GUIA DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO Nº 20

OBJETIVOS:

Lograr que el Alumno:

- **Distinga tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias**
- **Resuelva Ecuaciones diferenciales ordinarias**
- **Resuelva problemas de aplicación**

CONTENIDOS:

- **Ecuación diferencial lineal de primer orden de variables separables.**
- **Ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes.**
- **Ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes.**

NOTA:

- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al segundo parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDADES:

Lectura preliminar:

“ El Modelo más simple de incremento de una población cuyo numero de individuos se incrementa a una tasa constante, es conocido como crecimiento exponencial. Se lo describe con la ecuación diferencial $dN/dt = rN$ .El término dN/dt es igual a la tasa de crecimiento de la población, o sea, el cambio en el número de individuos a lo largo del tiempo. La ecuación establece que la tasa de crecimiento es igual a r, la tasa de crecimiento per cápita, (donde) … N, (es) el numero de individuos *ya presentes* de la población. ” ….. “Como puede verse, aunque la tasa de incremento per cápita permanece constante, la tasa de crecimiento de la población -la tasa de cambio del numero de individuos de la población- se incrementa notablemente a lo largo del tiempo. En otras palabras, la pendiente de la curva de crecimiento es leve cuando la población es pequeña y luego se incrementa cuando la población aumenta de tamaño. El crecimiento exponencial comienza lentamente, pero luego se dispara muy rápidamente cuando el número de individuos reproductores se incrementa en cada generación. El principio es el mismo que para calcular el interés compuesto de una cuenta de ahorro. Cuanto mas se tiene, más se obtiene.”

Pero, ¿que es una ecuación diferencial?.

Es frecuente, en muchas investigaciones, hallar en forma mas directa, relaciones entre las variaciones de las variables, que relaciones entre las variables mismas. Esto es, plantear ecuaciones que vinculan las derivadas o la diferencial de la función con la variable independiente, por esta razón, se llaman ***ecuaciones diferenciales***.

Ejemplo Ilustrativo 1: Reconozca las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $xy' = 2y - x$ b) $y'' - y' - 6y = 0$ c) $2dy = x^2dx$

Solución: Sea x la variable independiente, tal que la variable dependiente y esta dada a través de la función $y = f(x)$, la cual es diferenciable hasta un cierto orden, es decir que pueden existir sus primeras derivadas $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Entonces una ecuación en donde la relación esta dada entre la variable independiente, la dependiente y alguna de sus derivadas, es una ecuación diferencial. ■

Como toda ecuación, su solución existe si hay una expresión que satisface la igual dada. En el caso de las ecuaciones diferenciales, la solución viene dada por una función $y = f(x)$. La forma de verificar si tal solución es la correcta es reemplazar los términos y obtener la igualdad.

Ejemplo Ilustrativo 2: Verifique que las funciones dadas en cada apartado son soluciones de las ecuaciones diferenciales del ejemplo 1.

a) $y = x^2 + x$ b) $y = \frac{1}{2}e^{-2x}$ c) $y = \frac{1}{6}x^3 + 5$

Solución:
a) $y = x^2 + x$ es solución de la ecuación diferencial $xy' = 2y - x$
En efecto, la derivada de y es: $y' = 2x + 1$. Reemplazando ahora en la ecuación diferencial dada

$$x(2x+1) = 2(x^2 + x) - x$$
$$2x^2 + x = 2x^2 + 2x - x$$
$$2x^2 + x = 2x^2 + x$$

b) $y = \frac{1}{2}e^{-2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$
En efecto, las dos primeras derivadas de y son: $y' = -e^{-2x}$ y $y'' = 2e^{-2x}$. Reemplazando ahora en la ecuación diferencial dada

$$2e^{-2x} - (-e^{-2x}) - 6.\frac{1}{2}e^{-2x} = 2e^{-2x} + e^{-2x} - 3e^{-2x} = 0$$

c) $y = \frac{1}{6}x^3 + 5$ es solución de la ecuación diferencial $2dy = x^2dx$
La derivada de la función es $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2$, y pasando al otro miembro los términos que están dividiendo se tiene la ecuación dada. ■

Ahora podemos hablar de la forma de obtener una solución de una ecuación diferencial. Por un lado debemos reconocer que para hallar una función a partir de su derivada, debemos efectuar una integración, en consecuencia es lógico pensar en la constante de integración C que contendrá la función obtenida. Una solución de una ecuación diferencial que se expresa en término de la constante de integración se llama ***solución general***.
Esta solución a la que se le asigna un valor determinado a la constante de integración, se llama ***solución particular***. Para llegar a una solución particular es necesario conocer el valor de la función para un determinado valor de la variable independiente. Cuando se conoce el valor de la función para los primeros valores de la función, es decir $x = 0$, se tiene una ecuación diferencial con un valor inicial, a esto se denomina ***problema con valor inicial***.

