PRINCIPIO DE MÍNIMA ARBITRARIEDAD

Recibido 06/03/98

Conrado Hoffmann

Unidad Ejecutora: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Universidad Nacional de Tucumán. República Argentina.

Palabras Claves: Estimación, Termodinámica Estadística, Arbitrariedad.

Key words: Estimation, Statistical Thermodynamics, Arbitrarity.

RESUMEN

Se utiliza la probabilidad de muestras virtuales para proponer una medida de la "arbitrariedad" (o "parcialidad") incurrida en la elección de una distribución de probabilidad.

SUMMARY

The probability of virtual samples in used for proposing a measure of the "arbitrariness" (or "partiality") incurred in the election of a probability distribution.

1.-Introducción

Los diversos métodos de estimación de distribuciones de probabilidad surgen de la selección de criterios para valorar la "bondad" de una distribución propuesta. En este trabajo generalizamos ideas de Gauss para tratar de introducir una medida de la "parcialidad" o "arbitrariedad" incurrida en la elección de una distribución de probabilidad que se propone como solución de un problema de estimación.

2.- El concepto de "verosimilitud", de Gauss.

Consideremos un experimento aleatorio con R resultados posibles, que indicaremos con r_i (i = 1,2,....,R). Indiquemos con p_i la probabilidad de ocurrencia de r_i. Supongamos que el experimento aleatorio se repite M veces, (muestra de tamaño M), y que se obtiene n_i veces el resultado r_i. La probabilidad de esa particular muestra vale:

$$V = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \ldots\ldots p_R^{n_R} \qquad (1)$$

A esta expresión Gauss la denominó "verosimilitud" de la muestra considerada, e introdujo como criterio de estimación el criterio de máxima verosimilitud (ver, por ejemplo, Freeman, 1970).

Un resultado que queremos utilizar en lo que sigue es el siguiente:

En el caso en que se ha obtenido una muestra con valores $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_R$ se encuentra que la distribución: $(p_1, p_2, \ldots p_R)$ estimada por máxima verosimilitud esta dada por:

$$p_1, p_2, \ldots, p_R = (n_1/M, n_2/M, \ldots, n_R/M) \qquad (2)$$

3.- Medida de arbitrariedad de una distribución de probabilidad.

Queremos considerar ahora otros casos en que la información disponible sobre la distribución que se desea estimar no consiste de una muestra como en los casos planteados con el criterio de Gauss, sino que consiste en alguna otra forma de conocimiento sobre ella. Como ejemplo consideremos el caso, fundamental para la Termodinámica Estadística (Jaynes, E. T. 1956; Tribus, 1961), en que se conoce el momento $\langle X \rangle$ de una variable aleatoria X asociada al experimento aleatorio considerado.

Introducimos en este caso al que denominaremos "método de las muestras virtuales". Si imaginamos que se repite M veces el experimento aleatorio, la verosimilitud de esa muestra, si fuera la más verosímil correspondiente a la distribución $(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_R)$ sería:

$$V = \left(p_1^{p_1} \cdot p_2^{p_2} \ldots\ldots p_R^{p_R} \right)^M \qquad (3)$$

Supongamos que pretendemos elegir como más apropiada la distribución $\{p_i\}$ que haga a V máxima. Si existiera algún resultado j con $x_j = \langle X \rangle$, esta distribución sería la concentrada en el resultado j, es decir sería $p_j = 1;\ p_{i \neq j} = 0$. Vemos que ése criterio de maximización nos lleva a la distribución de máxima arbitrariedad. A similar conclusión llegaríamos en el caso en que $\langle X \rangle$ tiene un valor intermedio entre dos valores posibles, x_j y x_{j+1}. Parece natural entonces tomar como criterio de estimación de la distribución $\{p_i\}$ (al que denominaremos "criterio de mínima arbitrariedad") al criterio que consiste en hacer mínima la expresión (3), respetando la información disponible sobre la distribución de probabilidades a estimar. Conviene tomar el logaritmo de la expresión (3) con lo que el criterio de mínima arbitrariedad se expresa por:

$$A = M\,(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + \ldots + p_R \ln p_R) = \text{Min} \qquad (4)$$

El valor de M podría elegirse arbitrariamente (con la condición M>0) relacionándolo con la unidad de medida de la arbitrariedad.

4.-Arbitrariedad media.

En el parágrafo anterior hemos llegado a un criterio consistente en elegir la distribución $\{p_i\}$ que hace mínima la verosimilitud calculada con la expresión (3) obtenida aplicando el criterio de máxima verosimilitud. En ése sentido podríamos hablar del criterio de "mínima máxima verosimilitud". Una formulación, tal vez más prolija, podríamos lograr calculando el valor de la arbitrariedad considerando las diversas muestras de tamaño M, es decir:

$$\overline{V} = \prod_{\{n\}} (p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_R^{n_R})^{(M!/n_1!\,n_2! \ldots n_R!)(p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_R^{n_R})}$$

Siguiendo el razonamiento expuesto en el parágrafo anterior, podemos llamar "arbitrariedad media" al logaritmo de ésta expresión, a saber:

$$\begin{aligned} A &= \ln V \\ &= \sum_{\{n\}} (M!/n_1!\, n_2! \ldots n_R!)(p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_R^{n_R})(n_1 \ln p_1 + n_2 \ln p_2 + \ldots + n_R \ln p_R) \end{aligned} \qquad (5)$$

Se tiene entonces,

$$\overline{A} = M\,[\, p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + \ldots + p_R \ln p_R \,] \qquad (6)$$

Es decir, se obtiene la misma expresión (4).

5.-Criterio de mínima arbitrariedad media.

El criterio que selecciona la distribución de probabilidades haciendo mínima la expresión (6), respetando la información disponible sobre la distribución (por ejemplo la información $\langle X \rangle$ = valor dado) lo denominaremos "criterio de mínima arbitrariedad media" o simplemente "criterio de mínima arbitrariedad".

La expresión obtenida para la "arbitrariedad de una distribución de probabilidad" coincide (salvo el signo) con la expresión de Boltzmann-Shannon para la entropía, obtenida por Shannon (Shannon, 1948) como fundamento de la teoría de la información, y obtenida ya en el siglo pasado por Boltzmann en su fundamentación de la termodinámica estadística.

REFERENCIAS

- Freeman, H. 1970. "Introducción a la Inferencia Estadística". Editorial Trillas, México.

- Jaynes, E. T. 1956, Information Theory and Statistical Mechanics" Phys. Rev. 106, 620.

- Shannon, C. E. 1948, "A Mathematical Theory of Comunications", Bell Syst. Tech. J. 27, 379.

- Tribus, M. 1961, Thermostatics and Thermodynamics" D. Van Nostran Co, Inc., Princeton, N.J.