia** se multiplica el número entero por el denominador de la fracción propia y al resultado se le suma el numerador de dicha fracción, así se obtiene el numerador de la fracción impropia buscada, tendiendo como denominador al denominador de la fracción propia. Ejemplo:

$$3\frac{4}{5}=\frac{5\,.\,3+4}{5}=\frac{19}{5}$$

Fracción Aparente: cuando el numerador es múltiplo del denominador (ej. **12/4 = 3**). En este caso representa a un número entero.

Fracción decimal: es la fracción que tiene como denominador a la unidad seguida de ceros. Ejemplos:

$$\frac{6}{10}\quad\frac{9}{100}\quad\frac{31}{100}\quad\frac{215}{1000}$$

Las fracciones decimales se pueden expresar como número decimal, escribiendo el numerador colocándole una coma, contando desde la unidad hacia la izquierda, tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador, agregando ceros si fuera necesario. Ejemplos

$\frac{6}{10}=0,\underline{6}$ **un cero, una cifra decimal**;

$\frac{9}{100}=0,\underline{09}$ **dos ceros, dos cifras decimales;**

$$\frac{82}{10} = 8,2;$$
$$\frac{317}{100} = 3,17;$$
$$\frac{215}{1000} = 0,215$$

Estos ejemplos muestran también, cómo se escribe un número decimal como fracción, sólo debe centrar su mirada inicial en el segundo miembro y luego observar el primer miembro. Es decir que dado un número decimal la fracción que le corresponde tiene como numerador al número decimal sin la coma, y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número dado. Ejemplo:

$$51,8 = \frac{518}{\underline{10}} \quad ;$$
$$0,034 = \frac{34}{\underline{1000}}$$

Ejercicio

Determine en la recta numérica el punto que representa la fracción dada. Trace una recta por cada número

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{7}{2}, \quad -\frac{5}{3}, \quad \frac{11}{2}$$

Ayuda

En la fracción 7/2 se deben preguntar cuántas veces el numerador contiene al denominador, en este caso 7 contiene tres veces completas a 2 y queda una unidad dividida por dos. Lo mismo para las otras fracciones.

$$\frac{7}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}; -\left(\frac{5}{3}\right) = -\left(1 + \frac{2}{3}\right) \quad ; \qquad \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$$

Estas representaciones en la recta numérica muestran que los números fraccionarios van ocupando puntos de la recta, diferentes a los que ocupan los enteros. Entre dos números enteros se encuentran infinitos números fraccionarios, sin embargo quedan puntos de la recta sin ocupar.

Fracciones equivalentes: dos fracciones se dicen equivalentes cuando representan la misma cantidad. Para obtener dichas fracciones, se debe multiplicar o dividir el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número.

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** sí y sólo sí ***a . d = b .c***

Fracción irreducible: una fracción es irreducible cuando el numerador y el denominador son primos entre sí, es decir que el máximo común divisor es 1. Esto implica decir que el numerador y el denominador no comparten factores en común, sólo la unidad, por lo tanto no se pueden simplificar. Ejemplo

$$\frac{3}{5} \;;\; \frac{2}{9} \;;\; \frac{12}{7}$$

Comparación de fracciones:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones **irreducibles**[11], se cumple que: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ ***a.d > c.b***

Fracciones inversas: dos fracciones son inversas cuando el numerador de la primera es igual al denominador de la segunda y el denominador de la primera es igual al numerador de la segunda. Ejemplo:

$$\frac{5}{7} \qquad \frac{7}{5}$$

Si se multiplican dos fracciones inversas el resultado es la unidad:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = 1$$

[11]Una fracción es **irreducible** cuando tanto el numerador como el denominador no admiten ningún divisor común.

Aplicación

a) Escriba en orden creciente las siguientes fracciones: 3/7,-7/10,-2/5, 5/3.

b) Elija tres fracciones de las anteriores y represéntelas en la recta numérica. Utilice una recta para cada una.

c) Encuentre dos números racionales que estén comprendidos entre los números 4/7 y 2/3.

I.5.2 Operaciones con números racionales

Si se quiere comparar dos fracciones, es conveniente a tal efecto, encontrar las fracciones equivalentes con los mismos denominadores y comparar sus numeradores. Por ejemplo, si se desea comparar las fracciones 4/5 y 2/9, con distinto denominador, se debe buscar las fracciones equivalentes que si lo tengan, de la siguiente manera:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{9}=\frac{36}{45} \qquad y \qquad \frac{2}{9}\cdot\frac{5}{5}=\frac{10}{45} \qquad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}>\frac{2}{9}$$

Se puede de esta manera determinar la relación de desigualdad o igualdad entre dos fracciones dadas.

Además si las fracciones son irreducibles basta con comparar los productos cruzados, a saber:

$$\frac{4}{5}\ y\ \frac{2}{9} \quad si \quad 4.9>5.2 \quad \Rightarrow \frac{4}{5}>\frac{2}{9}$$

Para sumar o restar fracciones, se deben buscar fracciones equivalentes a las dadas, cuyos denominadores sean el mínimo común múltiplo de los mismos, y luego, sumar los numeradores.

Dadas las siguientes fracciones, 4/5 y 2/9, con distinto denominador, se debe buscar las fracciones equivalentes que si lo tengan, de la siguiente manera:

$$\frac{4}{5}.\frac{9}{9}=\frac{36}{45} \quad y \quad \frac{2}{9}.\frac{5}{5}=\frac{10}{45} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}>\frac{2}{9}$$

Se puede de esta manera determinar la relación de desigualdad o igualdad entre dos fracciones dadas.

Además si las fracciones son irreducibles basta con comparar los productos cruzados, a saber:

$$\frac{4}{5}\ y\ \frac{2}{9} \quad si \quad 4.9>5.2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}>\frac{2}{9}$$

I.5.2.1 Suma y Resta

Mismo denominador

Si las fracciones tienen el mismo denominador, el resultado será otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma o resta de los numeradores dados.

Ejemplo:

$$\frac{4}{3}-\frac{7}{3}=\frac{4-7}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

$$\frac{8}{5}+\frac{9}{5}=\frac{8+9}{5}=\frac{17}{5}$$

Distinto denominador

Si las fracciones a sumar o restar no tienen el mismo denominador, se sustituyen por otras fracciones equivalentes con igual denominador y se opera como el caso anterior.

Ejemplo:

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{8}=\frac{7}{6}.\frac{4}{4}+\frac{5}{8}.\frac{3}{3}=\frac{28}{24}+\frac{15}{24}=\frac{43}{24}$$

Un paso similar es el de obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{8}=\frac{7.4+3.5}{24}=\frac{28+15}{24}=\frac{43}{24}$$

Si alguno de los términos es un número entero, se lo considera como una fracción de denominador uno y se procede como el caso anterior.

Ejemplo:

$$2+\frac{7}{3}=\frac{2.3+7}{3}=\frac{13}{3}$$

Si quiere aprender un truco para sumar y restar fracciones, mire el siguiente **video**:

Suma y resta de fracciones con el truco de la mariposa (t 2,08)

Responda

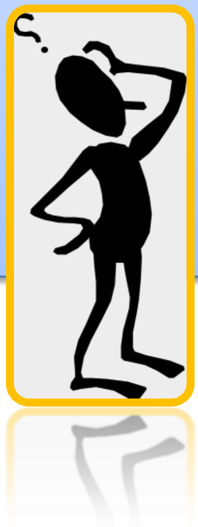
1. Complete con fracciones según corresponda

………..< 3/8 <……….

………..> 2/5 >……….

2/4 <……………..< 3/4

2. Mentalmente determine el valor de *s*, si sabe que a la resta entre *s* y ocho se la divide por 15, se obtiene la unidad.



Aplicación

1. Los tres séptimos de los alumnos de segundo año no realiza ningún deporte, la mitad juega al tenis y el resto practica vóley. ¿Qué fracción del total practica vóley?
2. Joaquín utilizó un tercio de su sueldo para comprar comida, un cuarto del mismo para comprar ropa y el resto lo depositó en el banco. ¿Gasta más en ropa o en comida? ¿Qué fracción del sueldo depositó?
3. ¿Qué fracción hay que sumar a 14/45 para obtener 1?
4. ¿Qué fracción hay que restar a 14/45 para obtener 1?

I.5.2.2 Simplificación

Simplificar una fracción implica reducirla a otra equivalente a ella, que contenga números más pequeños. Esto se logra cuando se puede dividir numerador y denominador por un mismo número.

Ejemplo:

$$\frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3}\,;\; -\frac{35}{14}=-\frac{35:7}{14:7}=-\frac{5}{2}$$

Cuando una fracción no se puede simplificar se dice que es **irreducible**.

Ejemplo:

$$\frac{7}{3};\; -\frac{2}{7};\; \dots$$

Para que las simplificaciones se realicen en forma clara y rápida es conveniente recordar los criterios de divisibilidad. Esto le ayudará bastante y reducirá su tiempo de trabajo.

I.5.2.3 Multiplicación

Multiplicar números fraccionarios implica obtener otro número fraccionario, de signo igual al que resulta de aplicar la regla de los signos, cuyo numerador se obtiene multiplicando los numeradores dados y su denominador es el producto de los denominadores dados.

En general:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

Ejemplo:

$$\frac{10}{3}=\frac{3\,.\,7\,.10}{4\,.9\,.\,3}=\frac{210}{108}$$

$$\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{15}{12}\right)\cdot\frac{8}{10}=\frac{3.(-15).8}{5.12.10}=-\frac{3}{5}$$

Es conveniente que se efectúen todas las simplificaciones[12] posibles antes de expresar los productos de los numeradores y denominadores. Operar con números pequeños agilizará el trabajo.

I.5.2.4 División

El cociente entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se puede realizar transformando la división en una multiplicación de un número por el inverso del otro, de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$$

A partir de allí se trabaja de la forma explicada para la multiplicación.

Ejemplos:

$$-\frac{22}{9}:\frac{14}{21}=-\frac{22}{9}\cdot\frac{21}{14}=-\frac{22.21}{9.14}=-\frac{11}{3}$$

$$-\frac{18}{25}:\left(-\frac{6}{7}\right)=-\frac{18}{25}\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{18.7}{25.6}=\frac{21}{25}$$

[12] Se puede simplificar numeradores y denominadores de diferentes fracciones siempre que las mismas estén afectadas a la operación de multiplicación.

Aplicación

1. ¿Qué interpreta cuando se dice que se quieren los tres cuartos de 24?
2. ¿Cómo interpreta y resuelve fracciones cuyos numeradores y/o denominadores contienen fracciones, por ejemplo (3/5) / (1/4)=?
3. Transforme las siguientes fracciones en fracciones irreducibles: 25/55, 60/120, 12/480, 60/12.
4. Calcule mentalmente las siguientes operaciones con números racionales:

   a) $\frac{2a}{a}+\frac{5a}{a}-3a-\frac{a}{a}=$ $\qquad a \neq 0$

   b) $(3a + 2a - 7a).1/2 =$

   c) $3(2a + 1) -(-5a -3) =$
5. Dos amigos compran una caja de 1 litro de jugo de naranja, uno toma la tercera parte y el otro la quinta parte. Puede decir si les sobra algo de jugo, ¿cuánto?
6. Los dos terceras partes de una página están ocupadas por ilustraciones, de las cuales un cuarto son fotos. ¿Qué parte de toda la página está ocupada por fotos?

I.5.2.5 Potenciación

La multiplicación sucesiva de ***a*** factores iguales (como ya se estudió para números naturales y enteros) se puede expresar como $a.a.a.a.a.a = a^6$, esta operación así expresada en donde ***a*** es la base y el número ***6,*** el exponente, recibe el nombre de potenciación. Como se ve, permite reducir la notación de multiplicación de varios factores iguales en otra operación de escritura más corta. En forma general se escribe $a^n = b$, donde ***b*** representa la potencia.

Para reducir el proceso se dice que elevar una fracción a un exponente, implica elevar el numerador y el denominador a dicho exponente (propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división).

La potenciación de fracciones cumple con las mismas propiedades que con los números enteros.

✓ **Potencias de exponentes pares o impares**

** Toda potencia de exponente **par** es siempre **positiva**.*

$$\left(-\frac{6}{7}\right)^2=\left(-\frac{6}{7}\right).\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{6.6}{7.7}=\frac{6^2}{7^2}=\frac{36}{49}$$

** Toda potencia de exponente **impar** tiene el mismo signo que su base.*

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3=\left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3.3.3}{5.5.5}=-\frac{3^3}{5^3}=-\frac{27}{125}$$

✓ **Potencias de exponente entero negativo**

Para elevar un número racional no nulo a un exponente entero negativo, se invierte la base de la potencia y se la eleva al opuesto del exponente original. El siguiente ejemplo muestra que con la introducción de los números fraccionarios puede ampliarse la definición de potencia cuando el exponente es negativo. Para ello se procede así:

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$$

En general:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Para resolver una potencia de exponente negativo se debe operar para transformarlo en exponente positivo, esto se logra invirtiendo la base de la potencia.

✓ **Potencias de sumas o restas**

Es importante recordar que **la potenciación no es distributiva con respecto a la suma o a la resta**, por lo que cuando se presentan potencias de sumas o restas se debe prestar especial atención a cómo darle solución. Existen situaciones que se presentan con bastante frecuencia, como ser:

$$(a+b)^2=(a+b).(a+b)=a.a+a.b+b.a+b.b=a^2+2.a.b+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b).(a-b)=a.a-a.b-b.a+b.b=a^2-2.a.b+b^2$$

Se observa que las potencias consideradas tienen exponente dos, y para estos casos en donde se presenta el cuadrado de una suma o resta, que no se puede efectuar directamente, es conveniente recordar que**:**

*El cuadrado de la **suma** (o **diferencia**) de dos números es igual al cuadrado del primer término más el doble producto de los dos términos con sus respectivos signos y más el cuadrado del segundo término.*

I.5.2.6 Radicación

La radicación es la operación inversa de la potenciación y se define como $\sqrt[n]{a}$, con n entero positivo y se lee como raíz enésima de a, siendo n el índice, a el radicando y $\sqrt{\ }$ el radical.

La raíz de una fracción es igual a la raíz del numerador y a la del denominador de la misma.

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2} \quad por\ que \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2} \quad por\ que \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$$

En caso de tener una raíz de índice par y radicando negativo, la misma no tiene solución racional, ya que no se puede encontrar un número que elevado a un exponente par, dé como resultado un número negativo (ej. $\sqrt{-\frac{16}{9}}$).

- ✓ **Potencias de exponente fraccionario**

Se define la potenciación de exponente racional de tal manera de que se cumplan todas las propiedades vistas para potencias de exponente entero.

Toda potencia de exponente fraccionario y positivo es igual al radical cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base de la potencia elevada a un exponente igual al numerador del exponente dado. En símbolos:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a} \quad , \quad a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \quad , \quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Ejemplo:

$$27^{\frac{2}{3}} = \left|27^{\frac{1}{3}}\right|^{2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{2} = (3)^{2} = 9$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27}$$

Responda

1) Cuando se trabaja con ejercicios en donde intervienen varias operaciones entre ellos, es conveniente tener en cuenta las prioridades de ejecución de dichas operaciones, ¿recuerda esas condiciones, investigue y escríbalas?

2) Para resolver un ejercicio combinado en donde se presentan paréntesis, corchetes o llaves, ¿cómo debe proceder para dar correcta solución al mismo?

