GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO Nº 21

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:
- **Interprete la información de un vector.**
- **Opere con vectores en el plano.**
- **Resuelva operaciones y problemas que involucren magnitudes vectoriales**

CONTENIDOS:

- **Magnitudes Escalares y Vectoriales**
- **Vectores**
- **Vectores colineales**
- **Vectores coplanares**
- **Operaciones con vectores: analíticamente y gráficamente**
- **Aplicaciones**

NOTA:
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera y segunda parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al tercer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDADES

Magnitudes Escalares y Vectoriales

Cuando se debe cuantificar distintos fenómenos, recurrimos a magnitudes, que se distinguen según la forma en que quedan determinadas. Así tenemos magnitudes que con sólo un número real queda determinado completamente; por ejemplo la *longitud de un hueso*, la *masa de un animal* que va a ser expuesto a un experimento, el *tiempo que tarda en reaccionar una sustancia química*. Estas magnitudes se denominan ***escalares*** debido a que con solo el escalar seguido de la unidad de medida se expresa la cuantificación deseada. Para los ejemplos anteriores algunas cuantificaciones pueden ser: 0,45 *m*; 1,275 *Kg*., 15*min*.

En otros casos, las magnitudes deben ser presentadas no sólo con un número real, sino que debe acompañarse la información con otro elemento. En efecto, si debemos expresar el recorrido seguido por un músculo sometido a un impulso nervioso, al valor numérico correspondiente al movimiento realizado debe agregarse la línea de acción y el sentido que a tomado sobre ella. Además del desplazamiento, la velocidad, la aceleración y la fuerza entre otras, son magnitudes que deben ser expresadas por vectores, por lo que se denominan magnitudes ***vectoriales***.

En estas magnitudes hay que distinguir su intensidad, la cuál es una cantidad escalar, su dirección y su sentido.

Así, ***un vector es una cantidad física que caracteriza simultáneamente la intensidad numérica, la dirección y el sentido***.

- **Vectores**

Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos. Cuando estos puntos están dados en cierto orden, el segmento se dice que está orientado.

Definición 1: Se denomina vector a todo segmento orientado.

La orientación está dada por el orden en que se recorre el vector, desde un extremo inicial llamado origen, al otro extremo llamado extremo final. La recta que contiene al vector determina la dirección del mismo, el sentido de un vector lo da la orientación del vector. Así todos los vectores sobre una misma recta o rectas paralelas tienen igual dirección. Dos vectores con igual dirección pueden tener solo una de dos direcciones: la misma o la opuesta.

Toda magnitud vectorial puede representarse por un vector, cuya longitud sea proporcional a la intensidad y cuya dirección y sentido sean las correspondientes a la magnitud.

La magnitud de un vector se determina por el módulo, el cual es la longitud del segmento orientado. Este modulo es un numero real positivo.

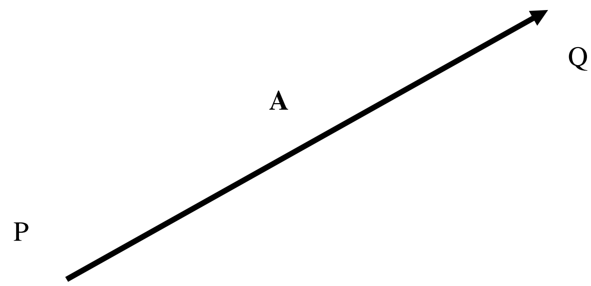


Fig.1. Representación geométrica de un vector

Todo vector se denota por medio de una letra con una flecha sobre ella, por ejemplo: $\vec{A}$, o bien, con negrita: **A**. Gráficamente, un vector **A** se representa por un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ como se ilustra en la figura 1. El vector **A** tiene una dirección de P hacia Q. El punto P es el origen y Q el extremo de **A**. La longitud del segmento de recta representa la ***magnitud*** o ***modulo*** de **A** y se denota con A o bien: $|A|$, y es el escalar que representa la magnitud del vector.

