GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO N° 5

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:
- **Interprete el concepto de Límite de Funciones**
- **Resuelva ejercicios de aplicación.**

CONTENIDOS:
- **Limite de una función.**
- **Limites unilaterales de una función.**

NOTA:
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al primer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDAD:

Si deseamos conocer el tamaño de una población momentos previos y siguientes al de un cierto instante $t=a$, donde la cantidad de dicha población está dada por una función $f(t)$, entonces estamos interesados en la imagen de la variable independiente t próxima a un valor especifico a.

Así hallar el valor más próximo de esa función cuando la variable independiente t tiende al valor a, es encontrar un número L que llamamos **límite**, y que se denota como:

$$\lim_{t \to a} f(t) = L$$

Es decir, estamos investigando el comportamiento de $f(t)$ a medida que la v.i. t se aproxima al valor a, y esto resulta ser un valor L, cerca de $f(t)$, si este limite existe.

Sustituir simplemente el valor de $t=a$ en la función dada y determinar $f(a)$ es una forma válida de calcular el límite de algunas funciones, tales como las polinómicas. Esto se justifica con los teoremas de límites correspondientes.

Ejemplo 1: Obtener el valor del límite siguiente: $\lim_{x \to 3} 4x + 2$

Solución: Sustituyendo x por 3 en la función $f(x) = 4x + 2$, resulta

$$\lim_{x \to 3} 4x + 2 = 4 \times 3 + 2 = 14$$

<u>Observación:</u> Cuando $f(a)$ no existe podemos estudiar dicho límite a través de algunos de los siguientes recursos algebraicos:

Recordemos que $(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$ conocido como **diferencia de cuadrados**.

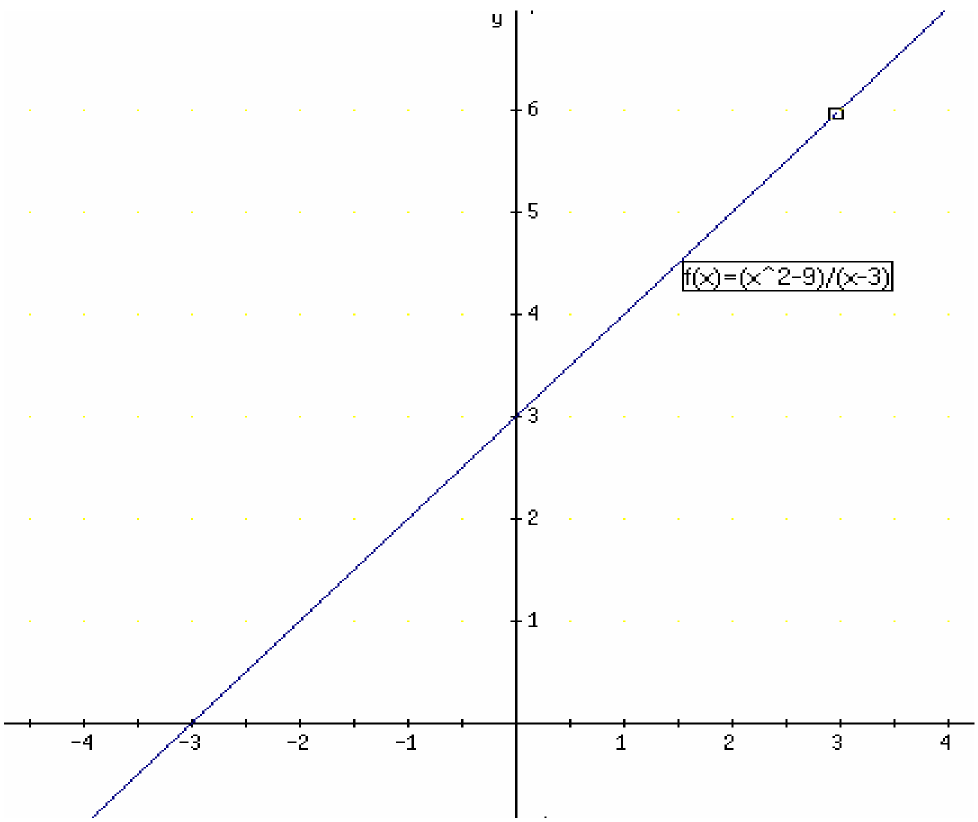
Además, $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

Ejemplo 2: Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, obtener el limite cuando la v.i. tiende a 3 y verificar si la función dada está definida para x igual a 3.