Aplicación

1. Complete con = ó ≠, y en caso de ser distinta, escriba a la par la expresión correcta:

   $(a+b)^n$ ....$a^n + b^n$

   $(a^n)^m$ ...... a^{m+n}

   $\sqrt{a^3}$ ....$a^{\frac{1}{3}}$

   $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ....$-\frac{4}{5}$

2. Aplique las propiedades que correspondan y encuentre el resultado de las siguientes expresiones:

   $\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1^0 =$

   $\left(5a^{-1} + 3\right)^2 =$

   $\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{12}\right)^{-3} =$

   $\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} - \left(\frac{3}{2} - 2\right)^{-4} - \left[\left(\frac{5}{2}^{-1}\right)^3\right]^{-\frac{1}{6}} =$

I.5.3 Números decimales

Los números racionales pueden ser expresados como fracciones de números enteros, o mediante su expresión decimal.

Los números decimales son un caso particular de los números fraccionarios cuyos denominadores son una potencia de 10. Si la fracción no está expresada como potencia de 10, igual se puede transformar la misma en un número decimal, para ello se procede a efectuar la división entre el numerador y el denominador.

- ✓ Fracciones con expresión decimal finita

Sea la fracción $\frac{24}{30} = 0{,}8$ este cociente es un número decimal exacto, pues se llega a resto cero después de algunos pasos.

- ✓ Fracciones con expresiones decimales infinitas

Al efectuar la división indicada, no siempre se obtiene resto cero, pero sí se observa, que comienza a repetirse una cierta cantidad denominada período. Estos números, con estas características, se denominan números decimales periódicos, es el caso de:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666.... = 0{,}\widehat{6} \quad \textit{decimal periódico, con período } 6$$
$$\frac{86}{11} = 7{,}818181.... = 7{,}\widehat{81} \quad \textit{decimal periódico, con período } 81$$
$$\frac{47}{12} = 3{,}91666.... = 3{,}91\widehat{6} \quad \textit{decimal periódico, con período } 6$$

Todo número racional puede expresarse como número decimal exacto o periódico.

Expresión fraccionaria de un número decimal

Para expresar un número decimal como fracción, se distinguen dos situaciones:

a) Cuando el número es decimal exacto, en ese caso simplemente se escribe el número dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número, a saber:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} \quad ; \quad 0{,}43 = \frac{43}{100} \quad ; \quad -3{,}157 = -\frac{3157}{1000}$$

b) Si el número decimal es periódico, se emplea la siguiente fórmula que abarca todos los casos que se pueden presentar:

$$E,NP = \frac{ENP - EN}{9_P\,0_N}$$

E: parte entera; ***N**:* parte no periódica; ***P***: período;

9

$\boldsymbol{9_P}$: indica que se colocan tantos nueves como cifras tenga la parte periódica, y $\boldsymbol{0_N}$: indica que se ponen tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Por ejemplo:

$$0,\hat{7} = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}$$
$$4,8\hat{3} = \frac{483-48}{90} = \frac{435}{90} = \frac{29}{6}$$
$$7,\overset{\frown}{81} = \frac{781-7}{99} = \frac{774}{99} = \frac{86}{11}$$

Responda

a) Si le proponen sumar y multiplicar números decimales ¿puede, con ejemplos, explicar el proceso a seguir para resolver esas operaciones?

b) Si le dan los siguientes números 4,25 y 3,2 para que efectúe la división entre ellos, siendo 3,2 el divisor, explique ¿cómo trabajaría para encontrar el cociente?

c) ¿Cómo reconoce entre dos números decimales, cuál es el menor? Resuélvalo con algunos ejemplos.

d) Resuelva aplicando las operaciones indicadas

10^{-2} = $\qquad$ $0,71 \,.\, 10^2$ =

0,56 – 3,721 = $\qquad$ 4,53 – 4,348 =

1,45 . 0,3 = $\qquad$ 3,55 : 1,5 =

I.5.4 Temas adicionales de revisión

I.5.4.1 Razón

Una razón es un cociente entre dos magnitudes o valores que se relacionan entre sí ($\frac{a}{b}$).

Es decir que la razón entre dos números reales a y b, siendo b distinto de cero, es el cociente entre a y b, simbólicamente $^{a}/_{b}$.

Ejemplo:

Si un vendedor de una cadena importante de electrodomésticos vende 11 productos por semana, entonces la razón entre la cantidad de productos vendidos y los días de la semana trabajados (se considerará que trabaja 6 días por semana), se tendrá: $\frac{11}{6}$

I.5.4.2 Proporcionalidad

Una **proporción** es la igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- Cuatro números reales a, b, c y d, en ese orden y siendo b ≠ 0 y d ≠ 0, forman una proporción si la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
  - ➔ **a** y **d** se denominan **extremos**; **b** y **c** se llaman **medios** de la proporción.
- En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. En $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a.d = b.c}$
- Estas razones se relacionan según se tengan magnitudes directamente proporcionales o magnitudes que sean inversamente proporcionales.
- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando, a cada cantidad de una magnitud corresponde una sola cantidad de la otra magnitud, y a cantidades distintas de una corresponden cantidades distintas de la otra y tal que la razón de dos cantidades cualesquiera de una magnitud sea igual a la razón de las cantidades correspondientes de la otra magnitud. En otras palabras, al aumentar una magnitud aumenta proporcionalmente la otra, por ejemplo si una se triplica la otra también se triplica.

- Téngase mucho cuidado con el manejo de magnitudes directamente proporcionales, pues en algunos casos si bien cuando aumenta una magnitud aumenta la otra, éstas no son directamente proporcionales. Es el caso de la superficie de un cuadrado de 4 cm de lado, de 16 $\boldsymbol{cm^2}$; si se duplica el lado a 8 cm, su superficie será de 64 $\boldsymbol{cm^2}$, claramente se observa que dicha superficie no es del duplo de la anterior. En símbolos: $\frac{4}{16}\ ?\ \frac{8}{64} \rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$, por lo tanto esas magnitudes no son directamente proporcionales.

Ejemplos de magnitudes directamente proporcionales:

1. La superficie de un rectángulo y su largo,
2. La longitud de la circunferencia y su radio,
3. El peso en gramos del pan y el precio: $\frac{250}{12,5} = \frac{400}{20} = \frac{500}{25} = \mathbf{20}$
4. El trayecto que recorre un automóvil y el combustible consumido.

Si x e y son cantidades de dos magnitudes directamente proporcionales, entonces están relacionadas por una función de proporcionalidad directa cuya fórmula es $\frac{y}{x} = k \quad \Longrightarrow \quad y = k.x$, siendo k un número distinto de cero llamado constante o coeficiente de proporcionalidad.

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales**, cuando a cada cantidad de una magnitud corresponde una sola cantidad de la otra magnitud, y a cantidades distintas de una corresponden cantidades distintas de la otra y tales que la razón de dos cantidades cualesquiera de una magnitud sea igual a la razón inversa de las cantidades correspondientes de la otra magnitud. En otras palabras, al aumentar una magnitud la otra disminuye proporcionalmente y al disminuir una la otra aumenta proporcionalmente

Si dos cantidades son inversamente proporcionales, la razón entre dos cantidades cualesquiera de una misma magnitud es igual a la razón inversa entre las cantidades de la otra magnitud correspondientes a las primeras: $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{c}{d}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

Ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales:

1. Si la velocidad de un automóvil se duplica, el tiempo en recorrer una cierta distancia se reduce a la mitad.
2. Para mantener la superficie de un triángulo, al disminuir la base se debe aumentar la altura.
3. A mayor cantidad de gatos para alimentar, la bolsa de alimento rendirá menos tiempo.

- Decir que *y* es inversamente proporcional a *x*, significa expresar simbólicamente que $y\,.\,x = k \quad \Rightarrow y = \frac{k}{x}$, siendo k ≠ 0la constante de proporcionalidad.

I.5.4.3 Regla de Tres Simple directa

Los problemas en los que se requiere aplicar regla de tres simple, consisten en: dadas dos cantidades de una magnitud y la correspondiente a la primera de ellas en la otra magnitud, calcular la correspondiente a la segunda, este proceso se llama regla de tres simple. Las magnitudes que intervienen pueden ser directa o inversamente proporcionales, correspondiendo según esto a la aplicación de regla de tres simple directa para el primer caso, y regla de tres simple inversa en el segundo.

Ejemplos:

1. Si el precio del metro cuadrado de algunos terrenos ubicados en el sector oeste de la ciudad, es de $1700, cuánto saldrá un terreno de 300 metros cuadrados?

Planteo: 1 m^2 ⟶ $1700

300 m^2 ⟶ $ *x*

Son magnitudes **directamente proporcionales** pues al aumentar una de ellas aumenta proporcionalmente la otra. De esta forma la relación de proporcionalidad es:

$$\frac{1}{300} = \frac{1700}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{300\,.\,1700}{1} \quad \Rightarrow \quad x = 510.000$$

Por lo tanto comprar ese terreno costará $510.000

2. Si el grupo de montañismo La Torca, conformado por cinco personas, viajan para hacer cumbre en uno de los seis miles en Antofagasta de la Sierra y para ello calcularon el consumo de tres kg de alimentos por persona por seis días de expedición, cuál debería ser el consumo de alimento por persona si al llegar al campamento base se incorporan tres montañistas y sólo cuentan con los 15kg iniciales?

Planteo: como la cantidad de días de permanencia no varía, y la cantidad de alimento con la que cuentan es la misma, se tendrán en cuenta las variables persona y cantidad de alimento por persona

5 personas ⟶ (consumirán) 3000g c/u

8 personas ⟶ (consumirán) *x* g c/u

Las magnitudes son **inversamente proporcionales**, pues al aumentar la cantidad de personas, disminuirá la ración de alimento. Así la relación de proporcionalidad es:

$$\frac{5}{8} = \frac{x}{3000} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5\ .\ 3000}{8} \quad \Rightarrow \quad x = 1875$$

Por lo tanto dispondrán de 1875g de comida por persona.

I.5.4.4 Porcentaje

La necesidad de usar porcentajes es muy habitual, y calcularlo debe tornarse rutinario. Téngase en cuenta, que sobre la base del porcentaje se calculan los problemas de bonificaciones o descuentos por ofertas o atenciones comerciales, recargos por financiación, comisiones por trámites o diligencias, etc.

Se necesita trabajar con porcentajes, cuando se escuchan frases como las siguientes:

- A los jubilados les aumentaron el 23% de su jubilación.
- Por el día del amigo en un negocio de indumentaria de cuero para damas, realizan el 15% de descuento, pagando de contado o débito.
- Si me atraso en el pago de la cuota de U$S 150 del viaje de fin de año me cobran U$S 30 de recargo en esa cuota.

Al expresar, por ejemplo, el sesenta por ciento de ALGO se hace referencia a una relación en el siguiente sentido: de cien unidades del ALGO se toman sesenta, es decir sesenta de cada cien y en forma simbólica se representa como una razón $\frac{60}{100}$.

La primera frase implica decir que por cada \$100 que cobra un jubilado se incrementan \$23. Si el sueldo de un jubilado fuera de \$5600, para determinar el 23% de esa cantidad, se recurre a una regla de tres simple, a proporciones y sus propiedades, como sigue:

100 por ciento ———— \$5600

23 por ciento ———— \$ x

$$\frac{100}{23} = \frac{5600}{x} \qquad x = \frac{23\ .\ 5600}{100}$$

Realizando las operaciones indicadas el resultado es 1288, es decir que a este jubilado le corresponde un aumento en su sueldo de \$1288, por lo que ahora cobrará \$6888.

Para interpretar la segunda frase se necesita referenciar un monto, pues a partir de él se podrá calcular el descuento. Por ejemplo, una campera de cuero con forro de raso, que la semana anterior costaba \$3890, con el descuento del 15% nos quedará:

100 por ciento ——————— $ 3890

15 por ciento ——————— $ *x*

$$\frac{100}{15} = \frac{3890}{x} \qquad x = \frac{15\,.3890}{100}$$

El valor de *x* es 583,5, este monto se descuenta del precio original, quedando la campera, con la oferta, en $3306,5.

La tercera frase implica determinar cuál es el porcentaje de recargo que aplica la empresa de viajes sobre la cuota. En ese caso se interpreta que los U$S 150 corresponden al total de la cuota, para este caso el cien por cien:

U$S 150 ——————— 100 por ciento

U$S 30 ——————— *x* por ciento

$$\frac{150}{30} = \frac{100}{x} \qquad x = \frac{30.100}{150}$$

Obteniendo que el porcentaje de recargo que aplica la empresa es del 20%.

I.5.4.5 Repartición proporcional

En la vida cotidiana se presentan situaciones en las que se deben repartir en forma directa o inversamente proporcional, alguna cantidad de una magnitud entre otras cantidades de la misma u otra magnitud.

Repartición directamente proporcional: si *x* e *y* son las partes que dos personas recibirán proporcionalmente a las partes *a* y *b* que aportaron inicialmente, entonces la constante de proporcionalidad se obtiene como sigue:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} = k\ constante$$

Si fueran **inversamente proporcionales**, simbólicamente quedaría:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{x+y}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = k$$

Ejemplo:

Zárate, Nieva y Corzo son las tres familias de profesionales que alquilaron un departamento en Carlos Paz por dos meses a un costo de U$S 6000. La flia. Zárate estuvo los primeros 20 días, los Nieva vinieron después y se quedaron 25 días y por último llegaron los de la flia. Corzo y lo ocuparon los 15 días restantes. ¿Cuál es el monto que le corresponde pagar a cada flia. según los días que ocuparon el departamento?

Si se denomina con *x, y, z* al dinero que debe poner cada familia respectivamente y además se sabe que éste debe ser proporcional a la cantidad de días que ocuparon el dpto., se tendrá:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{25} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{20+25+15} = \frac{6000}{60} = 100$$

$$\frac{x}{20} = 100 \;\rightarrow x = 2000$$

$$\frac{y}{25} = 100 \;\rightarrow\; y = 2500$$

$$\frac{z}{15} = 100 \;\rightarrow\; z = 1500$$

Se obtienen, de este modo, los montos en dólares que cada familia debe abonar.

Aplicación

1. Explique ¿qué significa decir el 8 % de 3200?
2. ¿Cómo se determina el valor de un determinado bien, si se sabe que el 21% es de U$S 1236,9?
3. Una cápsula de 2 gramos, de un medicamento, contiene un 48% de aspirina, un 35% de vitamina D y un 17% de excipiente. ¿Cuántos gramos contiene de cada componente?
4. En un negocio, el vaquero blanco que me gusta, cuesta $630 si lo pago de contado, pero si lo pago con tarjeta de crédito en tres cuotas, el monto que me cobran es de $810. ¿Cuál es el porcentaje de recargo que está aplicando el comercio?
5. En su cuaderno dibuje un rectángulo, el que a partir de ahora representará el local en el que instalará su negocio. En el mismo deberá destinar el 50% para el salón de ventas y el baño, este último ocupará la quinta parte; de la otra parte del local ocupará el 25% para la oficina administrativa y lo que quede para depósito de mercadería. Muestre en su dibujo la distribución realizada, de tal manera que se reflejen las pautas dadas.
6. Ana y Joaquín ganaron en el casino un total de $7460 que repartieron en forma proporcional a lo que cada uno aportó para el juego. Si se sabe que Ana aportó cuatro veces lo que aportó Joaquín, ¿cuánto le correspondió a cada uno?
7. Un arquitecto, un agrimensor y un abogado se asocian para emprender un negocio y contribuyen para el mismo con $50000, $120000 y $80000 respectivamente. Al cabo del año obtienen una ganancia total de $175000. Determine la ganancia que le corresponde a cada uno, según lo aportado inicialmente.