Si los puntos P y Q de la figura 1 coinciden entonces el vector se llama ***vector cero*** o ***nulo***, y se denota por **0.** Tiene magnitud cero y dirección arbitraria.

Definición 2: Dos vectores son ***iguales*** cuando tienen la misma magnitud o modulo, dirección y sentido.

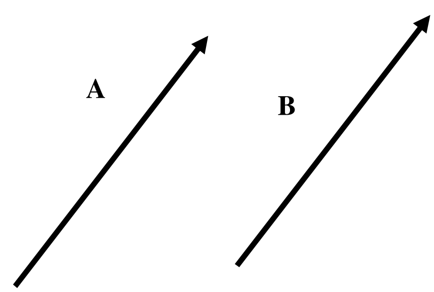


Fig.2. Representación de vectores iguales

Los vectores **A** y **B** de la figura 2 son iguales, por lo que podemos escribir **A**=**B**. De ésta manera todos los vectores pueden ser trasladados en el plano conservando su dirección, sentido y modulo.

- **Clasificación de los Vectores**

Definición 3: Dos o más vectores se dicen ***colineales*** cuando actúan sobre una misma recta.

Los vectores de la figura 3 son colineales. Los dos primeros tienen el mismo sentido y el tercero tiene sentido opuesto a los anteriores. Todos tienen la misma dirección.

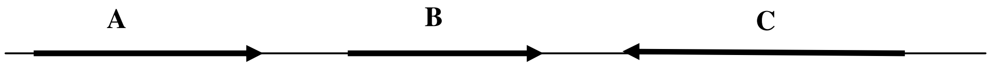


Fig.3. Representación de vectores colineales

Definición 4: Dos o más vectores se dicen ***coplanares*** cuando actúan sobre un mismo plano.

Los vectores de la figura 4 son coplanares, pues todos están sobre un mismo plano α.

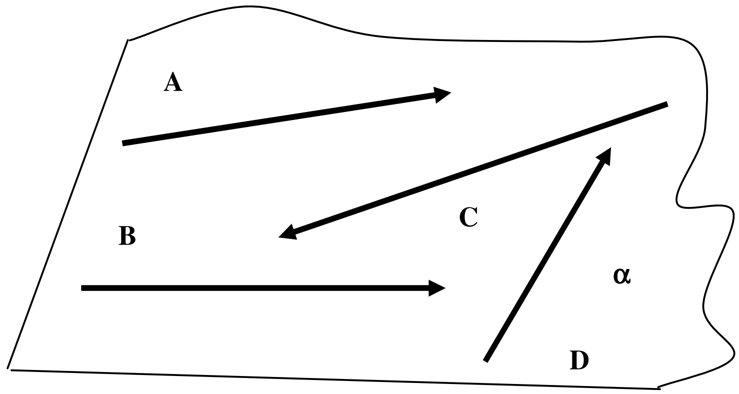


Fig.4. Representación de vectores coplanares

Definición 5: Dos o más vectores se dicen ***concurrentes*** cuando tienen en común el mismo origen.

Los vectores de la figura 5 son concurrentes, pues todos tienen el mismo origen.

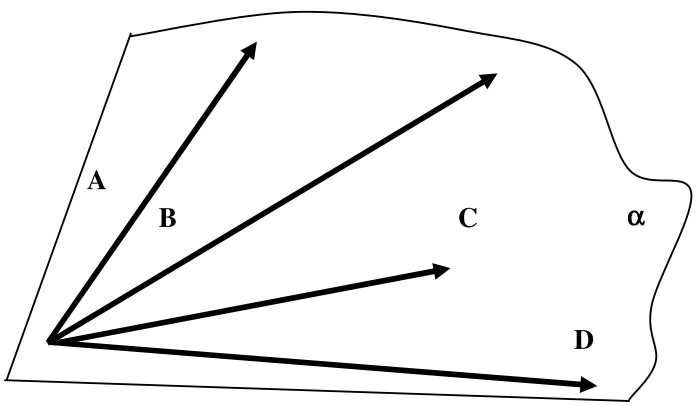


Fig.5. Representación de vectores concurrentes

Definición 6: Dos o más vectores se dicen ***paralelos*** cuando tienen la misma dirección y sentido.