Ejemplo Ilustrativo 3: Hallar la solución general de la ecuación $2dy = x^2 dx$. Verifique luego que $y = \frac{1}{6}x^3 + 5$ es la solución particular que se obtiene cuando x=0 y y=5.

Solución: Partiendo de la ecuación e integrando se tiene la solución general:

$$2dy = x^2 dx$$

$$\int 2dy = \int x^2 dx$$

$$2y + C_1 = \frac{1}{3}x^3 + C_2$$

$$2y = \frac{1}{3}x^3 + C_2 - C_1$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C$$

Siendo la solución general, la función $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + C$, se verifica que $f(0) = \frac{1}{6}0 + C = 5$ en consecuencia $C = 5$. Así una solución particular es $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 5$ ■

Vimos en el ejemplo 1 que la primera y la tercera ecuación contiene únicamente a la primera derivada de la función, mientras que la segunda ecuación contiene hasta la segunda derivada, en consecuencia diremos que la primera y tercera son de ***primer orden*** mientras que la restante es de ***segundo orden***. Así pues, se dice que una ecuación diferencial es de un cierto ***orden***, si es ese el mayor orden de derivación presente en tal ecuación.

La teoría de las ecuaciones diferenciales es muy amplia, por lo que aquí solo pretendemos dar una introducción. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en diversos tipos, pero aquí solo presentaremos las siguientes:

- ***Ecuaciones diferenciales en variables separables,***
- ***Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas,***
- ***Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas,***
- ***Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas***.

EJERCICIOS:

1) **(EO)**Comprobar que $y = 2x + Ce^x$, donde C es constante, es la primitiva de la ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx} - y = 2(1-x)$

Halle luego la solución particular que se satisface para $x = 0$ e $y = 3$.

2) Verificar que cada una de las siguientes expresiones es una solución de la correspondiente ecuación diferencial:

a) **(EO)** $(1-x)y^2 = x^2$ $\qquad 2x^3 y = y'(y^2 + 3x^2)$

b) **(EO)** $y = e^x(1+x)$ $\qquad y'' = 2y' - y$

c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ $\qquad y'' - y = 0$

- **Ecuaciones diferenciales en variables separables**

Tratamos con ecuaciones que contienen funciones en una sola variable, por lo cual nos referimos a una variable independiente y una dependiente, de esta manera si podemos separar tales variables para recién aplicar la antidiferenciación, diremos que la ecuación diferencial se llama de ***variables separables***. Así, si logramos expresar a la ecuación diferencial $y' = f(x)$ en la forma: $G(y)dy = F(x)dx$, es decir que en cada miembro se tiene expresiones que dependen únicamente de cada una de las variables. El ejemplo ilustrativo 3 es de variables separables y puede observarse como se resolvió.

Ejemplo Ilustrativo 4: Resuelva la siguiente ecuación diferencial en variables separables:

$$5y' + 4x = 0$$

Solución: Pasamos al segundo miembro el segundo término, y reescribimos la derivada como cociente de diferenciales, posteriormente integramos en ambos miembros y expresamos la función finalmente:

$$5y' + 4x = 0$$
$$5y' = -4x$$
$$5\frac{dy}{dx} = -4x$$
$$5dy = -4xdx$$
$$\int 5dy = \int -4xdx$$
$$5y = -4\frac{x^2}{2} + C$$
$$y = -\frac{2}{5}x^2 + C$$

■

Ejemplo Ilustrativo 5: La ecuación diferencial $dN/dt = rN$ es de variable separable.

Solución: Aquí la variable independiente es el tiempo t, y la variable dependiente es el número de habitantes $N = N(t)$. Entonces escribamos la ecuación de la forma $\frac{dN}{N} = rdt$, con lo cual se ve que es de variables separables. Ahora integremos y resolvamos la ecuación:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \int_{t_0}^{t} rdt$$

$$\ln N \Big[_{N_0}^{N} = rt\Big[_{t_0}^{t}$$

$$\ln N - \ln N_0 = r(t - t_0)$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = r(t - t_0)$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{r(t-t_0)}$$