I.5.5 Números Irracionales

Los números racionales pueden expresarse mediante una expresión decimal exacta o periódica y recíprocamente, cualquier expresión decimal exacta o periódica da lugar a un número racional. No obstante, hay otros números decimales que no pueden expresarse como fracción y son aquellos que contienen cifras decimales diferentes, es decir, no contienen período ya que poseen infinitas cifras decimales sin ninguna periodicidad. A estos números se los denomina **números irracionales**.

Ejemplos:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562..$, $\sqrt{3} = 1{,}733205080..$

$\sqrt{5} = 2{,}236067978\ldots$, $\pi = 3{,}141592653589793..$

$e = 2{,}718281828459045\ldots$

$\sqrt{6} = \ldots\ldots.$; $\sqrt{7} = \ldots\ldots.$; $\sqrt{8} = \ldots\ldots.$; $\sqrt{10} = \ldots\ldots.$

En general, la raíz cuadrada de un número natural, si no es entera, es irracional. Otro tanto ocurre con las de índice superior, en consecuencia son irracionales también: $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[3]{2}, \ldots\ldots.\ldots.,\ \sqrt[n]{k},$ salvo que *k* sea una potencia *n-ésima*.

π número que se utiliza para realizar el cálculo de la longitud de la circunferencia (**2 π r**) o el área de un círculo (**π r²**). Su irracionalidad recién se probó en el siglo XVIII.

El número **e** es muy importante, se trabaja con bastante frecuencia en matemática superior (estudio de la función exponencial).

Estos números irracionales son infinitos y tienen su representación en la recta numérica, ocupando los puntos de la misma que no ocuparon los números racionales.

I.6 NÚMEROS REALES

El conjunto formado por los racionales y los irracionales se llama conjunto de números Reales (**R**). Los números reales llenan por completo la recta numérica, de allí que ésta recibe el nombre de recta real. Es por lo tanto un conjunto denso, ya que entre dos números reales diferentes, siempre puede encontrarse otro real.

Aunque la mayor parte de los números irracionales, no se puedan representar exactamente por métodos geométricos, la representación aproximada a partir de su expresión decimal será siempre posible.

Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta. El número real correspondiente a un punto se llama la abscisa del punto. Esta correspondencia constituye el principio fundamental de la geometría analítica, donde los puntos geométricos se sustituyen por números.

Todo número decimal con infinitas cifras define un número real. Si estas cifras son exactas o periódicas el número es racional, si las cifras no son periódicas el número es irracional. Si los números irracionales aparecen en forma decimal, la cantidad de cifras que se toman en su escritura es finita, pues resulta imposible escribirlas a todas. La calculadora, por ejemplo, tiene un display finito, por lo tanto –para un número irracional- ofrece las primeras diez cifras decimales del número, en definitiva, da una aproximación racional de un número irracional. En estos casos y si se deben operar estos números, es conveniente acordar la cantidad de cifras que se van a considerar. Al efectuar este acuerdo se está cometiendo en el cálculo un error, que depende de la cantidad de cifras decimales que se usen. Cuanto mayor es la cantidad de cifras que se usen, menor será el error cometido.

Todo número irracional puede ser *aproximado* tanto como se quiera por un número racional. Al operar con números reales con frecuencia existe la necesidad de aproximar números decimales que tienen infinitas cifras. Un número decimal puede ser aproximado por ***truncamiento*** o efectuando ***redondeo*** (que es lo más usado).

- ✓ **Truncar** un número decimal consiste en eliminar a partir de una cifra determinada, todas las cifras que le siguen y reemplazarlas por cero.

Ejemplos:

$$\mathbf{6{,}753 \cong 6{,}75}$$

$$\mathbf{72{,}3647165.... \cong 72{,}3647}$$

$$\mathbf{58{,}621547913.... \cong 58{,}62}$$

- ✓ **Redondear** un número decimal en alguna de sus cifras, implica tener en cuenta que si la primera cifra a eliminar es menor que 5, se suprimen todas las cifras a partir de ella, y si la primera cifra a eliminar es mayor o igual que 5, se le suma una unidad a la cifra anterior y luego se eliminan las que le siguen.

Ejemplos:

$7{,}2157 \cong 7{,}216$

$25{,}896124\ldots \cong 25{,}8961$

$0{,}975414141\ldots \cong 0{,}97541$

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que con los números racionales: sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por cero), y estas operaciones tienen las mismas propiedades dentro de ***R*** que las que tenían en ***Q*.** También se pueden extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par y radicando negativo) y el resultado sigue siendo un número real, esto no ocurría con los números racionales.

I.6.1 Propiedades de importancia para la relación de orden

En las siguientes expresiones se hará uso de ciertas simbologías, especialmente los conectivos lógicos, que es necesario presentar: el símbolo $\vee$ representa el conectivo ***ó***; el $\wedge$ representa el conectivo ***y***; $\Rightarrow$ es una implicación que se lee como *entonces*.

$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R, \forall d \in R:$

$a>b \vee a=b \vee a<b$ (ley de tricotomía)

$a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (propiedad transitiva)

$a<b \Rightarrow a+c<b+c$ (ley de monotonía de la +)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (ley de monotonía del .)

$a \neq 0 \Rightarrow a.a = a^2>0$

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>b.c$ (al multiplicar una desigualdad por un número negativo la misma cambia su sentido de desigualdad)

$a<b \Rightarrow -a>-b$

$a.b>0 \Rightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$

$a<b \wedge c<d \Rightarrow a+c<b+d$

I.6.2 Valor absoluto de un número real

El **valor absoluto** de un número real x se designa mediante $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Es decir, que $|x|$ es el número que se obtiene de x sin considerar su signo, con $x \neq 0$.

Ejemplos $|-12| = 12$; $|7| = 7$; $|0| = 0$; $|-9| = 9$

El concepto de valor absoluto es de utilidad en los trabajos de cálculo.

Otra forma de entender el valor absoluto de un número, es la de tomarlo como distancia. Así $|x|$ se entiende como la distancia entre el valor x y el origen. Si se tuviera $|x - a|$ esto se interpreta como la distancia entre el valor x y el valor a.

I.6.2.1 Propiedades

Algunas de las propiedades de valor absoluto que son de uso más frecuente en el cálculo y que se tomarán sin demostración, son:

1. *Si el valor absoluto de un número **x** es menor o igual que el valor **a**, implica que el valor **x** está comprendido entre **–a** y **a**.*

   $|x| \leq a \quad \Rightarrow \quad -a \leq x \leq a$

2. *Si el valor absoluto de un número **x** es mayor o igual que el valor **a** implica que el valor de **x** es menor o igual que **a** ó el valor de **x** es mayor o igual que **a**.*

   $|x| \geq a \quad \Rightarrow \quad x \leq -a \quad ó \quad x \geq a$

3. *El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de sus términos.*

   $|x + y| \leq |x| + |y|$

4. *El valor absoluto de la diferencia* de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los números

   $|x - y| \leq |x| + |y|$

5. *El valor absoluto de la diferencia de dos números es mayor o igual que el valor absoluto de la diferencia de los valores absolutos de los números.*

   $|x - y| \geq ||x| - |y||$

6. *El valor absoluto de la multiplicación de dos números es igual al producto de los valores absolutos de los factores.*

$$|x.y| = |x|.|y|$$

7. *El valor absoluto de la división entre dos números es igual al cociente entre los valores absolutos del dividendo y del divisor.*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

8. *La raíz cuadrada del cuadrado de un número es igual al valor absoluto del número.*

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = a \quad \Rightarrow \quad |x| = \pm\sqrt{a}$$

I.6.3 Orden de las operaciones

Para poder dar solución a un ejercicio en el que figuran diferentes operaciones, es necesario tener en cuenta ciertos convenios de prioridad en el orden de realización de las mismas.

1) Se debe identificar la operación principal que regula la expresión que se presenta. Recordando que la operación principal es la última que se realiza para llegar al resultado final.

2) Si la operación principal es una suma, esta contiene términos que se deben resolver en primer lugar. En cada término debe nuevamente, preguntar cuál es la operación principal.

3) Si la operación principal es una multiplicación, se debe determinar en cada uno de los factores que en ella intervienen, las operaciones a efectuar.

4) Si la expresión contiene paréntesis, primero se resuelve la operación

5) Indicada del mismo y luego se continúa.

6) Para suprimir un paréntesis, corchete o llave, debe recordar las reglas de supresión de los mismos.

Aplicación

1. Explique el significado de la expresión $|x| < 6$
2. Ídem para la expresión $|x| > 12$
3. Resuelva mentalmente y luego compruebe el en su cuaderno:

$$a)\quad \sqrt{3}\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} =$$

$$b)\quad \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}{4} - \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} =$$

$$c)\quad \left(\frac{1}{2} + 2^{-1}\right)^{31} - \sqrt[3]{729} =$$

4. Resuelva aplicando las reglas que escribió anteriormente:

$$a)\left(\frac{1}{5} - 0{,}5^2\right)\cdot 1{,}21\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{-2} - \left(\frac{-3}{5}\right) =$$

$$b) - \left(-\frac{2}{3}\right) : (2{,}1 + 0{,}7888\ldots) + 0{,}2 - \left(\frac{5}{2} - \frac{3^2}{4}\right) =$$

5. En los siguientes ejercicios coloque, a su criterio, paréntesis, corchetes o llaves, de dos formas diferentes, luego resuelva y compare los resultados.
    a. $4 - -3^2 . 9^{-1} - 3 . 3/2 + 1 - ½ : - 0{,}25 =$
    b. $½^{-2} - 1^{-3} + 6 - 8 : - 2^{2} - - 8 : - 2 =$

FELICITACIONES!!!!!!!!

YA TERMINÓ EL PRIMER CAPÍTULO!!

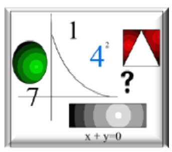
Trabajo Práctico 2

Clic aquí

Realice el Trabajo Práctico 2

Autoevaluación 1

Clic aquí



CAPÍTULO II:

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

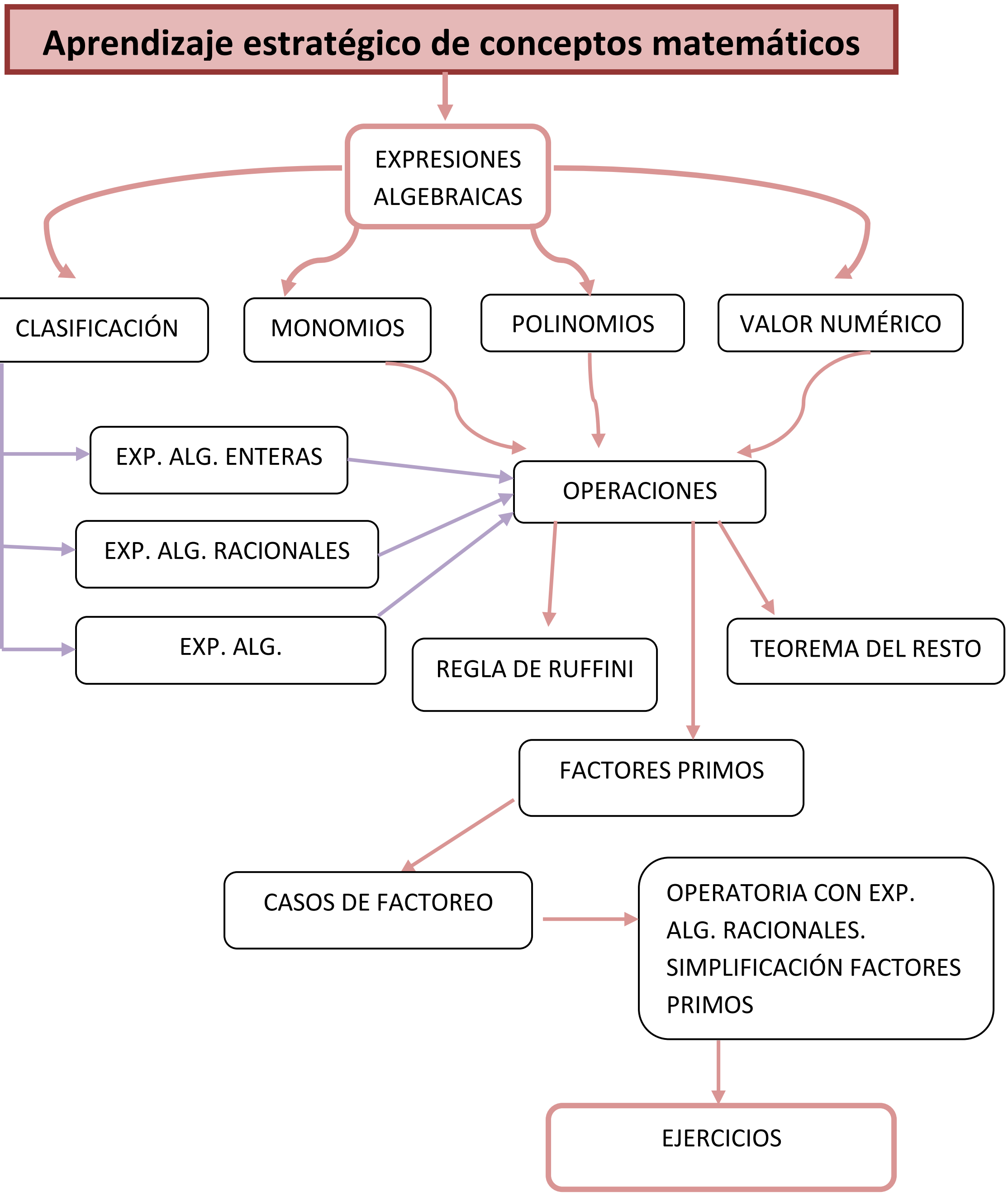
Autores:

- Especialista Lic. Graciela Inés CARRANZA
- Ing. Adriana Mabel LEZANA
- Ing. Raúl Eduardo LEIVA
- Prof. Martha Noemí SECO
- C.P.N. Rosa Margarita RODRÍGUEZ

Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

CAPÍTULO II: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

ESQUEMA CONCEPTUAL



OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Se pretende que el estudiante logre:

- ✓ Desarrollar habilidad en el manejo algebraico.
- ✓ Reconocer operaciones principales.
- ✓ Adquirir cierto dominio en la factorización de expresiones algebraicas.
- ✓ Aplicar estratégicamente factorizaciones en las operatorias combinadas.
- ✓ Resolver correctamente las operaciones planteadas en las situaciones de ejercitación.

CONTENIDOS

- ✓ Introducción
- ✓ Clasificación de expresiones algebraicas
- ✓ Monomios
- ✓ Polinomios
- ✓ Valor numérico de un polinomio
- ✓ Operaciones con polinomios
- ✓ Teorema del Resto
- ✓ Descomposición de polinomios en factores primos
- ✓ Distintos casos de factoreo
- ✓ Operaciones con expresiones algebraicas

II.1 Introducción

Cuando se debe resolver una situación problemática, luego de interpretarla y determinar las cantidades conocidas y desconocidas, se apela a la expresión simbólica que representa tal situación, es decir, se recurre a traducir del lenguaje corriente al lenguaje simbólico tratando de que su significación resulte evidente.