Los vectores de la figura 6 son paralelos.

Definición 7: Dos vectores se dicen ***consecutivos*** cuando el extremo del primero de ellos coincide con el origen del segundo.

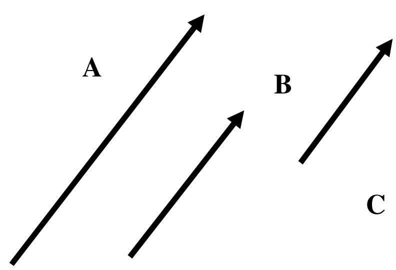


Fig.6. Representación de vectores paralelos

EJERCICIO:

1.- (EO) **a.-**Indique los elementos que determinan a un vector.
b.-Dibuje tres vectores que sean consecutivos.

2.-Completar:
a.-Dos o mas vectores se dicen colineales si ....
b.-Dos vectores colineales pueden tener .... o .... direcciones.

- **Adición de vectores**

La suma de dos vectores es igual a otro vector, por lo tanto tiene también modulo, dirección y sentido. Para calcular vamos a comenzar con los vectores colineales.

Definición 8: La suma de dos vectores colineales consecutivos es igual a otro vector colineal a los anteriores cuyo origen es el origen del primero y cuyo extremo es el extremo del segundo. Así el vector resultante tiene la misma dirección y el mismo sentido que los vectores sumados y el modulo es la suma de los módulos de los vectores dados si estos tienen el mismo sentido. Mientras que si los vectores dados tienen sentidos opuestos el modulo es la diferencia entre los módulos y el sentido es el del vector de mayor modulo.

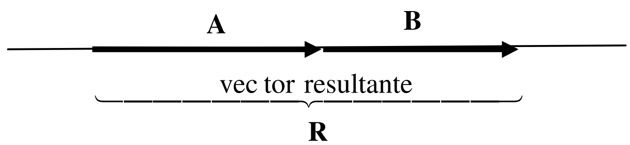


Fig.7. Resultante de la suma de vectores colineales

Definición 9: La suma de dos vectores colineales no consecutivos es igual a la suma de dos vectores consecutivos iguales a los vectores dados.

Es decir, se deben trasladar a los vectores de manera que una vez que estén en forma consecutiva se los suma.

EJERCICIO:

3.-Completar:
a.-La suma de dos vectores colineales de igual sentido es igual a ....
b.-La suma de dos vectores colineales de sentidos opuestos es igual a ....

En los problemas de vectores es conveniente realizar la parte gráfica para apoyar los cálculos algebraicos, de ésta manera no sólo nos garantiza los valores encontrados sino que se interpreta mejor el problema.

4.- (EO) Sean dos vectores colineales de 6 y 8 unidades de magnitud y con igual sentido. Hallar la suma de tales vectores.

5.- (EO) Sean dos vectores colineales de 12 y 4 unidades de magnitud, donde el ultimo es opuesto al primero. Hallar la suma de tales vectores.

6.- (EO) Sean tres vectores colineales de 7, 5 y 9 unidades de magnitud, donde el ultimo es opuesto a los anteriores. Hallar la suma de tales vectores.

- **Suma de vectores coplanares consecutivos.**

Para la suma de vectores coplanares también debemos partir de vectores que sean consecutivos o bien que sean concurrentes.

Supongamos una partícula que se desplaza desde un punto A hacia otro punto B , y luego desde B a C, a través de los desplazamientos $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, respectivamente; esto resulta equivalente a un único desplazamiento $\mathbf{d}$, desde A hasta C. Ver figura 8.