$$N = N_0 e^{r(t-t_0)}$$

∎

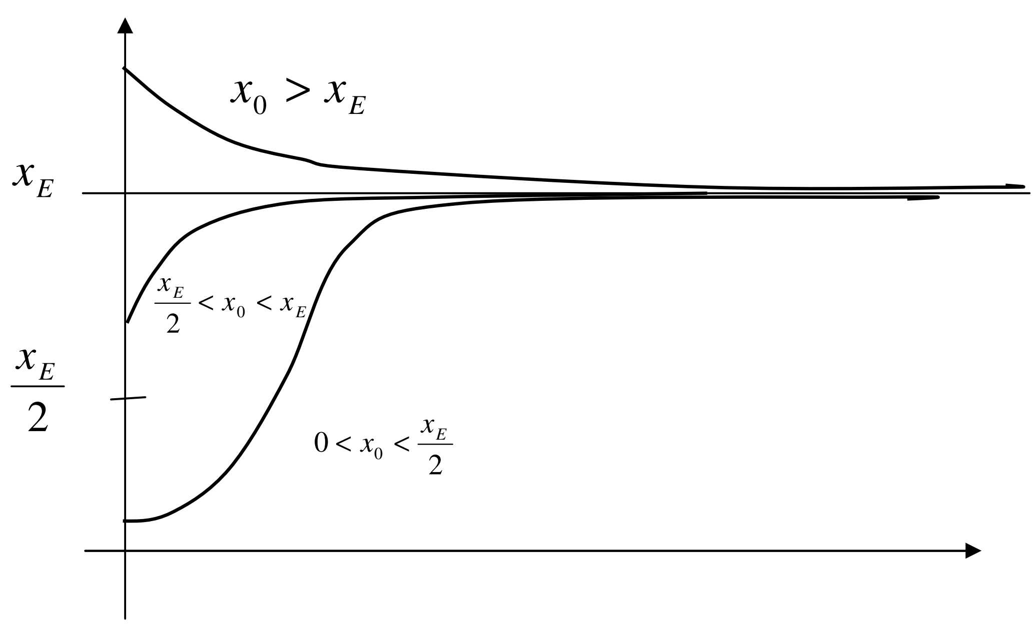
- **Aplicación de las ecuaciones diferenciales: Modelos poblacionales continuos**

Para muchas poblaciones, el número de individuos está determinado no por el potencial reproductor, sino por el ambiente. Un ambiente dado puede soportar sólo a un limitado número de individuos de una población particular en cualquier conjunto específico de circunstancias. El tamaño de la población oscila alrededor de este número, que se conoce como capacidad de carga del ambiente. Es el numero promedio de individuos de la población que el ambiente puede soportar bajo un conjunto particular de condiciones. Para las especies animales, la capacidad de carga puede estar determinada por el suministro de alimento o por el acceso a sitios de refugio. Para las plantas, el factor determinante puede ser el acceso a la luz solar o la disponibilidad de agua.
Los patrones de crecimiento de la población observados en la naturaleza son muchos y complejos. Uno de los patrones más simples, que ilustra claramente el efecto de la capacidad de carga, es descrito aproximadamente por la siguiente ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{K - N}{K}\right)$$

En esta ecuación r es la tasa de incremento per cápita, N el numero de individuos presentes, y K la capacidad de carga, o sea, el numero de individuos que el ambiente puede soportar durante un periodo determinado.

Importante resulta comprender este análisis, cuando N es muy pequeño, la expresión del paréntesis $\frac{K-N}{K}$, se aproxima a uno y la curva se aproxima a la curva de crecimiento exponencial. Cuando N se incrementa, $K-N$ disminuye, y el crecimiento se hace mas lento, disminuyendo hasta cero cuando $K=N$. Esta desaceleración del crecimiento poblacional representa una declinación en la tasa de incremento de la población. Si el número de organismos excede la capacidad de carga, la tasa de crecimiento de la población se hace negativa y la población disminuye. Finalmente, la población se estabiliza y oscila alrededor del tamaño máximo que el ambiente puede soportar. Este modelo de crecimiento de la población, representado por una curva en forma de S se denomina gráficamente sigmoide y en general se llama ***logístico***.
Mas aun, el modelo según esta ecuación es mas amplio, pues lo anterior sucede siempre que el numero inicial del tamaño poblacional sea menor que la mitad de la capacidad de carga, en cuyo caso, ese numero medio representa el punto de inflexión, es decir, donde cambia la aceleración del crecimiento de la población. Por otro lado si el numero del tamaño inicial de la población esta entre la mitad de la capacidad de carga y la capacidad de carga misma, el crecimiento tiende al valor de K pero sin oscilar, mientras que un tercer caso ocurre, si el numero inicial es mayor que la capacidad de carga, la población decrece hasta estabilizarse en la capacidad de carga, sin oscilar. En la siguiente grafica describimos estos tres casos, donde x_E es el valor de equilibrio dado por la capacidad de carga:



La ecuación logística también es de variables separables y su solución es la función:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{k - N_0}{N_0} \right) e^{-rt_0}}$$

donde N_0 es el tamaño de la población en el tiempo inicial t_0.