Para hacer uso de símbolos se debe tomar letras del alfabeto, que identifiquen a las cantidades que se desconocen del problema, es decir, reemplazar el objeto por una letra que lo identifique. En ese lenguaje simbólico intervienen letras y números (que representan las cantidades conocidas).

Se ingresa en la etapa en la que se deben interpretar estas combinaciones de números y letras y en las que intervienen las expresiones algebraicas.

Las **expresiones algebraicas** se definen como la combinación entre números y letras (que representan cualquier número) y que están relacionadas entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

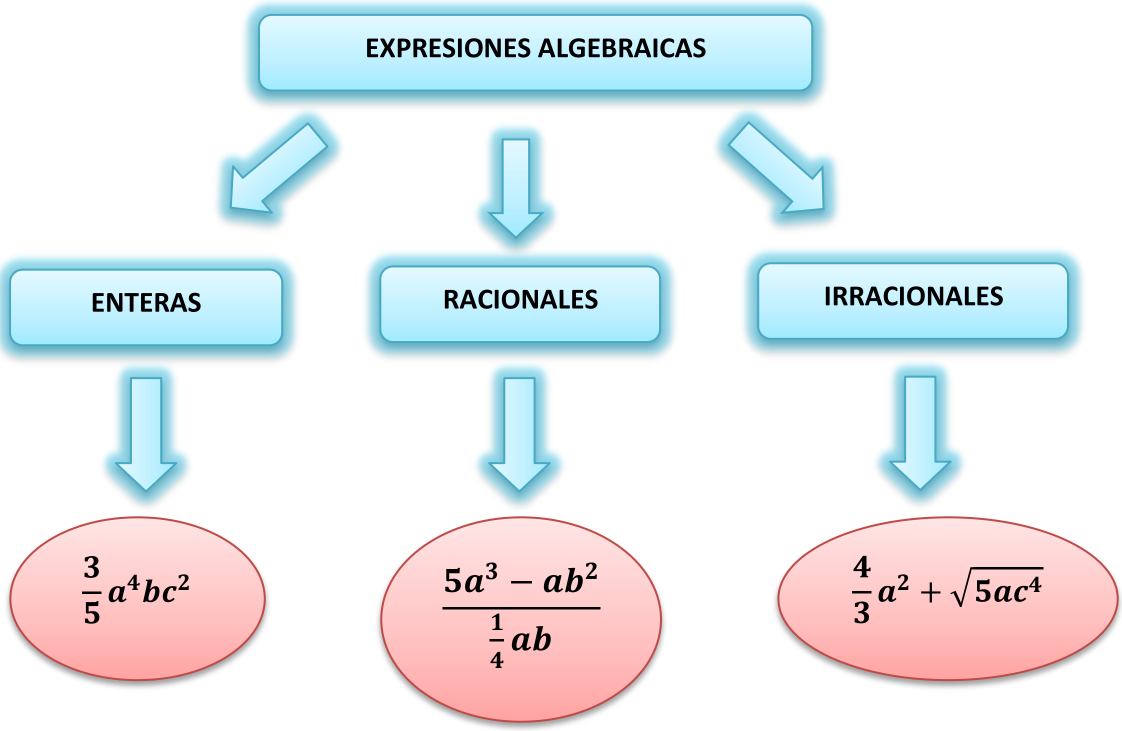
Al momento de calcular la superficie de un campo rectangular de lados *l* y *a,* se puede expresar como $S = l.a$; el volumen de un cubo de arista *c,* se escribe $V = c^3$; la longitud de la circunferencia de radio *r*, se indica con la igualdad $L = 2\ \pi.r$; la superficie del círculo como $S = \pi.r^2$ o la fórmula de interés simple $C_F = C + C.i.t/100$, donde C_F :capital final, *C:* capital inicial, *i*: interés o *%*, *t:* tiempo. Tales fórmulas se conforman combinando letras y números que representan cantidades que pueden ser conocidas o desconocidas. En estos casos, se hace uso de las expresiones algebraicas. Estas expresiones algebraicas provienen de fórmulas de la economía, de la física, de la geometría, de la estadística y con ellas se puede operar para obtener otras relaciones.

II.2 Clasificación

Las expresiones algebraicas pueden ser **racionales enteras**, racionales **fraccionarias** o **irracionales**.

Son enteras cuando no contienen parte literal en el denominador ni en el radicando, son fraccionarias cuando la parte literal no está en el radicando pero si en el denominador y es irracional cuando la parte literal está en el radicando.

En general se trabaja con las expresiones algebraicas enteras, pero en algunas situaciones es necesario trabajar también con las racionales.



Ejercicio

Indique con E o R, si la expresión dada es entera o racional.

$$a)\ \sqrt{2}ab^2 - \frac{1}{3}ab \quad ; \quad b)\ \frac{a-3b}{2ab} \quad ; \quad c)\ \frac{5}{4}pt \quad ; \quad d)\ \frac{3}{5}xy^3 + \frac{2x^2}{y} - 3$$

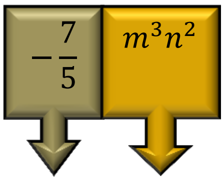
II.2.1 Monomios

Las expresiones algebraicas enteras pueden ser:

Monomio: Se denomina así a toda expresión algebraica que sólo contenga letras y números relacionados mediante las operaciones de multiplicación, división, potenciación o radicación.

Ejemplo: $7m^3p$; $1/5.\ p^2xy$; $\sqrt[3]{28}ab^4$; $\frac{4}{9}x^3y^2$

En un monomio se distingue el *coeficiente o parte numérica* y la *parte literal.*



Coeficiente Parte literal

El coeficiente 1 o –1 suelen sobrentenderse como coeficientes en los monomios que sólo tienen factores lineales, es el caso de m^3n^2 ó $-xy^5$.

Cuando en un monomio se repiten los factores literales, se escribe uno solo con el correspondiente exponente, y en caso de haber varios factores numéricos, éstos se multiplican o dividen y el resultado es el coeficiente.

Monomios semejantes: dos o más monomios son semejantes, cuando tienen la misma parte literal, independiente del coeficiente que tengan.

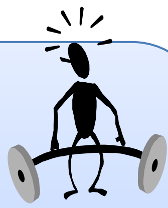
Ejemplo:

$$\frac{5}{6}x^2y,\ -6x^2y,\ 3x^2y$$

Grado de un monomio: lo determina la cantidad de factores literales que contiene. Una forma de determinarlo es sumar los exponentes de cada uno de los factores literales.

Ejemplo: El monomio $-4xy^3$ es de grado 4 ya que los exponentes de la parte literal 1 y 3 suman 4.

Ejercicio



Indique el grado de:

$7/3\ a^3bc$ es de grado............................

$-8pq^2m^5$ es de grado............................

$-x^3yz^2$ es de grado............................

II.2.2 Polinomios

Polinomio: se denomina polinomio a la expresión algebraica que representa una suma algebraica de monomios. Cada uno de los monomios intervinientes se denominan términos del polinomio. Los polinomios de uso frecuente trabajan con expresiones algebraicas enteras.

Responda

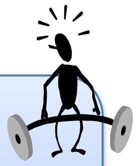
1. Exprese en palabras en qué casos se habla de **binomio** y en cuáles de **trinomio** y para que quede más claro, escriba dos ejemplos de cada uno de ellos.
2. Investigue cómo se determina el **grado de un polinomio,** e indique el grado de los siguientes polinomios:

$$2x^3 - \frac{1}{3}x^2y^2 + 7y^5$$

$$\sqrt{27}a^3b - a^4b^5$$

$$mn^4 - m^4n + m^2n^2$$

Polinomio homogéneo	• Un polinomio se dice homogéneo cuando todos sus términos son del mismo grado.
Polinomio ordenado	• Un polinomio puede estar ordenado en forma creciente o decreciente, con respecto a alguna de las letras que contiene. •Ordenar un polinomio implica, primero determinar la letra con respecto a la que se efectuará dicho ordenamiento, paso seguido se ordena la misma según los exponentes que contiene en cada uno de los términos, en forma creciente o decreciente.



Ejercicio

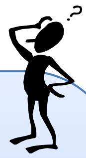
De ejemplos de polinomios y luego proceda a ordenarlos, indicando la letra elegida para efectuar el ordenamiento.

Se le propone ver una presentación corta en **video** de:

Expresiones Algebraicas (t 2:58)

II.2.3 Valor numérico de una expresión algebraica

Se denomina **valor numérico de una expresión algebraica**, al valor que se obtiene de operar según lo indicado por la expresión, previo reemplazo de las letras por los valores dados.



Ejercicios

Determine el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{1}{4}ab^3 - 5b^2 + \frac{3}{5}a^3b^0 \quad para \quad a = -3 \quad , \quad b = \frac{1}{2}$

b) $\frac{3ab - 5a^2 + b}{4a - 2ab^2} \quad para \quad a = \frac{1}{5} \quad , \quad b = -1$

Polinomios en una indeterminada

- ✓ Son aquellos polinomios que expresan su parte literal, con una sola letra o variable. En general las letras que se utilizan para designarlas son las últimas del abecedario ya que las primeras representan valores constantes.
- ✓ Si el polinomio está ordenado en forma decreciente, simbólicamente se escribe mediante una letra mayúscula y entre paréntesis se coloca la variable definida en el polinomio.

Ejemplos:

$$P(x) = -3x^4 + 2x^3 - 1/2\, x + 16$$

$$Q(y) = a\, y^4 - by^3 - cy^2 + 9y$$

Si el polinomio fuera de grado *n* en la variable *x*, la expresión simbólica y en forma general correspondiente sería:

$$\mathbf{T(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}$$

II.3 Operaciones con Polinomios

II.3.1 Suma algebraica

Para efectuar una suma algebraica de dos o más polinomios, se agrupan los términos semejantes en los distintos polinomios, se opera en cada grupo, realizando la suma algebraica de sus coeficientes y los términos que así se obtienen, representan los términos del polinomio suma, más todos aquellos términos que no tuvieran su semejante.

Ejemplo. Si tenemos los polinomios:

$$P(x) = -6 + 3x^3 - 4x + 2x^5 \quad \text{y} \quad Q(x) = 2x - 4x^2 + x^3$$

$$P(x) + Q(x) = (-6 + 3x^3 - 4x + 2x^5) + (2x - 4x^2 + x^3)$$

$$= -6 + (3 + 1)x^3 + (-4 + 2)x + 2x^5 - 4x^2$$

$$= -6 + 4x^3 - 2x + 2x^5 - 4x^2$$

II.3.2 Multiplicación

Se han presentado polinomios con variedad de letras o variables intervinientes. Sin embargo para facilitar el trato operativo con polinomios, a fin de clarificar aún mejor el trabajo, se tomarán para la multiplicación y división polinomios con una sola variable o indeterminada. Esto no implica que deba trabajar sólo con una variable. En algunas aplicaciones puede necesitarse operar con varias variables.

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva entre dos sumas algebraicas, resultando un nuevo polinomio, cuyos términos son los productos de cada término del primer factor por cada uno de los términos del segundo factor. Además se aplica la propiedad de producto de potencias de igual base. Luego se suman los términos semejantes, si los hubiera, quedando el resultado de la multiplicación.

Ejemplo:

Para multiplicar los polinomios $R(y) = -5y^2 + 3y$; $S(y) = -4y^3 + 3 - 2y^2$

Procedemos:

1. Aplicando la propiedad distributiva:

   $R(y).S(y) = (-5y^2).(-4y^3) + (-5y^2).3 + (-5y^2).(-2y^2) + 3y.(-4y^3) + 3y.3 + 3y.(-2y^2)$

2. Luego aplicamos la propiedad de producto de potencias de igual base:

   $R(y).S(y) = 20y^5 - 15y^2 + 10y^4 - 12y^4 + 9y - 6y^3$

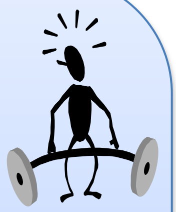
3. Reducimos términos semejantes:

   $R(y).S(y) = 20y^5 - 15y^2 - 2y^4 + 9y - 6y^3$

Notas

- ✓ Todo polinomio puede descomponerse como producto de un polinomio de grado cero por otro polinomio de su mismo grado.
- ✓ Todo polinomio de primer grado es primo.

Ejercicios



1. Efectúe las operaciones según lo indicado en cada caso:

a) $7a-3b-\frac{1}{2}ab \quad ; \quad -4ab-\frac{3}{4}a+12b \quad ; \quad -b+5ab \qquad (+)$

b) $2x^3+10x^2-\frac{1}{2}x \quad ; \quad 4x^3-\frac{9}{2}x^2+8x-3 \quad ; \quad -6x^2+\frac{1}{3}x-1 \qquad (+)$

c) $3x^3+2x^2-\frac{1}{3}x-4 \quad ; \quad -x^3+4x^2-6x-7 \qquad (-)$

2. Proceda a efectuar las siguientes multiplicaciones entre dos polinomios:

a) P(x) . Q(x) siendo P(x) = $2x^2-5x+8$ y Q(x) = $3x-5$

b) 3.M(x) . T(x) siendo M(x) = $1/3\ x^2-2/5\ x+7$ y T(x) = $2x^3-x$

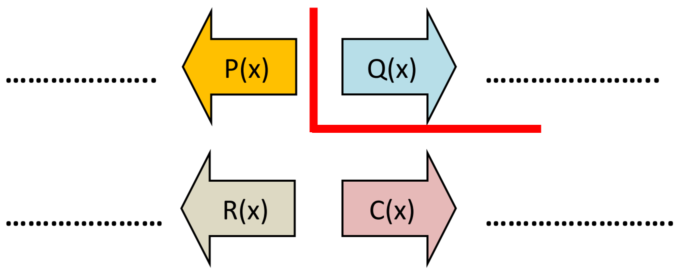
3. Escriba dos polinomios de quinto grado cuya suma sea de segundo grado.

II.3.3 División

Dividir un polinomio P(x) por otro polinomio D(x) cuyo grado sea igual o menor que el del polinomio dividendo, es hallar otros dos polinomios Q(x) y R(x) que cumplan las condiciones de la división, a saber:

1. P(x) = D(x).Q(x) + R(x), es decir dividendo igual a divisor por cociente más resto
2. El grado del polinomio R(x) debe ser menor que el grado del polinomio D(x).

Complete el esquema indicando los nombres de cada una de las expresiones intervinientes:



Responda

1. ¿Qué se dice de una división cuyo resto se anula? Exprese el dividendo según esta situación.
2. ¿Cómo es el grado del polinomio cociente, con respecto a su dividendo? ¿Por qué?
3. ¿En qué casos, de una división, se puede decir que el polinomio dividendo está expresado como un producto?
4. Si el resto de una división es cero, ¿qué se puede decir de la relación entre los polinomios dividendo y divisor?
5. Efectúe los pasos que se deben seguir, para encontrar el resultado de la división: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ dividido en $Q(x) = x^2 + x + 1$.

II.3.3.1 División Sintética – Regla de Ruffini[13]

Cuando en una división, el divisor de la misma es de la forma binomial (x-r), siendo r un valor constante real, el proceso de división se puede realizar en forma rápida, aplicando la conocida regla o método de Ruffini.

