GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO N° 6

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:
- **Interprete el concepto de Continuidad de Funciones**
- **Resuelva ejercicios de aplicación.**

CONTENIDOS:
- **Continuidad de una función en un punto.**
- **Continuidad de una función en su intervalo.**

NOTA:
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al primer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDAD:

Una función cuya gráfica puede realizarse a través de un sólo trazo, se interpreta como una función **continua**. Escriba las condiciones para que una función f definida en un intervalo I sea continua en un punto a de dicho intervalo:

i) ....
ii) ....
iii) ....

La continuidad de una función en todo un intervalo implica la continuidad de la función en todo punto de dicho intervalo.
Estudiar la continuidad de una función en un intervalo es idéntico a estudiar si existe algún punto del intervalo en donde la función es discontinua. Esto último es más fácil, pues toda función polinómica es continua en su dominio, mientras que sí una función es racional, debemos observar que ocurre para aquellos valores donde se anula el denominador.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ determine si la función es continua.
Solución: El dominio es el conjunto de los números reales excepto el 1. O sea $f(1)$ no existe, es decir es discontinua por no cumplir con la primera condición de continuidad.
Además el numerador puede escribirse como $(x\text{-}1)(x+4)$. Luego la función es $f(x)=x+4$ para x distinto de 1. Y como es un polinomio, resulta no tener otra discontinuidad más que para $x=1$.

Otra alternativa de estudio de discontinuidad es en aquellas funciones con múltiples asignaciones, en tal caso debemos estudiar que ocurre en los puntos donde cambia de asignación.

Ejemplo 2: Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & si\ \ x\neq 1\\ 2 & si\ \ x=1\end{cases}$.Determine si la función es continua.
Solución: De la primera asignación sabemos que existe la discontinuidad en $x=1$ pues no esta definida. Pero de la segunda asignación 1 tiene imagen, por lo que el dominio de la función son todos los reales. Debemos calcular el límite de la función cuando x tiende a 1.

Ambos limites unilaterales existen y son iguales a 5, pero $f(1)=2$. Luego la discontinuidad se debe a que no satisface la tercera condición de continuidad.

En ambos ejemplos anteriores se realizó un estudio sobre la forma de la ecuación de las funciones. También podríamos haber trazado la gráfica y realizar idéntico análisis a partir de dicha grafica. En efecto, partiendo del concepto de que continuidad significa que no existe interrupción en el trazado de la grafica, se puede determinar si hay o no continuidad en la función.

EJERCICIOS

1) (EO) Para cada uno de los siguientes apartados: Trace la gráfica de la función; después, observando donde hay interrupciones en la gráfica, determine los valores de la variable independiente en los cuáles la función es discontinua, y pruebe por qué la definición de función continua en un número no se cumple en cada discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ **b)** $g(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ **c)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x+3} & si\ x\neq -3\\ 1 & si\ x=-3\end{cases}$

d) $f(x)=\dfrac{5}{x-4}$ **e)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-4} & si\ x\neq 4\\ 2 & si\ x=4\end{cases}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^2-4}$

2) (EO) (AB) Mediante un experimento se expone una solución a una temperatura constante durante 10 minutos para su calentamiento. La temperatura inicial es de 20° C, y durante ese calentamiento la temperatura asciende a razón de 4° C por minuto. Posteriormente a los 10 minutos se somete a un enfriado rápido durante 5 minutos, de manera que se reduce según la expresión: $T(t)=1{,}2t^2-40t+340$ siendo t la variable independiente (v.i.) tiempo y T la variable dependiente (v.d.) temperatura.
a)Si se expone el experimento t minutos a la temperatura T, exprese la temperatura que se observa en función de t.
b)¿Cuál es el dominio de la función dada?.
c)¿Cuánta temperatura alcanza la solución a los 8 minutos?.
d)¿A los cuántos minutos se tendrá la temperatura de 32,8℃?.
e)Muestre que la función es continua en 10 y por lo tanto es continua en su dominio.

3) (EO) (AB) Los naranjos que se cultivan en California producen 600 naranjas al año si no se plantan más de 20 árboles por acre de terreno. Por cada árbol adicional que se siembra por acre, el rendimiento disminuye en 15 naranjas.
a)Si se plantan x árboles por acre, exprese el número de naranjas que se producen al año en función de x.
b) ¿Cuál es el dominio de la función dada?.
c) ¿Cuántas naranjas tendrá cada planta si se colocan 26 de ellas por acre?.
d) ¿Cuántas plantas por acre se colocarán si se desea obtener una producción de 13.500 naranjas?.
e)Muestre que la función es continua en 20 y por lo tanto es continua en su dominio.

Respuesta de algunos ejercicios

1) **a)** i) $f(-3)$ no existe **b)** i) $f(4)$ no existe **c)** iii) no se cumple
d) i) y ii) no se cumplen **e)** ii)-1 no se cumplen **f)** en los dos puntos i) no se cumple

3) $f(x)=\begin{cases}600x & si\quad 0\le x\le 20\\ 900x-15x^2 & si\quad 20<x\le 60\end{cases}$