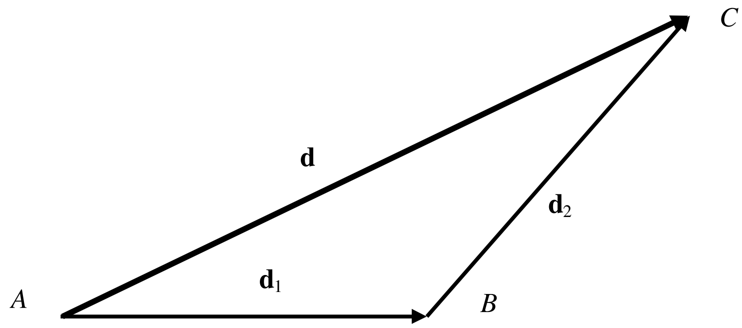


Fig. 8. Desplazamientos representados mediante vectores

El procedimiento se puede generalizar para vectores cualesquiera $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. Siendo $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ calculamos el modulo de esta suma a través de la siguiente gráfica (fig.9):

Construyendo el triángulo rectángulo ADC, y aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$$

Pero $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = V_1 + V_2 \cos\theta$ y $\overline{DC} = V_2 \operatorname{sen}\theta$

Por lo tanto: $V^2 = (V_1 + V_2 \cos\theta)^2 + (V_2 \operatorname{sen}\theta)^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta$

Luego el modulo del vector resultante es: $V = +\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$ [1]

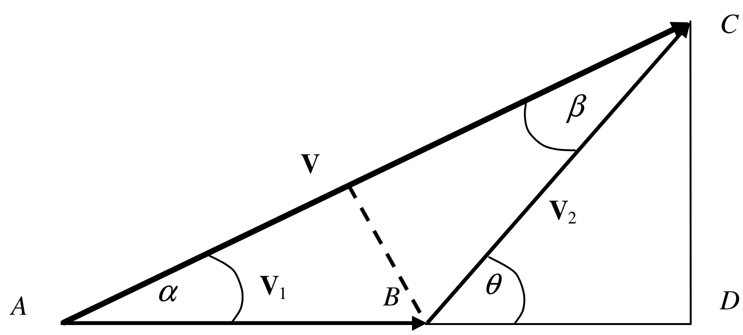


Fig. 9. Suma de vectores coplanares consecutivos

Para determinar la dirección de $\mathbf{V}$, necesitamos solamente hallar el ángulo α. En la figura vemos que en el triángulo $\overset{\Delta}{ADC}$: $\overline{CD} = \overline{AC}\, sen\,\alpha$ y que en el triángulo $\overset{\Delta}{BDC}$: $\overline{CD} = \overline{BC}\, sen\,\theta$

Por consiguiente: $V sen\alpha = V_2\ sen\theta$. Es decir: $\dfrac{V}{sen\theta} = \dfrac{V_2}{sen\alpha}$

Análogamente, $\overline{BE} = V_1 sen\alpha = V_2 sen\beta$. De allí: $\dfrac{V_2}{sen\alpha} = \dfrac{V_1}{sen\beta}$

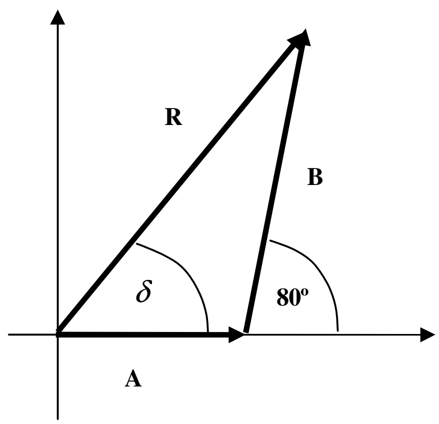
Combinando ambos resultados: $\dfrac{V}{sen\theta} = \dfrac{V_1}{sen\beta} = \dfrac{V_2}{sen\alpha}$ [2]

Las ecuaciones trigonométricas [1] y [2] son fundamentales, y se conocen como la ***ley del coseno y seno***, respectivamente. En el caso particular en que los vectores sean perpendiculares, es decir, con $\theta = \frac{\pi}{2}$ donde se cumple la relación:

$$V = +\sqrt{V_1^2 + V_2^2} \qquad \text{y} \qquad tg\alpha = \frac{V_2}{V_1}$$

Ejemplo 1: Dados dos vectores consecutivos **A** de 3 unidades en la dirección positiva del eje X, y **B** de 5 unidades de longitud haciendo un ángulo de 80º con el eje X. Hallar la suma de ambos.