Para recordar los pasos a seguir con la aplicación del método mencionado, procederá junto a sus compañeros a trabajar la siguiente división:

$P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x - 6$ y $D(x) = x - 1$.

II.3.3.2 Teorema del Resto

Tenga presente este teorema que le será de mucha utilidad en la asignatura Matemática I del plan de estudio.

Enunciado: Si se efectúa la división entre el polinomio $P(x)$ y un binomio de la forma $(x - r)$, hasta obtener un resto independiente de la variable x, entonces el valor del polinomio en r, es igual al resto de la división.

Hipótesis (incluye los datos que provee el enunciado). Están dados el polinomio $P(x)$ y el binomio $(x - r)$, y entre ellos se efectúa la división.

Tesis (indica lo que se desea demostrar) El polinomio valuado en r toma el mismo valor del resto de la división: $P(r) = R$, siendo R el resto.

[13] Ruffini, Paolo (1765-1822), médico y matemático italiano que se dedicó al estudio del álgebra.

Demostración:

Se procede a realizar la división entre el polinomio P y el binomio dado, hasta obtener un resto que sea independiente de la variable *x*. Luego se escribe, por definición de división:

P(x) = Q(x). D(x) + R siendo D(x) el polinomio dado como divisor.

P(x) = Q(x) (x-r) + R esta expresión (identidad) se verifica para cualquier valor de x. Por lo tanto se verificará para $x = r$, entonces

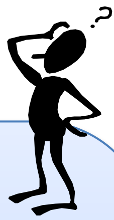
P(r) = Q(r) (r-r) + R el factor (r-r) es cero por lo que anula a ese término, luego

P(r) = R esta igualdad es lo que expresa el teorema.

Véase el siguiente caso específico:

Sea $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$ y D(x) = $x - 4$, al efectuar la división correspondiente aplicando la regla, se observa que el resto es 13/3.

Si se calcula el valor del polinomio P(x) para $x = 4$, se obtiene 13/3.



Responda

- ¿Es siempre posible aplicar la regla de Ruffini en una división de polinomios? Escribe las condiciones que deben cumplir los polinomios.
- ¿Cuál es el valor del polinomio dividendo en una división por un binomio lineal, cuyo resto se anula?
- ¿En qué casos, de los dados, la división es exacta? Explique el razonamiento y/o cálculo efectuado.

a) $(x^3 + 3x^2 + x + 4) : (x - 2)$

b) $(3x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x - 1)$

c) $(2x^3 + x^2 + x + 2) : (x + 1)$

Ejercicios

1. Calcule el valor de la letra ***n*** para que las divisiones indicadas sean exactas

a) $P(x) = x^2 + 6 - nx$ y $Q(x) = x - 3$

b) $M(x) = 2x^3 - 16x^2 + 3x^4 + 4 + nx$ y $S(x) = x - 1/3$

2. ¿Es el polinomio $(x^3 - 3x^2 + 3x)$ múltiplo de $(x - 1)$?

3. ¿Si $P(2) = 10$, cuánto vale t en $P(x) = tx^2 - 2x + 3t$?

4. Determine el valor de h para que el polinomio $T(x) = -1/2\, x^4 - ½\, hx^3 + hx - 4$ se anule cuando la variable toma el valor de la unidad.

II.3.4 Potencias

La multiplicación de varios factores iguales, se puede expresar en forma de potencia. Con frecuencia encontrará algunas potencias polinómicas, cuyos resultados tienen ciertas características que son fáciles de recordar.

Resuelva las siguientes potencias y resalte el resultado obtenido en cada caso:

$(a + b)^2 =$

$(a - b)^2 =$

$(-a + b)^2 =$

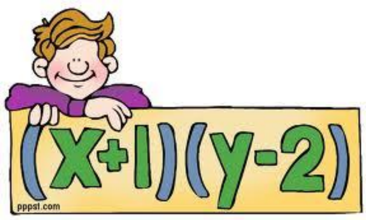
$(-a - b)^2 =$

$(a + b)^3 =$

$(a - b)^3 =$

$(a + b)\,(a - b) =$

II.4 Descomposición de polinomios en factores primos



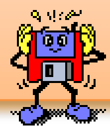
En ocasiones resulta conveniente expresar un polinomio dado, en producto de otros. Este proceso de convertir un polinomio en una multiplicación de dos o más factores es lo que se denomina factorización. Es decir **factorizar un polinomio es transformarlo en una multiplicación**.

Se verán algunas formas de factorización, las que dependen de los polinomios que se deseen transformar. Los polinomios se factorizan según reglas prácticas y su elección y aplicación depende del polinomio que se quiere trabajar. Estas reglas forman los denominados casos de factoreo.

II.4.1 Los distintos Casos de Factoreo

II.4.1.1 Primer caso: FACTOR COMÚN

CUÁNDO SE APLICA: Cuando en todos los términos de un polinomio figura un factor común, es decir un monomio o un polinomio que se repite en **TODOS** los términos.



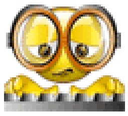
Característica: se trata de un polinomio de **cualquier número** de términos.

CÓMO se aplica: Se escribe el factor común y se lo multiplica por el polinomio que resulta al dividir cada término del polinomio original en ese factor.

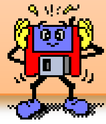
Ejemplo en forma simbólica:

$$a\,p + b\,p = p\,(a + b)$$

II.4.1.2 Segundo caso: FACTOR COMÚN POR GRUPOS



CUÁNDO SE APLICA: Cuando los términos de un polinomio **pueden reunirse en grupos** de igual cantidad de términos, con un factor común en cada grupo.



Característica: se trata de un polinomio con **número par** de términos.

CÓMO se aplica: Se saca en cada uno de los grupos el factor común. Si se ha hecho la agrupación correcta de términos se podrá aplicar nuevamente el primer caso de factoreo.

Ejemplo en forma simbólica:

$$am + bn + an + bm =$$

Se agrupan los términos que poseen factores comunes:

$$(am + bm) + (bn + an) =$$

Se saca el factor común de cada término:

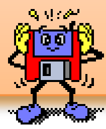
$$m\,(a + b) + n\,(a+b) =$$

Ahora se aplica el 1er caso de factoreo $(a + b).(m + n)$

Resulta: $am + bn + an + bm = (a + b).(m + n)$

II.4.1.3 Tercer caso: TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

CUÁNDO SE APLICA: Cuando en un polinomio que está formado por tres términos, reconocemos que dos de ellos son cuadrados perfectos y el otro término es igual al doble producto de las bases de los cuadrados antes identificados.



Característica: Se trata de un polinomio de tres términos, con dos cuadrados perfectos y el tercero es el doble producto de las bases de los cuadrados.

CÓMO se aplica: Se **SUMAN o RESTAN** las bases de los cuadrados perfectos y luego se las eleva al cuadrado. Se sumarán o restarán dependiendo de los signos de cada uno de los términos, suele indicarse que si el doble producto es negativo uno de las bases es negativa y se opta por indicar una resta.

En forma simbólica:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

- ✓ Reconocemos que a^2 y b^2 son dos cuadrados perfectos, cuyas bases son **a** y **b**
- ✓ Su doble producto es: $2.(a\,b) = 2ab$ que es el término restante.
- ✓ Con esto sabemos que $a^2 + 2ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.
- ✓ El polinomio factorizado resulta: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Ejemplo Resuelto:

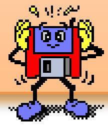
$$R(x) = 25x^2 - 30x + 9$$

- ✓ Reconocemos que $25x^2$ y 9 son dos cuadrados perfectos, cuyas bases son **5x** y **3**.
- ✓ Su doble producto es: $2.(5x.3) = 30x$ que es el término restante.
- ✓ Con esto sabemos que **R(x)** es un **trinomio cuadrado perfecto**.
- ✓ Observe que el término que no es cuadrado perfecto **está restando**, entonces el polinomio

$$25x^2 - 30x + 9 \text{ factorizado es: } R(x) = (5x - 3)^2$$

II.4.1.4 Cuarto caso: CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

CUÁNDO SE APLICA: cuando en un polinomio que está formado por cuatro términos, identificamos que dos de ellos son cubos perfectos, un tercer término es el triple del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo, y el cuarto término es el triple de la base del primer cubo por el cuadrado de la base del segundo cubo.



Característica: Polinomio de cuatro términos, dos cubos perfectos y los otros dos son triples productos de las potencias lineal y cuadrática de las bases de los cubos.

CÓMO se aplica: se eleva al cubo la suma de las bases halladas con sus respectivos signos.

En forma simbólica:

- ✓ En el polinomio $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ (cuatrinomio) identificamos que a^3 y b^3 son cubos perfectos cuyas bases son **a** y **b** formamos los triples productos:

  $$3.(a)^2.(b) = 3a^2 b \quad \text{y}$$

  $$3.(a).(b)^2 = 3ab^2$$

- ✓ Con esto verificamos que $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ es un cuatrinomio cubo perfecto.
- ✓ En el polinomio anterior las bases son **a** y **b**
- ✓ Resulta: $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = (a+b)^3$

Ejemplo Resuelto:

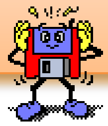
- ✓ En el polinomio $\mathbf{S(x) = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1}$ (cuatrinomio)
- ✓ Identificamos que $\mathbf{27x^3}$ y $\mathbf{-1}$ son cubos perfectos
- ✓ Cuyas bases son $\mathbf{3x}$ y $\mathbf{-1}$
- ✓ Formamos los triples productos:

$$3.(3x)^2 . (-1) = -27x^2 \text{ y } 3.(3x).(-1)^2 = 9x$$

- ✓ Con esto verificamos que s(x) es un **cuatrinomio cubo perfecto**.
- ✓ En el polinomio anterior las bases son $\mathbf{3x}$ y $\mathbf{-1}$
- ✓ Entonces resulta: $\mathbf{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x - 1)^3}$

II.4.1.5 Quinto caso: DIFERENCIA DE CUADRADOS

CUÁNDO SE APLICA: cuando un polinomio está formado por dos términos que son cuadrados perfectos y se están restando.



CÓMO se aplica: se multiplica la suma de las bases de los cuadrados perfectos por la diferencia de las mismas.

En forma simbólica:

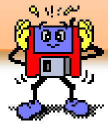
$$a^2 - b^2 =$$

- ✓ Identificamos que $\mathbf{a^2}$ y $\mathbf{b^2}$ son cuadrados perfectos que se están restando las bases son **a** y **b**.
- ✓ Entonces el polinomio factorizado es igual a:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

II.4.1.6 Sexto caso: DIVISIBILIDAD DE LA SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS DE IGUAL GRADO

CUÁNDO SE APLICA: cuando se tiene la suma o diferencia de dos potencias, ambas con el mismo grado.



Característica: Binomio de la diferencia de dos términos elevados a la misma potencia, ésta puede ser par o impar.

CÓMO se aplica: se divide por la suma o diferencia de las bases de las potencias, según los exponentes sean pares o impares. Se busca que esa división además de ser posible sea exacta, luego se aplica la definición de división, escribiendo el dividendo igual al producto entre el cociente y el divisor.

Las situaciones que se pueden presentar, teniendo en cuenta la divisibilidad de las expresiones usadas, son las siguientes:

- ✓ **$(a^m + b^m)$: $(a + b)$** es factible sólo si el exponente ***m*** es **IMPAR**
- ✓ **$(a^m + b^m)$: $(a - b)$** esta división no es **NUNCA** posible sin importar la paridad de sus exponentes.
- ✓ **$(a^m - b^m)$: $(a + b)$** es una división exacta sólo si el exponente ***m*** es **PAR**
- ✓ **$(a^m - b^m)$: $(a - b)$** esta división es **SIEMPRE** posible, sea ***m*** PAR o IMPAR

Ejemplos para clarificar este caso de Divisibilidad:

+ : + **CUANDO EL EXPONENTE ES IMPAR**

$(a^3 + b^3):(a + b) = a^2 - ab + b^2$ → luego el dividendo se puede expresar

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

+ : - **NUNCA, SEA PAR O IMPAR EL EXPONENTE**

- : + CUANDO EL EXPONENTE ES PAR

i) $(a^2 - b^2):(a+b) = a - b$ $\rightarrow$ luego el dividendo se escribe como

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

ii) $(a^4 - b^4):(a+b) = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ $\rightarrow$ así el dividendo se expresa

$(a^4 - b^4) = (a+b)\,.(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$

- : - SIEMPRE, SEA PAR O IMPAR EL EXPONENTE

i) $(a^3 - b^3):(a-b) = a^2 + ab + b^2$ $\rightarrow$ luego el dividendo se escribe

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ii) $(a^4 - b^4):(a-b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ $\rightarrow$ de este modo el dividendo queda

$(a^4 - b^4) = (a-b).(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

***Ejemplo resuelto* para cuando se tiene la suma de dos cubos que se puede dividir por la suma:**

Se sabe que: $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$

Y que como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, se tendrá:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Entonces como regla Nº 1: se puede decir que la suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1. la suma de sus raíces cúbicas
2. el cuadrado de la primera base, menos el producto de las dos bases, más el cuadrado de la segunda base.

Por otra parte se sabe que: $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$

Y que como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Entonces como regla Nº 2: se puede decir que la diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1. la diferencia de sus raíces cúbicas (entendiendo que $\sqrt[3]{a^3} = a$ leyéndose como *raíz cúbica*).
2. el cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz

Ejercicios resueltos

Factorice los binomios dados en los siguientes ejercicios:

1) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$

$x^3 + 3^3 = (x + 3). (x^2 – x\ 3 + 3^2)$

$= (x + 3). (x^2 – 3x + 3^2)$

2) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$

$x^3 - 3^3 = (x - 3). (x^2 + x\ 3 + 3^2)$

$= (x - 3). (x^2 + 3x + 3^2)$

El cuadro **Casos de Factoreo** que sigue, le permitirá recordar los distintos casos estudiados:

Casos	Características	Forma simbólica
Factor común	Polinomio de cualquier número de términos.	$a\,p + b\,p = p\,(a + b)$
Factor común por grupo	Polinomio con número par de términos	$am + bn + an + bm = (am + bm) + (bn + an) = m(a + b) + n(a+b) = (a + b).(m + n)$
Trinomio cuadrado perfecto	Polinomio de tres términos, con dos cuadrados perfectos y el tercero es el doble producto de las bases de los cuadrados	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Cuatrinomio cubo perfecto	Polinomio de cuatro términos, dos cubos perfectos y los otros dos son triples productos de las potencias lineal y cuadrática de las bases de los cubos	$a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = (a + b)^3$
Diferencia de cuadrados	Polinomio de la diferencia de dos términos cuadrados perfectos	$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$
Divisibilidad	Binomio como suma o diferencia de potencias de igual grado, divisible por la suma o diferencia de las bases	$(a^m + b^m):(a + b)$ si m es IMPAR $(a^m + b^m) : (a - b)$ NUNCA $(a^m - b^m) :(a + b)$ si m es PAR $(a^m - b^m) : (a - b)$ SIEMPRE

Responda

- ¿Cuándo un polinomio se dice primo o irreducible?
- ¿Se podrá factorizar el siguiente polinomio *3x -5*?
- ¿Es posible factorizar un polinomio de cinco términos, aplicando factor común?
- ¿Hablar de cuadrado de la diferencia de dos números, es lo mismo que decir diferencia de dos cuadrados? ¿por qué?