EJERCICIOS:

3) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables:

a) **(EO)** $y' - 3x^2 = 2x + 1$ b) $y' = \sqrt{y-1}$ c) **(EO)** $yy' - x = 0$

d) **(EO)** $\frac{y'}{y} = 2$ e) **(EO)** $y' + \frac{y}{x} = 0$ f) $yy' = 1 + y^2$

g) $e^x y' - \frac{1}{e^y} = 0$ h) $xy' = \ln x$

4) **(EO)**Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones y luego una solución particular:

a) $y' \frac{1}{y} + x = 0$; encontrar la solución particular tal que para $x = 2$ es $y = 1$.

b) $y' + 3x = 0$; encontrar la solución particular tal que para $x = -2$ es $y = 3$.

- **Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas**

Una ecuación diferencial se dice lineal de primer orden homogénea si tiene la forma $y' + yP(x) = 0$, donde $P(x)$ es una función continua, x la variable dependiente y y' la derivada de la función incógnita y.

En efecto es lineal en la derivada por ser su potencia igual a uno, de primer orden por estar hasta la primera derivada y homogénea por estar igualada a cero.

La solución es inmediata pues se resuelve mediante variables separables:

$$y' = -yP(x) \Rightarrow y' \frac{1}{y} = -P(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \frac{1}{y} = -P(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

Integrando la última expresión:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\ln y = -\int P(x)dx$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}$$

Así se tiene la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea.

Ejemplo Ilustrativo 6: Resolver la a ecuación diferencial $y' + 2xy = 0$.

Solución: Aquí $P(x) = 2x$, entonces tenemos $y' + 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

$$dy = -2xydx$$

$$\frac{dy}{y} = -2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int xdx$$

Integrando ambos miembros: $\ln y = -2\frac{x^2}{2}$

En consecuencia la solución es: $y = e^{-x^2+C}$

EJERCICIOS:

5) Resolver las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de primer orden:

a) **(EO)** $y' + y\frac{2}{x} = 0$ b) **(EO)** $y' + y\frac{1}{x} = 0$ c) $y' - y\frac{2}{x+1} = 0$

- **Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas**

Una ecuación diferencial se dice lineal de primer orden no homogénea si tiene la forma $y' + yP(x) = Q(x)$, donde $P(x)$ es una función continua, $Q(x)$ es otra función que no se anula en todo su dominio, x la variable dependiente y y' la derivada de la función incógnita y.

En efecto, también es lineal en la derivada por ser su potencia igual a uno, de primer orden por estar hasta la primera derivada y no homogénea por estar igualada a una expresión no nula.

Presentaremos aquí la formula que expresa la función solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea, esta es:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

Ejemplo Ilustrativo 7: Resolver la a ecuación diferencial $y' + y\frac{2}{x} = x^3$.

Solución: Aquí $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = x^3$. Aplicaremos la formula, por lo tanto es útil calcular $\int P(x)dx$, pues deberemos conocer $e^{\int P(x)dx}$ y $e^{-\int P(x)dx}$

En efecto: $\int P(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln x = \ln x^2$, de esta manera:

$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2$ y $e^{-\int P(x)dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$

Reemplazando en la formula de la solución general:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right] = \frac{1}{x^2}\left[\int x^3.x^2dx + C\right] = \frac{1}{x^2}\left[\int x^5dx + C\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{x^6}{6} + C\right] = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$$

EJERCICIOS:

6) Resolver las siguientes ecuaciones lineales de primer orden:

a) **(EO)** $y' + y\frac{2}{x} = x^2$ b) **(EO)** $y' + y\frac{1}{x} = x^3 - 3$

c) $y' - y\frac{2}{x+1} = (x+1)^3$ d) $y' - y\frac{1}{x} = x^2 + 3x - 2$

7) Encontrar la solución general de la siguiente ecuación: $y' - y\frac{2}{x} = x + 1$

Luego encontrar la solución particular tal que para $x = 1$ es $y = 1$.

