GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO N°8

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:

- **Adquiera la destreza en el Calculo Diferencial a través de Técnicas de resolución**
- **Interprete analíticamente a la derivada de una función como la tasa instantánea de cambio.**
- **Resuelva ejercicios de aplicación.**

CONTENIDOS:

- **Técnicas de Diferenciación.**
- **Derivada de una Función como Intensidad de Cambio.**

NOTA:

- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al primer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDAD:

- **Técnicas de Diferenciación**

Hemos visto como hallar la derivada de una función mediante la definición, en el trabajo práctico anterior; ahora usando las reglas de derivación vemos como se pueden obtener tales derivadas, diciendo que se aplican técnicas de diferenciación.
Recuerde las reglas dadas antes de continuar con el desarrollo del presente trabajo.

Ejemplo 1: Hallar la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{5x-1}$, mediante la aplicación de las técnicas de diferenciación.
Solución: Aplicando la derivada del cociente, resulta:

$$f'(x)=\frac{[(2x)(5x-1)]-[(x^2+3)\cdot 5]}{(5x-1)^2}=\frac{10x^2-2x-5x^2-15}{25x^2-10x+1}=\frac{5x^2-2x-15}{25x^2-10x+1}$$

EJERCICIOS

1) (EO) Mediante la aplicación de las distintas reglas de diferenciación, se obtienen técnicas de diferenciación que facilitan su cálculo. Determine $D_x f(x)$ usando las técnicas:

a) $f(x)=\sqrt{x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-2}$

2) (EO) Sea $y=f(x)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$: **a)** $y=x^2+x^{-2}$ **b)** $y=\dfrac{1}{x^2}-x$ **c)** $y=\dfrac{x}{2x-3}$

3) (EO) Sea $y=f(x)$, determine $D_x y$: **a)** $y=\dfrac{4}{x^2}+3x-x^2$ **b)** $y=4-5x+\dfrac{3}{x^2}$

4) (EO) Diferencie la función que se indica aplicando las reglas correspondientes:

a) $f(x) = 7x - 5$ **b)** $g(x) = 8 - 3x$ **c)** $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

d) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ **e)** $f(x) = \frac{x^7}{7} - x^3$ **f)** $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$

g) $g(x) = 4x^2 + 5x + \frac{1}{x^2}$ **h)** $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$ **i)** $h(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

j) $f(x) = (3x^5 - 2)(4x^6 + 3x^2)$ **k)** $f(x) = \frac{3x}{4x+1}$ **l)** $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3 + 8}$

- **La Derivada como Intensidad de Cambio**

Complete los siguientes enunciados:

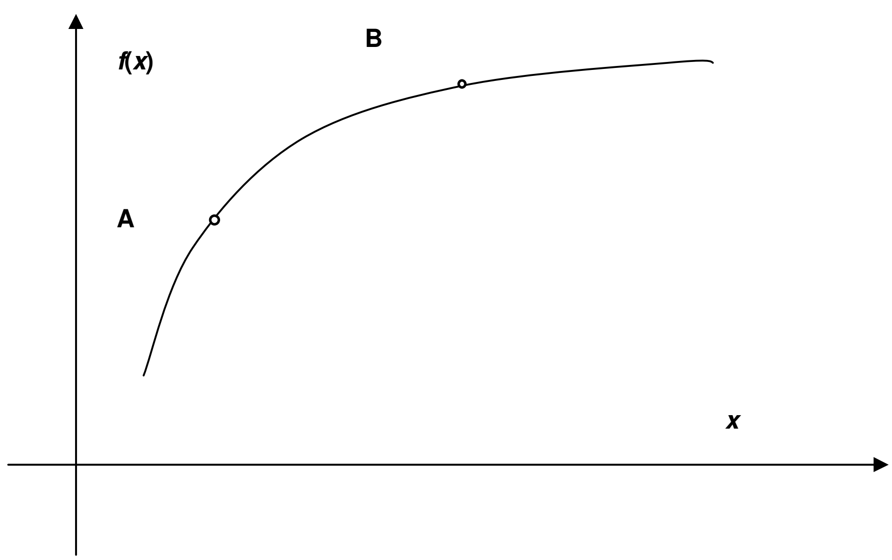
La intensidad promedio de cambio permite determinar la ________________________ que une dos puntos A y B de la gráfica de una función, cuyas coordenadas son A=(__,___) y B=(_____,_______). El cambio en el valor de x, es $\Delta x =$____________________ y el cambio en el valor de y, es $\Delta y =$____________________. La razón de estos dos cambios es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{----------------------------------}$$

La intensidad promedio de cambio se define en un ____________, mientras que la intensidad instantánea de cambio se define en un _____________________. La notación correspondiente para la intensidad de cambio instantánea de una función f en un punto x se denota como $f'(x)$, o bien $\frac{dy}{dx}$.

Complete el siguiente gráfico, y refleje lo antes comentado:

a) Grafique la secante entre A y B.
b) Indique las coordenadas de A y B.
c) Grafique la tangente a la curva en el punto A.