Ejercicios

- Factorice, aplicando en cada caso la regla apropiada:

$a).\ \frac{9}{2}x^5 - 6x^4 + 3x^2$

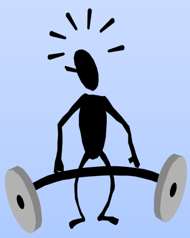
$b).\ x^3 + x^2 - 25x - 25$

$c).\ -\frac{81}{4} + x^2$

$d)\ -x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}$

$e).\ x + x^2 + \frac{1}{4}$

$f).\ -9 - x^4 - 6x^2$



II.5 Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Para operar con expresiones algebraicas fraccionarias se debe tener presente lo estudiado para operar con números racionales o reales.

Se exigen las mismas condiciones operativas, pero trasladadas a las expresiones algebraicas.

Una fracción está reducida a su mínima expresión, cuando el numerador y el denominador son primos entre sí, es decir, no tienen factores comunes.

Para encarar una suma o resta de expresiones algebraicas fraccionarias, habrá que recordar cómo se determina el mínimo común múltiplo (*mcm*) y el máximo común divisor (*mcd*) de dos o más expresiones algebraicas.

Recordemos:

II.5.1 Máximo Común Divisor de dos o más expresiones algebraicas

El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es aquel **divisor** de todas las expresiones algebraicas que tiene mayor coeficiente numérico y mayor grado.

El máximo común divisor se obtiene al escribir la expresión algebraica que tiene por coeficiente el máximo común divisor de los coeficientes y por parte literal, la parte literal de las que son comunes con el menor exponente.

Ejemplos:

El máximo común divisor de $6x^2$ y de $15xy^4$ es 3x, porque el máximo común divisor de 6 y de 15 es 3, y *x* aparece en los dos monomios y su menor exponente es 1.

II.5.2 Mínimo Común Múltiplo de dos o más expresiones algebraicas

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es aquel múltiplo que tiene el menor coeficiente numérico, el menor grado y es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

Ejemplos:

El mínimo común múltiplo de $4a$ y $6a^2$ es $12a^2$, porque $12a^2$ es divisible exactamente por $4a$ y $6a^2$.

El m.c.m. de $2\,x^2$, $6\,x^3$ y $9\,x^4$ es $18\,x^4$

Responda

- ✓ Dados dos polinomios determinar el *mcm* de ellos, es encontrar otro polinomio de grado mínimo que…………………………………………………….……
- ✓ Se denomina *mcd* de dos polinomios, al polinomio de grado máximo que...……………………………………………………………………………………….....
- ✓ En el *mcm* se toman los factores…………………………………………………..
- ✓ En el *mcd* se toman los factores……………………………………………………

El siguiente **video** le guiará en forma pausada a resolver una suma de fracciones algebraicas:

Suma y Resta de Fracciones Algebraicas Heterogéneas

(t 15:19)

Ejercicios

1. Trabaje las sumas algebraicas siguientes y obtenga una expresión menor o reducida:

$$a).\quad \frac{4}{5a^2}+\frac{3}{2a}-\frac{3}{10a^3}$$

$$b).\quad \frac{x+1}{b^2}-\frac{x-1}{b}+\frac{x}{b}$$

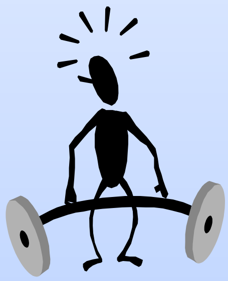
$$c).\quad \frac{5}{1+x}-\frac{12}{1-x^2}$$

$$d).\quad \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a-1}{b-a}+\frac{b+1}{a+b}$$

$$e).\quad \frac{(x+3a)^2}{6ax}-2$$

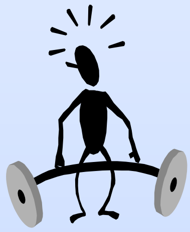
$$f).\quad \frac{a^2+2ax-x^2}{a+x}+x-a$$

$$g).\quad 3x-\frac{1-x^2}{x-2}+5$$



Ejercicios

2. Efectúe las reducciones posibles y luego opere para obtener una mínima expresión:



$a).\quad \dfrac{x+a}{x-a}\cdot\dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x+a}{x^2-2ax+a^2}$

$b).\quad \dfrac{4a^2}{2x-4}\cdot\dfrac{3x-6}{6a^3}$

$c).\quad \left(\dfrac{9a^2}{b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{6a}{3a-b}-2\right)\cdot\dfrac{b}{3a+b}$

$d).\quad \dfrac{x-\dfrac{4}{x}}{\dfrac{x+2}{x}}=$; $e).\quad \dfrac{1-\dfrac{b}{a+b}}{1+\dfrac{b}{a-b}}=$; $f).\quad \dfrac{\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}}{\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}}=$

3. Escriba la fórmula que indique el área total de la superficie de una caja rectangular de largo *a*, ancho *b* y altura *c*.

4. Calcule el volumen de un cono ($V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$) sabiendo que su altura es de 2dm y su base tiene radio de 24cm. Considere el número irracional con dos cifras decimales.

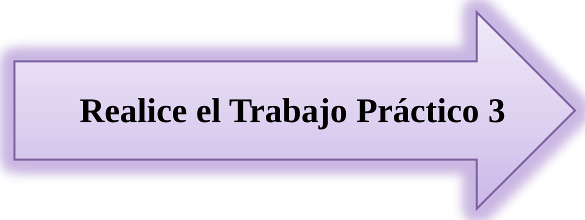
5. Suponga que *x* es la cantidad de miles de unidades vendidas de un cierto producto y la ganancia obtenida es G(*x*) = $30x^2 + 24x$, ¿puede indicar la expresión de la ganancia en forma factorizada?

6. Dados los siguientes polinomios, resuelva las operaciones indicadas en cada apartado: A(*w*) = $-5w^2 + 7w - 8w^4 - 9$; B(*w*) = $-13w^4 + 6w^3 + 10w - 7w^2$; C(*w*) = $8 - 4w^3 + 12w + 16w^4$

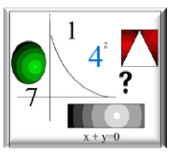
a) A + B – C ; b) A – B + C ; c) B + C – A

Trabajo Práctico 3

Clic aquí



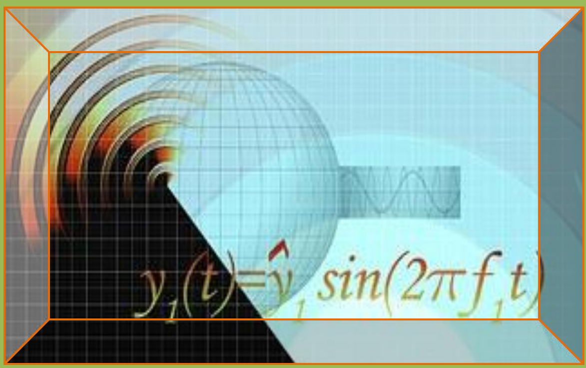
Autoevaluación 2



Clic aquí

CAPÍTULO III:

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



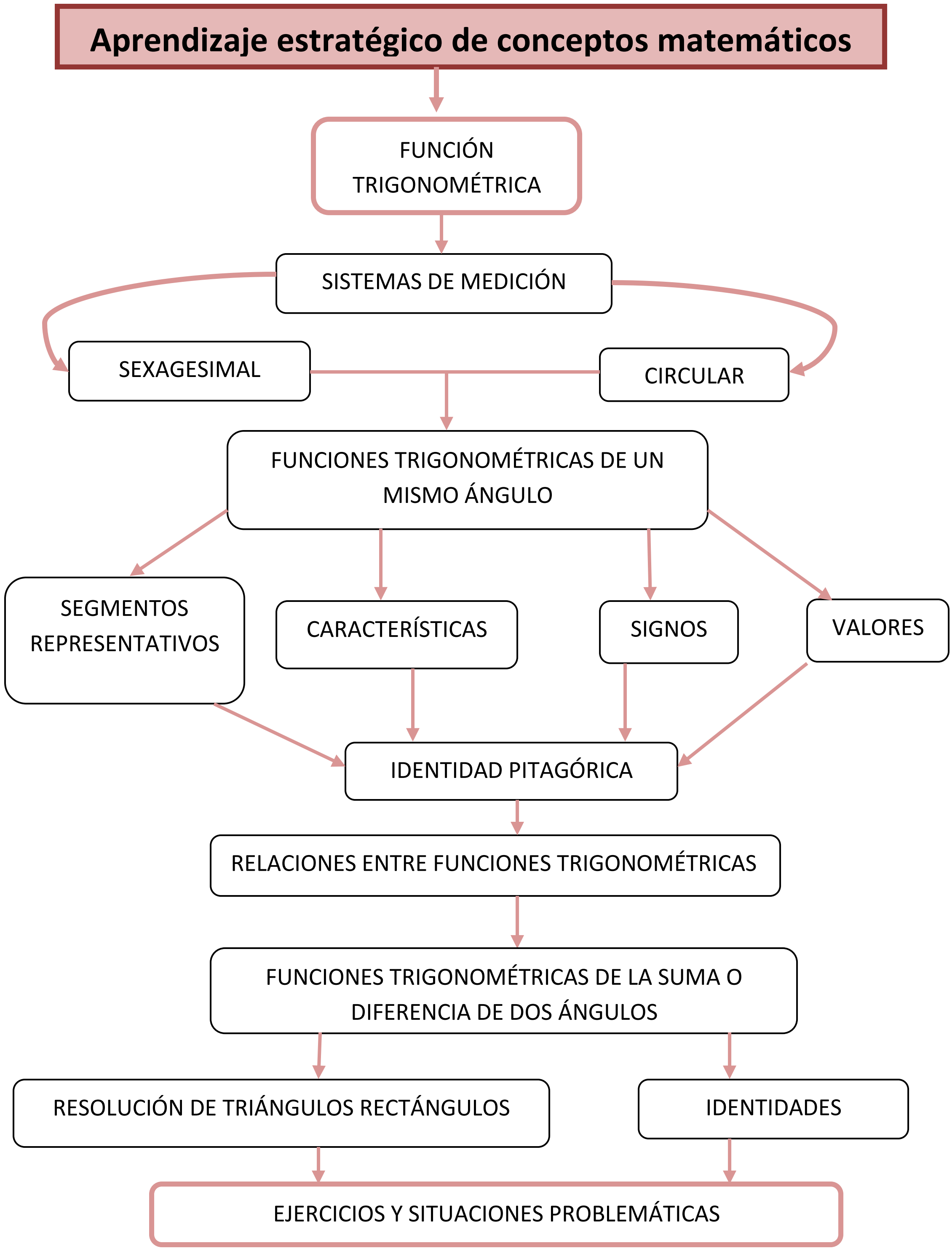
Autores:

- Especialista Lic. Graciela Inés CARRANZA
- Ing. Adriana Mabel LEZANA
- Ing. Raúl Eduardo LEIVA
- Prof. Martha Noemí SECO
- C.P.N. Rosa Margarita RODRÍGUEZ

Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

CAPÍTULO III: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

ESQUEMA CONCEPTUAL



OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Al finalizar el capítulo el alumno deberá estar en condiciones de:

- ✓ Identificar los segmentos representativos de las funciones trigonométricas, reconociendo sus valores y signos en los diferentes cuadrantes.
- ✓ Definir las funciones trigonométricas a partir del triángulo rectángulo.
- ✓ Adquirir habilidad para reconocer y resolver situaciones problemáticas aplicando las funciones trigonométricas.
- ✓ Resolver triángulos rectángulos con funciones trigonométricas.
- ✓ Seleccionar y relacionar correctamente las funciones trigonométricas
- ✓ Resolver analíticamente ecuaciones e identidades trigonométricas.

CONTENIDOS

- ✓ Introducción
- ✓ Ángulos
- ✓ Sistemas de medición angular
- ✓ Funciones trigonométricas de un ángulo agudo
- ✓ Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera
- ✓ Segmentos representativos de las funciones trigonométricas
- ✓ Características y gráficas de las funciones trigonométricas
- ✓ Signos de las funciones trigonométricas
- ✓ Identidad Pitagórica
- ✓ Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables
- ✓ Funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos
- ✓ Fórmulas: relaciones entre las funciones trigonométricas

Sólo existen dos días en el año en que no se puede hacer nada. Uno se llama ayer y el otro mañana. Por lo tanto hoy es el día ideal para amar, crecer, hacer y principalmente vivir.

Dalai Lama

III.1 Introducción

La trigonometría surgió por necesidades de la astronomía, pues se requería que la misma se tornara en una ciencia más exacta, en base a mediciones y tal que permitiera efectuar predicciones con mejor precisión. Esta apoyatura a la astronomía generó el nacimiento de la trigonometría, iniciándose con los trabajos de Hiparco griego del siglo II a. de C. y continuando con Menelao (siglo I d de C) y Tolomeo (siglo II d. de C.) con quien la astronomía alcanza un logro importante. Claudio Tolomeo vivió en Alejandría alrededor del 150 d. de C. En su principal obra, considerada la más grande y por ella denominada Almagesto (árabe), desarrolló modelos astronómicos geocéntricos y también las herramientas matemáticas que además de la geometría elemental incluyen la trigonometría.

La trigonometría estudia principalmente la relación entre lados y ángulos de un triángulo, nutriéndose de elementos de la aritmética, álgebra y geometría. Etimológicamente trigonometría significa *medida de triángulos*. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana y la trigonometría esférica. Sin embargo es la trigonometría esférica la que se desarrolla antes que la plana, seguramente las necesidades de aplicación en la esfera para mediciones astronómicas y de navegación sean las causas de este orden de desarrollo.

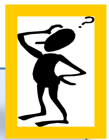
Se considera que la trigonometría alcanza su punto más alto con la aparición de las series de Fourier (principios siglo XIX), uniéndola estrechamente al análisis.

Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el flujo de corriente alterna.

III.2 Ángulos

Si en el sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales, se dibuja un ángulo del primer cuadrante, de tal manera que se considera engendrado por la rotación de la semirrecta positiva OA (siendo A un punto del eje *x*), alrededor del origen de coordenadas en sentido contrario al de las agujas del reloj y hasta una posición dada por la semirrecta OM, el ángulo dibujado se dice que es positivo y dirigido. Dibuje esta situación.

Los ángulos así generados, pueden derivar en la formación de ángulos de más de un giro, cuando el lado OA del ángulo efectúa uno o más giros –en sentido positivo o negativo- hasta volver a ubicarse en la posición OM. La posición de estos ángulos es coincidente, variando la amplitud de ellos según los giros dados, por lo que se consideran como ángulos congruentes respecto al número de giros efectuado.



Responda

- ¿Cómo expresaría un ángulo negativo? Dibuje dos ángulos negativos.
- Si el ángulo de 32° es congruente con el de 392° y con el de 752°, cuál es la diferencia en giros que observa?

III.2.1 Sistemas de medición angular

Para medir una cantidad es preciso elegir otra cantidad homogénea con ella, eligiéndola como unidad.

Como los ángulos son cantidades, para medirlos se toma a uno cualquiera de ellos como unidad y se denomina medida del ángulo a la razón entre ese ángulo y la unidad elegida. En la práctica suelen usarse distintas unidades para trabajar con los ángulos, así distinguimos el grado sexagesimal, el grado centesimal y el radián, que corresponden a diferentes sistemas angulares. De esos sistemas se trabajará con mayor frecuencia dos de ellos: el sistema sexagesimal y el sistema circular.