Solución: Trazamos la grafica según los valores dados en el enunciado y aplicamos la ley del coseno para hallar el modulo del vector suma y la ley del seno para hallar su dirección y sentido.



En la figura vemos el vector suma. Para encontrar la magnitud aplicamos la fórmula [1] anterior, y reemplazando se tiene:

$\sqrt{9 + 25 + 2.3.5.\cos 80°} = 6{,}2617$ unidades

Para hallar el ángulo entre la resultante y **A**, aplicamos [2], que en este caso es

$\operatorname{sen}\delta = \frac{5.\operatorname{sen} 80°}{6{,}2617} = 0{,}786$ es decir, δ =51°50', es el ángulo entre la resultante y el semieje positivo de las X.

- La ***diferencia entre dos vectores*** se obtiene sumando al primero el opuesto del segundo, esto es:

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2)$$

Además, se verifica que $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = -\mathbf{D}$, es decir, si los vectores se sustraen en el orden opuesto, resulta el vector opuesto; así, la diferencia vectorial es anticonmutativa. La magnitud de la diferencia es:

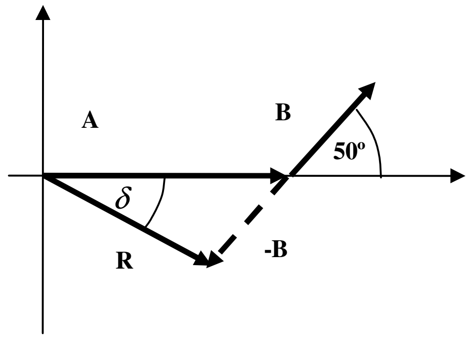
$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\pi - \theta)}$$

es decir, $$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}$$

Ejemplo 2: Dados dos vectores consecutivos **A** de 4 unidades en la dirección positiva del eje X, y **B** de 2 unidades de longitud haciendo un ángulo de 50º con el eje X. Hallar la resta **A**-**B**:

Solución: Debemos resolver la diferencia **A**-**B** pero transformamos en la suma de **A** con el vector opuesto **–B**.

En la figura vemos el vector diferencia como la suma del primero mas el opuesto del segundo. Para encontrar la magnitud aplicamos la fórmula [1] anterior, y reemplazando se tiene:



$\sqrt{16+4-2.4.2.cos\,50°} = 3{,}117$ unidades

Para hallar el ángulo entre la resultante y **A**, aplicamos [2], que en este caso es

$$sen\delta = \frac{2.sen50°}{3{,}117} = 0{,}4915$$

es decir, δ=29,44° es el ángulo entre la resultante y el semieje positivo de las X.

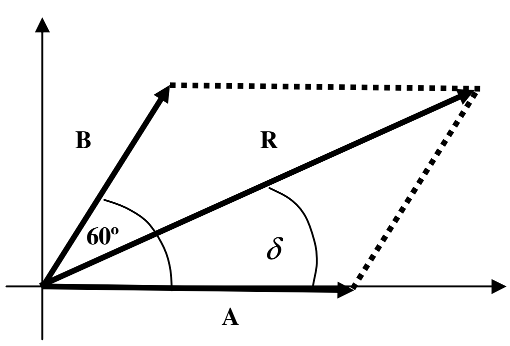
- **Suma de vectores concurrentes**

Definición 10: La suma de dos vectores concurrentes es igual a la suma de dos vectores consecutivos iguales a los vectores dados.
Esto permite decir que se trasladen para que queden consecutivos.

Gráficamente el método para sumar dos vectores concurrentes es el de trazar las dos paralelas a cada uno de los vectores dados por el extremo del otro, quedando determinado un paralelogramo. El vector resultante es la diagonal del paralelogramo y es un vector concurrente a los anteriores. Este se método se denomina ***Método del Paralelogramo***.