Ejemplo 2: Suponga que un caballo recorre durante 5 minutos una distancia d en metros, y que dicha distancia puede expresarse en función del tiempo t en minutos mediante la siguiente expresión:

$$d(t) = 300t^2 + 200t \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 5$$

La velocidad del animal puede variar continuamente mientras es perseguido o bien por que se detiene para alimentarse, lo cuál lo consideramos despreciable, en tal caso se tiene como velocidad a la velocidad promedio. Al cabo de un minuto la distancia recorrida será:

$$d(1) = 300(1)^2 + 200 \times 1 = 500 \text{ metros}$$

Entonces la tasa promedio de cambio de la velocidad es:

$$V = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{\text{riacion l corrido}}{\text{variacion del tiempo}}$$

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(1) - d(0)}{t_1 - t_0} = \frac{500m - 0m}{1\min - 0\min} = 500\frac{m}{\min}$$

Calcule la velocidad durante el segundo minuto: $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(2) - d(1)}{t_2 - t_1}$ =....................

La velocidad instantánea se obtiene a partir de la velocidad promedio o media, haciendo variar el intervalo de tiempo Δt, de tal manera que tienda a cero. Este es el concepto de derivada, por lo que se considera de ahora en adelante como una **tasa de intensidad de cambio instantánea**. Así pues, si la distancia es una función del tiempo, $d = d(t)$; la velocidad media o tasa media de intensidad de cambio es $V = \frac{\Delta d}{\Delta t}$, mientras que la velocidad instantánea es $V_{inst} = d'(t)$

Volviendo al caso del caballo, la velocidad instantánea a los t minutos: $d'(t) = 600t + 200$

Calcule la velocidad instantánea del caballo al cumplirse el primer minuto, esto es, $d'(1)$:

La medida que se utiliza para comparar la intensidad de cambio con la cantidad sometida a variación se denomina **intensidad relativa**. Escriba la definición correspondiente a éste último concepto.

EJERCICIOS

5) (EO) (AB) El macho de una especie de aves en la época de cortejo se lanza al aire desde el suelo, llega a una cierta altura máxima y baja, describiendo una parábola, la altura de dicho vuelo puede describirse en función del tiempo según la expresión:

$$h(t) = -160t^2 + 1280t$$

donde t es el tiempo en segundos y h es la altura en centímetros.

a) Determine la tasa promedio de cambio de altura entre: t=0 y t=3
t=1 y t=4
t=2 y t=5

b) ¿Cuanto tarda el ave en llegar al suelo?

c) ¿Cuál es la tasa instantánea de cambio de altura a los t segundos?

6) (EO) (AB) La población anual de leones en un parque Nacional en África tomada durante seis años, responde a la función $f(t)=560+80t-10t^2, 0\le t\le 5$. Complete la tabla siguiente, y luego responda: ¿A qué tasa promedio se incrementó la población anual entre 1983 y 1985? ¿Entre 1983 y 1988?. ¿Entre 1984 y 1986?

Año	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**
Población anual en números de individuos						

Finalmente encontrar la intensidad instantánea de cambio para $t=2$ (o sea para 1985).

7) (EO) (AB) Suponga que la población de una cierta ciudad t años después del 1 de julio de 1980 será $40t^2+200t+10.000$

a) Calcule la intensidad a la cuál crecerá la población para el 1 de julio de 1989.
b) Obtenga la razón o intensidad a la cuál crecerá la población para el 1 de julio de 1995.
c) Determine la intensidad relativa de crecimiento de la población para el 1 de julio de 1989.
d) Halle la intensidad relativa de crecimiento de la población para el 1 de julio de 1995.

8) (EO) (AB) La población de cierta ciudad t años después del 1 de enero de 1984 se espera que sea $f(t)$, donde,

$$f(t)=10.000-\frac{4.000}{t+1}$$

a) Utilice la derivada para calcular el cambio esperado de la población del 1 de enero de 1988 al 1 de enero de 1989.
b) Determine la variación exacta que se espera ocurra en la población del 1 de enero de 1988 al 1 de enero de 1989.

9) (AB) Una masa de aire frío se aproxima a una ciudad. La temperatura es de z grados t horas después de la media noche y $z=0{,}1\left(400-40t+t^2\right)$ con $0\le t\le 12$
a) Calcule la intensidad de cambio promedio de z con respecto a t entre las 05 y las 06 horas.
b) Encuentre la intensidad de cambio instantánea de T con respecto a t a las 05 horas.

10) (AB) Suponga que una persona puede aprender $f(t)$ palabras sin sentido en t horas y $f(t)=15t^{2/3}$, donde $0\le t\le 9$. Calcule la rapidez de aprendizaje de la persona después de: a) una hora ; b) 8 horas.

Respuesta de algunos ejercicios

1) a) $D_x f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **b)** $D_x f(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ **c)** $D_x f(x)=\frac{-13}{(3x-2)^2}$

2) a) $\frac{dy}{dx}=2x-\frac{2}{x^3}$ **b)** $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^3}-1$ **3) a)** $D_x y=-2x-\frac{8}{x^3}+3$ **b)** $D_x y=-\frac{6}{x^3}-5$

5) a) $\frac{h(3)-h(0)}{3-0}=800$ **b)** $h(t)=0\Rightarrow t=8$ **c)** $h'(t)=-320t+1280$

7) a) $f'(9)=920$ **b)** $f'(15)=1400$ **c)** $\frac{f'(9)}{f(9)}=0{,}0611=6{,}11\%$ **d)** $\frac{f'(15)}{f(15)}=0{,}0636=6{,}36\%$

8) a) $f'(5)=111$ **b)** $f(5)-f(4)=133$ **9) a)** $\frac{z'(5)+z'(6)}{2}=-2{,}9$ **b)** $z'(5)=-3$

10) a) $f'(1)=10$ **b)** $f'(8)=5$