Sistema sexagesimal: en este sistema se llama ángulo de un grado sexagesimal a la noventa ava parte de un ángulo recto y se denota por 1°: $\frac{1R}{90} = 1^{\circ}$ siendo R un ángulo recto $\Rightarrow$ **1R = 90°**

El grado sexagesimal admite como submúltiplos el minuto y el segundo sexagesimales; siendo el minuto la sesenta ava parte del grado, y el segundo la sesenta ava parte del minuto, simbólicamente se expresa:

$$\frac{1^{\circ}}{60} = 1' \quad \Rightarrow \quad 1^{\circ} = 60'$$

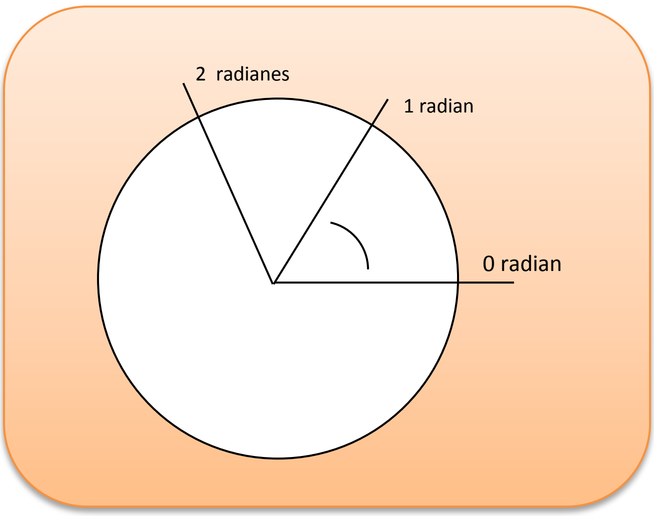
$$\frac{1'}{60} = 1'' \quad \Rightarrow \quad 1' = 60''$$

Sistema circular: en este sistema circular se adopta como unidad una unidad de arco que es el **radián**, y se define como el arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia a que pertenece.

Para recordar

En el sistema circular la medida de un ángulo α es igual al arco que abarca dividido en el radio $\alpha = \frac{arco}{radio}$

El ángulo central que abarca el arco de un radián se llama **ángulo de un radián**.



Si se tiene en cuenta que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, siendo r el radio de la circunferencia, resulta que esta longitud expresada en radianes, es igual a 2π ya que su radio es igual a un radián. Por ello el ángulo de un giro, o sea de 360° se corresponde con 2π ángulos de un radián.

Responda

- Si se adopta como unidad al ángulo de un radián cuáles serían las medidas de los ángulos de 1 giro, 2 giros , ½ giro, ¾ giro y ¼ giro?

Ejercicios

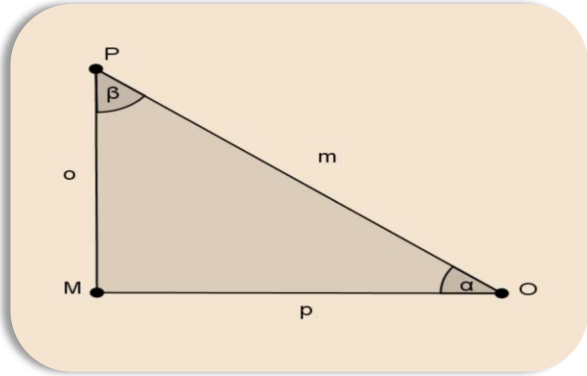
1. Escriba las correspondencias que se establecen entre las medidas de los ángulos notables (0°,30°,45°,60°,90°) del sistema sexagesimal y del sistema circular. Para que el tema se entienda mejor proponga a su compañero dos medidas angulares en el sistema que desee y pídale que las exprese en el otro sistema.
2. Exprese en el sistema sexagesimal, los ángulos de 3 radianes y de 1,6 radianes.
3. ¿Cuál es la medida en grados de los ángulos siguientes: $\pi/3$, $3\pi/2$, $\pi/6$?
4. Si considera un reloj de cuadrante circular, ¿cuál es la medida en radianes del ángulo que forman las agujas, si éstas anuncian las 12:05 hs. y cuál si marcan las 12:20 hs?

III.3 Funciones Trigonométricas de un ángulo agudo

Las funciones trigonométricas a estudiar constituyen un caso particular de las funciones goniométricas, que son aquellas que tratan funciones que dependen de un ángulo, es decir, su variable independiente es un ángulo.

De esta manera, en trigonometría se trabajará con las funciones goniométricas que dependen de los ángulos de un triángulo rectángulo, se definen como cocientes entre sus lados, y se denominan **funciones trigonométricas**.

Dado el triángulo OMP, rectángulo en M, sus catetos lo conforman los lados OM y MP, siendo el restante OP, la hipotenusa.



Las funciones trigonométricas se definen en función de alguno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

En el triángulo rectángulo OMP se define el seno de un ángulo agudo, como el valor obtenido al dividir la **longitud del cateto opuesto al ángulo entre la longitud de la hipotenusa:**

sen α = cat.op. / hip = MP/OP

El coseno de un ángulo agudo, se define como el valor obtenido al dividir **la longitud del cateto adyacente al ángulo entre la longitud de la hipotenusa:**

cos α = cat. ady. / hip. = OM/OP

Se define como tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo al valor del cociente obtenido al dividir **la longitud del cateto opuesto entre la longitud del cateto adyacente:**

tg α = cat. op. / cat. ady = MP/OM

Si se modifica sólo la longitud de un cateto también cambian el otro cateto y la hipotenusa, sin embargo el ángulo α no cambia y los cocientes anteriores, en donde las funciones se han calculado en función del ángulo α, tampoco.

Se definen además, otras tres funciones:

sec α **= hip. / cat. ady. = OP/OM**

cosec α **= hip. / cat. op. = OP/MP**

cotg α **= cat. ady. / cat. op.= OM/MP**

Si se observan las razones que las representan, se ve que las mismas guardan las siguientes relaciones:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad ; \quad cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \quad ; \quad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Estas funciones así expresadas representan las denominadas funciones recíprocas, que es importante recordarlas.

Responda

- Investigue ¿cuáles son los cocientes correspondientes a las funciones trigonométricas del otro ángulo agudo (β) en el triángulo OMP anterior? Trabaje principalmente para las tres primeras funciones seno, coseno y tangente.
- Si en un triángulo rectángulo, se manejan datos relativos a sus lados y sus ángulos, puede explicar ¿cómo se calcularía alguno de esos datos si fuera desconocido? ¿Cuáles son los datos mínimos que debería conocer, en ese caso, para determinar los otros datos o alguno de ellos?

Para aclarar cómo se obtienen las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, en un triángulo rectángulo, vea el siguiente **video**:

Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo
(t 14:07)

Ejercicios

1. Si una persona ubicada a 50 metros de una antena receptora de ondas para celulares, observa la punta de la misma con un ángulo de elevación (éste se forma con respecto a la horizontal) de 30°. ¿Cómo determina la altura de la misma? Ayúdese con un dibujo.
2. Si sabe que la función *cos* $\alpha = 0{,}8$ ¿puede determinar el valor del argumento? Investigue sobre la relación inversa y cómo manejarla desde la calculadora.

III.4 Funciones Trigonométricas de un ángulo cualquiera

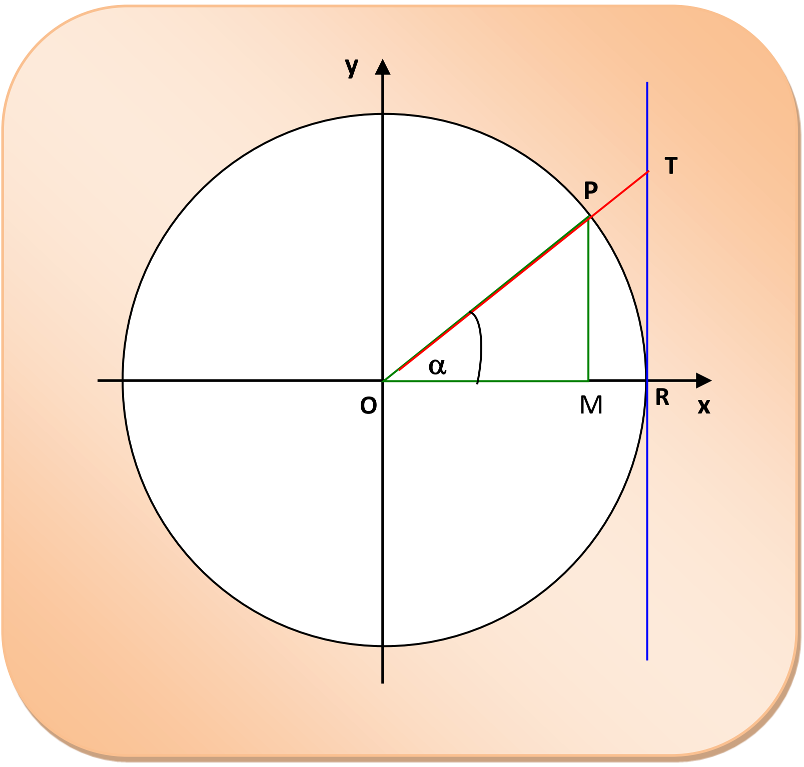
Se considerará la ***circunferencia trigonométrica*** (***de radio uno***), cuyo centro coincide con el origen de coordenadas del sistema cartesiano.

Cualquier punto de la circunferencia dista 1 de su centro y por lo tanto del origen de coordenadas.

En este caso la circunferencia queda dividida en cuatro partes iguales de 90° ($\pi/2$ rad.) cada una, que van desde 0° hasta 360° (2π), a las que se denominan cuadrantes:

Para estudiar las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera α, tomado en el primer cuadrante del sistema, cuyo vértice es el origen de coordenadas y uno de sus lados se ubica sobre el semieje OX positivo, se debe trabajar con el triángulo rectángulo que resulta OMP. En el mismo se denomina abscisa al lado sobre el semieje *x*, ordenada al lado paralelo al eje *y*, y radio vector a la hipotenusa del triángulo. De esta manera, se pueden expresar las funciones antes definidas en relación a esta nueva posición del triángulo rectángulo, a saber:

III.4.1 Segmentos representativos de las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente



En el triángulo OMP rectángulo y de acuerdo a lo visto anteriormente se observa que: sen α = cat.op./ hip = ord./ rad.v = PM /OP y como OP = 1 por ser radio de la circunferencia trigonométrica, entonces:

sen α **= PM**

De igual forma *cos* α = cat. ady. / hip. =abs./ rad.v = OM/OP y como ya se dijo OP = 1, por ello:

cos α **= OM**

Para determinar el segmento representativo de la función tangente de α, se trabaja en el triángulo rectángulo ORT: *tg* α = cat. op. / cat. ady = ord./ abs. = RT/ OR , en este caso se observa que el segmento OR coincide con el radio de la circunferencia, tomando el valor uno, así la función:

tg α **= RT**

Teniendo en cuenta los segmentos representativos de las funciones en la circunferencia trigonométrica para el primer cuadrante, dibuje los segmentos representativos de dichas funciones en los otros cuadrantes.

III.4.1.1 Características de la función seno

El dominio de la función ***y = sen*** α es el conjunto de los números reales, es decir, el intervalo $(-\infty ;\infty)$. Dicha función toma valores en el intervalo [-1,1], es decir, su codominio o recorrido es el intervalo [-1,1].

El valor del seno del ángulo α es el mismo para ángulos que se diferencian en *n* veces 360° $\cong 2\pi$, siendo *n* un número entero, es decir

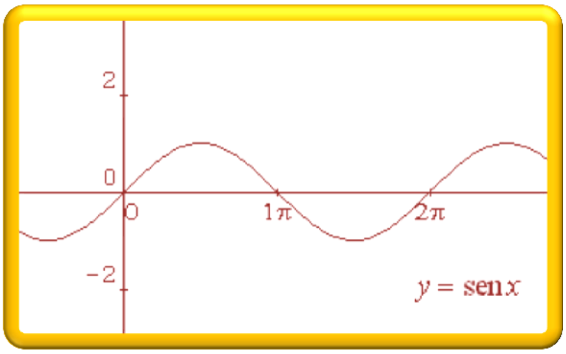
sen α ***= sen*** **(**α ***+ n·360°*****)**; por ello se dice que la función ***y = sen*** α es una función periódica, pues sus imágenes se repiten cada cierto intervalo de valores *x*, en este caso el **periodo es** 2π**.**

La función es positiva en el intervalo $(0; \pi)$ y negativa en el intervalo $(\pi ; 2\pi)$.

En la naturaleza se encuentran fenómenos cíclicos, es decir que se repiten en forma periódica, como las fases lunares, el pulso de una persona, los latidos del corazón, el voltaje de una corriente alterna. Si estos se quieren representar mediante una función ésta será una función periódica. Los fenómenos que pueden representarse por medio de una función periódica, pueden ser estudiados mediante funciones trigonométricas.

Se puede ver el comportamiento de la función seno, en la siguiente gráfica.

III.4.1.2 Gráfica de la función seno (considere x = α)



III.4.1.3 Características de la función coseno

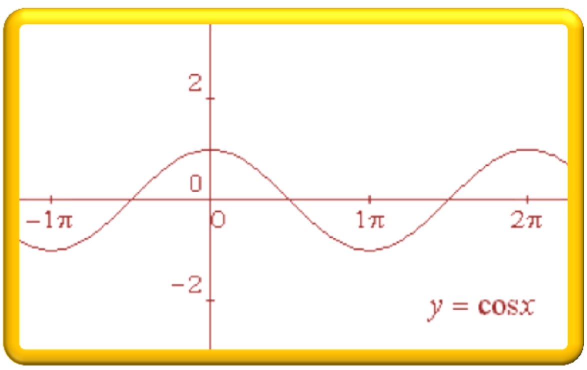
El dominio de la función ***y = cos α*** es el conjunto de los números reales, es decir, el intervalo (-∞ ;∞). Dicha función toma valores en el intervalo [-1,1], es decir, su codominio o recorrido es el intervalo [-1,1].

El valor del coseno del ángulo α es el mismo para ángulos que se diferencian en *n* veces 360° ≅ 2π, siendo *n* un número entero, es decir

***cos α = cos*(α*+n·360°*)**; por ello se dice que la función *y = cos α* es una **función periódica de periodo 2π.**

La función es positiva en el intervalo (-π/2 ; π/2) y negativa en el intervalo (π/2 ; 3π/2).

III.4.1.4 Gráfica de la función coseno (considere x = α)



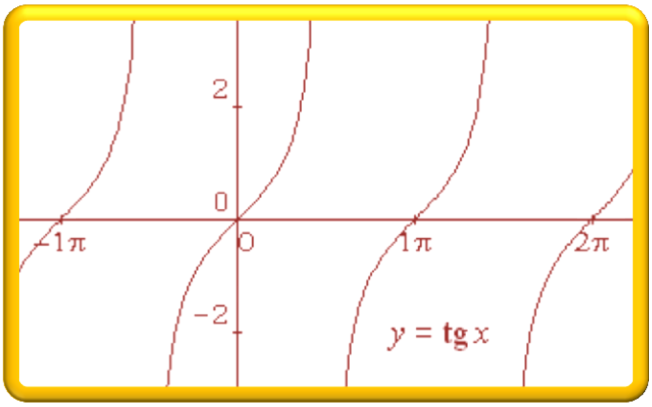
III.4.1.5 Característica de la función tangente

El dominio de la función ***y = tg*** $\boldsymbol{\alpha}$ es el conjunto de los números reales, salvo para los valores $\pi/2$ y $3\pi/2$ en donde la función no está definida. Esta función toma valores (codominio) en el intervalo $(-\infty; \infty)$, es decir, su recorrido son todos los números reales.