Ejemplo 3: Dados dos vectores concurrentes **A** de 5 unidades en la dirección positiva del eje X, y **B** de 4 unidades de longitud haciendo un ángulo de 60º con **A**. Hallar:
a) la suma de los vectores **b)** la diferencia **B**-**A**

Solución:
a) Es conveniente comenzar con la realización de la gráfica de los vectores en un sistema de ejes coordenados, aplicar el método del paralelogramo. Para ello trasladamos uno de ellos tal que el origen de uno de ellos coincida con el extremo del otro.



En la figura vemos el vector suma. Encontramos la magnitud mediante la fórmula [1] anterior, y reemplazando se tiene:

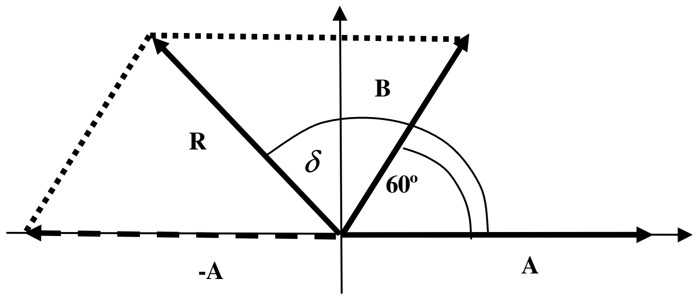
$\sqrt{25+16+2.5.4.cos\,60°} = 7{,}81$ unidades

Para hallar el ángulo entre la resultante y **A**, aplicamos [2], resultando

$$sen\delta = \frac{4.sen60°}{7{,}81} = 0{,}4435 \ ,$$

o sea, δ=26,33°, es el ángulo entre la resultante y el semieje positivo de las X.

b)Para hallar la diferencia **B-A**, dibujamos el vector opuesto a **A**, es decir, -**A**, y realizamos la suma entre **B** y **-A**.



La magnitud del vector resultante es: $\sqrt{25+16-2.5.4.cos\,60°} = 4{,}5826$ unidades.

La dirección se obtiene de: $\dfrac{|R|}{sen60°} = \dfrac{|-A|}{sen\beta}$

es decir: β = 70,89º es el ángulo entre la resultante y **B.** Bien nos podría interesar el ángulo de la resultante con el semieje positivo de las X, entonces sumamos 60º al valor obtenido, o sea , es de 130,89º.

El análisis gráfico, es de mucha ayuda para resolver la parte analítica, por lo que se sugiere realizar la gráfica respetando una escala apropiada para luego verificar los resultados.

EJERCICIOS:

7.-Completar:

a.-Dos o mas vectores se dicen coplanares si ....

b.- La magnitud del vector suma de dos vectores coplanares se obtienen según ....

c.-La dirección del vector suma de dos vectores coplanares se obtiene según ....

8.- (EO) Dos vectores de 5 y 8 unidades de longitud forman un ángulo entre ellos de 45°. Encuentre la magnitud del vector suma y su dirección con respecto al vector más pequeño.

9.- (EO) Considere los vectores del problema anterior, variando el ángulo:

a) 0° b)85° c)150° d)180°

Encuentre el vector suma en cada uno de los apartados.

10.- (EO) Dos vectores **A** de 15 y **B** de 12 unidades de longitud, forman entre sí un ángulo de:

a) 40° ,b) 70° ,c) 140°

Encontrar la magnitud de la diferencia **A-B** y el ángulo con respecto al primero.

11.-Encontrar el ángulo entre los vectores de 12 y 20 unidades de longitud, cuando el vector suma tiene: a)30 unidades de longitud b)15 unidades de longitud

En ambos casos realizar las figuras correspondientes.

12.-Dos vectores forman un ángulo de 120°. Uno de ellos tiene 12 unidades de longitud y hace un ángulo de 30° con el vector suma de ambos. Encontrar la magnitud del segundo vector y la del vector suma.