Solución: Apliquemos diferencia de cuadrados en el numerador y luego límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}x+3=6 \quad \text{si } x \text{ es distinto de } 3.$$

En efecto, si $x=3$, el denominador es cero y este cociente no esta definido; se suele decir que se tiene una indeterminación, de modo que la función no está definida para $x=3$. Esto es un claro ejemplo que en algunas funciones el limite cuando la v.i. tiende a un valor no es el simple reemplazo de la v. i. por el valor elegido.



EJERCICIOS

1)(EO) Identifique en cada apartado que teorema de límite puede aplicar y obtenga el límite indicado:

a) $\lim_{x\to 5}2x+4$ **b)** $\lim_{x\to -3}4x+7$ **c)** $\lim_{x\to -1}3x^2-5$ **d)** $\lim_{x\to 2}10-x^2$

e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ **f)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5}{2x^3+6}$ **g)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ **h)** $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

2)(**EO**)Si $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$, pruebe que $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=10$, pero que $f(5)$ no está definida.

3)(**EO**)Si $g(x)=\dfrac{x+1}{x^3+1}$, pruebe que $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=\dfrac{1}{3}$, pero que $g(-1)$ no está definida.

4)(**EO**)Dada $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x\neq 2 \\ 1 & si\ x=2 \end{cases}$ **a)**Trace la gráfica de $f(x)$.

b)Obtenga $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, y demuestre que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

5)(**EO**)Dada $g(x)=\begin{cases} x^2-9 & si\ x\neq -3 \\ 4 & si\ x=-3 \end{cases}$ **a)**Trace la gráfica de $g(x)$.

b)Obtenga $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$,y muestre que $\lim\limits_{x\to -3} g(x)\neq g(-3)$.

6) La aproximación de una variable a un cierto valor determinado no es siempre igual si se aproxima a través de valores mayores o menores. Así se dice, que la aproximación por derecha y por izquierda no siempre es la misma.
Revise los conceptos de límites unilaterales y luego para cada apartado trace la gráfica y halle los límites que se indican, si éstos existen. Si algún límite no existe, indique la razón:

a) (EO) $f(x)=\begin{cases} 2 & si & x<1 \\ -1 & si & x=1 \\ -3 & si & x>1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) $f(x)=\begin{cases} -2 & si & x<0 \\ 2 & si & x\geq 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c) $f(x)=\begin{cases} -2x & si & x<0 \\ 2x & si & x\geq 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d)(EO) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si & x\leq 2 \\ 8-2x & si & x>2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

e)(EO) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si & x<3 \\ 10-x & si & x\geq 3 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

f)(EO) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si & x<1 \\ 2 & si & x=1 \\ 7-2x & si & x>1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

7)(EO)(AB) La dosis correspondiente a una droga que se debe colocar a ejemplares de cierta especie de animal esta dada por la función siguiente, de manera que la cantidad C en miligramos a colocarse es función del peso p en grs del ejemplar.

Sea la función:

$$C(p)=\begin{cases} 8p & si \quad 0<p\le 50 \\ 7p & si \quad 50<p\le 200 \\ 6{,}5p & si \quad 200<p \end{cases}$$

a) Trace la grafica de la función
b) Investigue a través de limites que ocurre para aquellos ejemplares con peso próximos a los 50 grs y 200 grs.

8) Si bien una indeterminación, como vimos en el ejemplo 2, puede ser salvada en el sentido que se obtiene un valor numérico para el límite; en otras oportunidades es imposible llegar a un valor numérico. En tal caso, la división por un número próximo a cero, implica un resultado muy grande al que conocemos como infinito, y que según la regla de los signos de la división nos lleva a que sea positivo o negativo.

Revise el concepto de límites infinitos de una función, evalúe los siguientes límites y finalmente grafique la situación planteada:

a) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{1}{x-5}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{1}{x-5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{1-x}$

Respuesta de algunos ejercicios

1) a) 14 **b)** 19 **c)** -2 **d)** 6 **e)** -1 **f)** $\dfrac{-1}{22}$ **g)** $\dfrac{1}{4}$ **h)** 12

4)b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

5)b) $\lim\limits_{x\to -3} g(x)=0$

6)a) 2, -3, no existe **b)** -2, 2, no existe **c)** 0, 0, 0
d) 4, 4, 4 **e)** 7, 7, 7 **f)** 5, 5, 5

7) a) $+\infty$ **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$ **d)** $+\infty$