El valor de la tangente es el mismo para ángulos que se diferencian en un valor *n* veces $180° \cong \pi$, siendo *n* entero, es decir $tg\ \alpha = tg\ (\alpha + n \cdot 180°)$; por ello se dice que función $y = tg\ \alpha$ es una **función periódica de periodo π.**

La función tangente es positiva en los intervalos $(0 ; \pi/2)$ y $(\pi ; 3\pi/2)$ y negativa en los intervalos $(\pi/2 ; \pi)$ y $(3\pi/2 ; 2\pi)$.

III.4.1.6 Gráfica de la función tangente (considere x = α)



III.5 Signos de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

Recordando la representación de los segmentos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes, compruebe si los signos de la siguiente tabla responden a lo que observa del estudio realizado. Para ello debe tener presente que las funciones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas.

cuadrantes		sen - cosec		cos - sec		tg - cotg	
II	I	+	+	-	+	-	+
III	IV	-	-	-	+	+	-

Responda

- ¿Entre qué valores angulares se ubican los cuadrantes?
- ¿Cuáles de las tres funciones trigonométricas directas, tienen acotado su codominio?
- ¿En qué fracción del período de la función seno, la curva adquiere su punto más alto?
- ¿En qué fracción del período de la función coseno, la curva corta al eje *x*?
- Mencione alguno de los valores en radianes, en donde la función tangente no está definida.

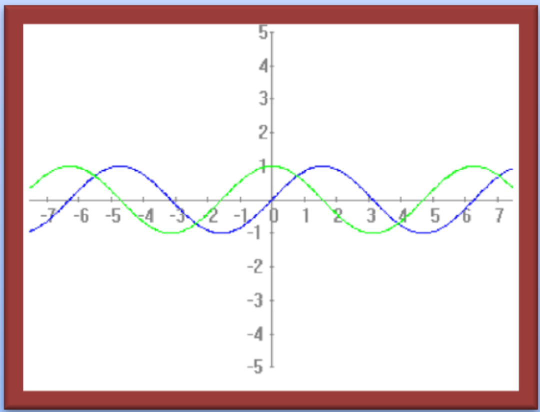
Ejercicios

1. ¿Para qué valores de α, la $cotg\ \alpha = 0$?

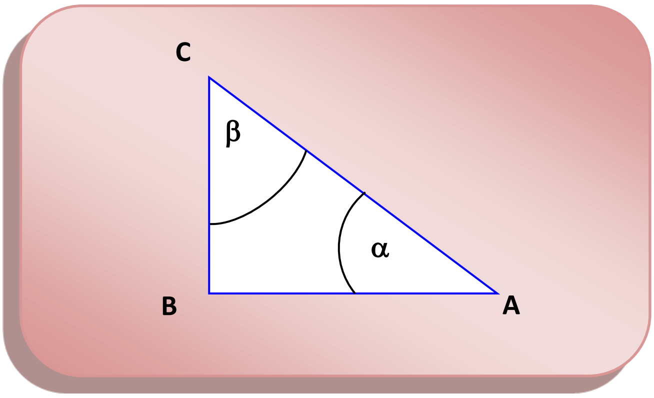
2. ¿Puede determinar el valor de $tg\ 3\pi/2$?

3. Encuentre tres valores de α, para los que se cumpla que $sen\ \alpha = 0$.

4. En la siguiente gráfica se han borrado las funciones correspondientes a cada trazo, no se hace distinción de los ejes, por lo que se pide que ayude a que el gráfico sea más explícito, para ello indique el recorrido y nombre de esas funciones y explique cuáles son las características que le permitieron identificarlas.



III.6 Identidad Pitagórica



Coloque las denominaciones *a*, *b* y *c* a los lados del triángulo BC, AC y AB respectivamente.

Si en el triángulo rectángulo ABC, se determina la razón de las funciones trigonométricas seno y coseno para el ángulo α, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = BC/AC = a/b \Rightarrow sen^2\ \alpha = (sen\ \alpha)^2 = BC^2/AC^2 = a^2/b^2 \\ \cos\ \alpha = AB/AC = c/b \Rightarrow \cos^2\ \alpha = (\cos\ \alpha)^2 = AB^2/AC^2 = c^2/b^2 \end{array}\right\} \text{I}$$

Además, se puede aplicar el teorema de Pitágoras para relacionar los lados del triángulo $b^2 = a^2 + c^2$, si se divide miembro a miembro por b^2, queda

$1 = a^2 / b^2 + c^2 / b^2$ y si se tiene en cuenta las relaciones encontradas en **I,** reemplazando, se puede escribir:

$$1 = sen^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha \qquad \text{II}$$

Igualdad que se cumple para todo valor del ángulo, por lo que se denomina una identidad. De ella se deducen las fórmulas que permiten calcular una de las funciones trigonométricas en función de la otra; trabaje la misma a los efectos señalados.

Otra identidad de uso frecuente es $tg\ \alpha = a/c$, si en el segundo miembro se divide, numerador y denominador por *b*, y luego se tiene en cuenta la relación I, así se obtiene

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{III}$$

Como la función recíproca de esta función es la cotangente, se puede escribir

$$\boldsymbol{cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} \quad \Rightarrow \quad cotg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}}$$

También se puede expresar que

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{1}{cotg\ \alpha} \quad \Rightarrow \quad tg\ \alpha\,.\,cotg\ \alpha = 1}$$

Se propone un espacio de distensión mediante el siguiente **video**:
[El mejor profesor de Matemática] (t 2:11)

III.7 Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables

Se consideran como notable los ángulos de 0°, 30°, 45°, 60° y 90°, por lo que interesa determinar los valores que toman las funciones trigonométricas directas, cuando están expresadas en función de ellos. La justificación de los valores que se obtienen, tienen su fundamento en el trabajo de análisis de triángulos rectángulos. Estas demostraciones y sus respectivas justificaciones las puede leer y estudiar en el documento que encontrará haciendo **clic** en el siguiente:

Relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos (link)

En base a los conceptos incorporados en el documento de referencia, complete la tabla que se ofrece a continuación y luego realice la ejercitación solicitada:

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sen		1/2			1
cos			$\sqrt{2}/_2$	1/2	
tg	0				

Ejercicios

1. De la relación II de páginas anteriores, escriba una expresión que permita calcular una de las funciones trigonométricas en función de la otra.
2. Demuestre que las siguientes igualdades son ciertas:

   a) $\sec^2\delta = 1 + tg^2\delta$, **b)** $cosec^2\theta - 1 = cotg^2\theta$

   c) $1 + sen\ \alpha\ .tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha + cotg\ \alpha}{cotg\ \alpha}$, **d)** $\frac{tg\ \alpha + 1}{1 - tg\ \alpha} = \frac{1 + cotg\ \alpha}{cotg\ \alpha - 1}$

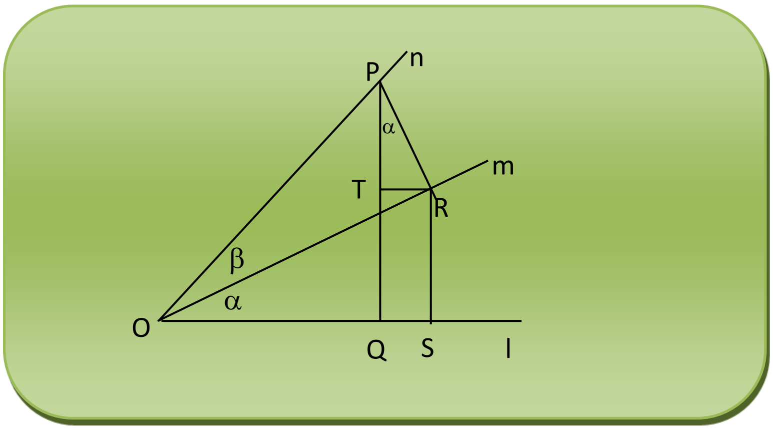
   e) $(sen\ \alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - sen\ \alpha)^2 = 2$
3. Dibuje un triángulo rectángulo y compare las funciones trigonométricas de los ángulos complementarios ($\alpha + \beta = 90°$), ¿qué puede concluir?
4. En la circunferencia trigonométrica dibuje un ángulo α en el primer cuadrante y el ángulo $-\alpha$ del cuarto cuadrante. Estudie los triángulos formados e indique las relaciones entre las funciones trigonométricas de dichos ángulos.
5. ¿Cuáles son las relaciones entre las funciones trigonométricas del ángulo ω del primer cuadrante con uno del segundo cuadrante de la forma $(180° - \omega)$?
6. 6. ¿Si $cos\ \beta = -0{,}2$ se podrá decir que $cos\ (-\beta) = 0{,}2$?
7. Siendo $\cos\alpha = -0{,}5$, determine el valor de las funciones seno y tangente
8. Calcule el valor de la variable *x* en:

   $\boldsymbol{a})\ x = \frac{(1 - sen\ 45°) + 2\ .\ cos\ 45°}{\cos 60°}$, $\boldsymbol{b})\ x = \frac{sen\ 30° - sen\ 60°}{sen\ 30° + \cos 60°} - \frac{1}{2}$

III.8 Funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos

A continuación se procederá a determinar las expresiones que permiten calcular funciones trigonométricas que están en función de la suma o diferencia de dos o más ángulos.

Para ello se considera la siguiente construcción geométrica, en la que se observa la suma de dos ángulos α y β.



Se toma un punto cualquiera (P) del lado terminal del ángulo β y a partir de él se trazan rectas perpendiculares a los otros lados de los ángulos, determinando los puntos R y Q. Desde el punto R se corta en forma perpendicular al segmento PQ en el punto T. Desde R se traza la perpendicular al lado inicial del ángulo α. Estos trazados muestran la conformación de los triángulos rectángulos: OQP, OSR, ORP y PTR, además del rectángulo TRSQ.

En el triángulo rectángulo OQP se cumple:

- ***sen* (α + β) = PQ/OP** , se expresa el numerador como suma de segmentos;
- ***sen* (α + β) = (QT + TP)/OP**, se distribuye y reemplaza QT por RS por ser lados opuestos de un paralelogramo;
- ***sen* (α + β) = RS/OP + TP/OP**, se multiplica y divide por una misma expresión en cada término;
- ***sen* (α + β) = RS/OR . OR/OP + PT/PR . PR/OP**, se consideran las funciones trigonométricas correspondientes;
- ***sen* (α + β) = sen α . cos β + *cos* ˆTPR . sen β**

Como el ángulo TPR tiene como complemento al ángulo PRT y éste es el complemento del ángulo TRO y éste, a su vez, es igual a α, por ser ángulos alternos internos entre paralelas, cortadas por una transversal, entonces se escribe que TPR = α , y la expresión anterior queda

$$\mathbf{sen}\,(\alpha+\beta) = \mathbf{sen}\,\alpha\,.\,\mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{cos}\,\alpha\,.\,\mathbf{sen}\,\beta$$

Para determinar las funciones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos **(α - β)**, se procede a expresar la misma como suma **(α + (-β))**. Se aplican luego, relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos opuestos y se llega a la expresión de (complete realizando las operaciones sugeridas):

sen (α - β) = ………………

Siguiendo un procedimiento similar, se realizan los pasos convenientes para obtener la expresión del coseno de la suma de dos ángulos:

- ***cos ($\alpha+\beta$) = OQ/OP***
- ***cos ($\alpha+\beta$) = (OS – SQ)/OP***
- ***cos ($\alpha+\beta$) = OS/OR . OR/OP - TR/PR . PR/OP***

$$\mathbf{cos}\,(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\,.\operatorname{sen}\beta$$

En forma similar y siguiendo lo sugerido para la función $sen\,(\alpha-\beta)$, obtenga el coseno de la diferencia de dos ángulos:

cos (α - β) = ……………………………………

Valiéndose de los resultados anteriores, con las expresiones del seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, se puede obtener la expresión de la tangente de la suma y diferencia de esos mismos ángulos.

A continuación se ofrece una fórmula, compruébela e intente obtener la otra.

$$\mathbf{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ .\ tg\,\beta}$$

tg (α - β) = ……………………………

Ejercicios

1. Determine la expresión que permite calcular el seno de 2α.
2. Siga un proceso similar para el coseno y la tangente de 2α.
3. Determine los valores de seno, coseno y tangente del ángulo 2α, sabiendo que *sen* $\alpha = 1/3$.
4. Encuentre los valores posibles del ángulo β, sabiendo que *sen* 2β = *sen* $38°$
5. Determine, si es posible, el valor de δ, si expresan que *cos* $\delta = 2{,}5$
6. ¿Es cierto que si el *cos* $\varphi = -0{,}9998$ entonces el coseno del ángulo opuesto es igual a 0,9998?
7. ¿Bajo qué ángulo se observa la punta de uno de los molinos para la obtención de energía eólica, ubicado en un campo de Alemania, siendo su altura de 120m y estando el observador situado a 160m de su base?

Ver cuadro de fórmulas en la siguiente página

RELACIONES ENTRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FÓRMULAS

1. $$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$
2. $$sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha$$
3. $$sen\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\alpha}$$
4. $$\cos\alpha = 1 - sen^2\,\alpha$$
5. $$\cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\,\alpha}$$
6. $$sen\,2\alpha = 2\,.\,sen\,\alpha\,.\cos\alpha$$
7. $$\cos 2\alpha = cos^2\,\alpha - \ sen^2 \ = 2\,cos^2\,\alpha - 1$$
8. $$sen\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
9. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
10. $$sen\alpha + sen\,\beta = 2\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
11. $$cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Trabajo Práctico 4

Clic aquí

Realice el Trabajo Práctico 4

Autoevaluación 3

Clic aquí

Controle sus ejercicios con la

Guía de Respuestas

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- **González, M. y Mancill, J.** (1965). *Álgebra Elemental Moderna – VI*. Ed. Kapelusz
- **Guzmán, M.; Colera, J. y Salvador, A.** (1988). *Matemáticas. Bachillerato 1, 2 y 3*. Ed, Anaya. España.
- **Lehmann, C.** (1994). *Álgebra.* Ed. Limusa. México.
- **Rees, P. y Sparks, F.** (1980). *Álgebra.* Ed. Reverte Mexicana SA. México.
- **Repetto, C.; Linskens, M. y Fesquet, H.** (1968). *Álgebra*. Ed. Kapelusz. Argentina.
- **Repetto, C. y Fesquet, H.** (1968). *Trigonometría y elementos de análisis matemático.* Ed. Kapelusz. Argentina.
- **Repetto, C. y Fesquet, H.** (1957). *Trigonometría plana y esférica.* Ed. Kapelusz. Argentina.
- **Sagastume Berra, A. y Fernández, G.** (1960). *Álgebra y Cálculo Numérico*. Ed. Kapelusz. Argentina.