- **Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas con coeficientes constantes**

Las ecuaciones diferenciales así denominadas tienen la forma $ay'' + by' + cy = 0$, donde y, y', y'' son respectivamente, la función incógnita, y su primera y segunda derivada. Mientras que a, b, c, los coeficientes son cantidades constantes. De hecho es fácil ver que es homogénea, y se dice de segundo orden, pues es ese el mayor orden de diferenciación presente en la ecuación.

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales de este tipo las siguientes:

$$2y'' + 4y' + 3y = 0 \ , \qquad -5y'' + \frac{3}{4}y' + \sqrt{5}y = 0$$

Para resolver una ecuación de este tipo, formamos la ecuación característica, que es una ecuación algebraica de segundo grado que se denota con una incógnita z y resuelve según los distintos casos que ya conocemos:

1. Sus dos raíces son reales y distintas $z_1 \neq z_2$
2. Sus dos raíces son reales e iguales $z_1 = z_2$
3. Sus dos raíces son complejas conjugadas $z_1 = m + in$ y $z_2 = m - in$

Para cada uno de los casos la solución general de la ecuación diferencial tiene formas particulares, por lo que se las presentan por separado a continuación.

1. **Raíces reales y distintas** $z_1 \neq z_2$**.** La solución general es: $y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}$

Ejemplo Ilustrativo 8: Resolver la a ecuación diferencial $2y'' + 2y' - 12y = 0$.

Solución: La ecuación característica es $2z^2 + 2z - 12 = 0$, resolviendo se tiene las raíces características $z_1 = 2$ y $z_2 = -3$, en consecuencia la solución general esta dada por la función:
$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

2. **Raíces reales e iguales** $z_1 = z_2$**.** La solución general es: $y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 x e^{z_1 x}$

Ejemplo Ilustrativo 9: Resolver la a ecuación diferencial $-y'' + 6y' - 9y = 0$.

Solución: La ecuación característica es $-z^2 + 6z - 9 = 0$, resolviendo se tiene las raíces características iguales $z_1 = z_2 = 3$, en consecuencia la solución general esta dada por la función:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

3. **Raíces complejas conjugadas** $z_1 = m + in$ y $z_2 = m - in$. La solución general es:
$$y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}$$

Podemos usar la notación binomial $z_1 = m + in$ y $z_2 = m - in$, en la expresión anterior, o bien la fórmula de Euler, que establece:

$$e^{m+in} = e^m (\cos n + isen\ n)$$

con lo cuál la solución general queda:

$$y = C_1 e^{(m+in)x} + C_2 e^{(m-in)x} = C_1 e^{mx}(\cos nx + isen\ nx) + C_2 e^{mx}(\cos nx - isen\ nx)$$

$$y = e^{mx}[\cos nx(C_1 + C_2) + isen\ nx(C_1 - C_2)]$$

Ejemplo Ilustrativo 10: Resolver la a ecuación diferencial $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Solución: La ecuación característica es $z^2 - 4z + 5 = 0$, resolviendo se tiene las raíces características complejas conjugadas $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 2 - i$ en consecuencia la solución general esta dada por la función:

$$y = e^{2x}[\cos x(C_1 + C_2) + isen\ x(C_1 - C_2)]$$

Este último tipo de ecuación es frecuente en problemas reales que tienen que ver con una situación de estabilidad del fenómeno que se modela.

EJERCICIOS:

8) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

a) **(EO)** $y'' - 6y' + 8y = 0$
b) **(EO)** $6y'' - 17y' - 3y = 0$
c) **(EO)** $10y'' + 9y' + 2y = 0$
d) $y'' - \frac{5}{2}y' - 6y = 0$
e) $9y'' - 12y' + 4y = 0$
f) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$
g) $16y'' - 40y' + 25y = 0$
h) $y'' + 2y' + y = 0$

- **Aplicación Biológica**

9) **(EO) (AB** Una herida sana en forma tal que t días a partir del lunes el área de dicha herida ha venido decreciendo a razón de $-3(t+2)^{-2}$ centímetros cuadrados por día. Si el martes el área de la herida era de $2\,cm^2$:

a. ¿cuál fue el área de la herida el lunes?

b.¿cuál es su área anticipada para el viernes si continúa sanando con la misma rapidez?

10) **(EO) (AB** La población de una cierta ciudad ha venido creciendo a razón de $400(t+1)^{-1/2}$ personas por año, t años después de 2001. Si la población era de 6000 habitantes en 2004:

a. ¿cuál fue la población de 2001?

b. ¿cuál es la población que se espera para 2009 si continúa creciendo a la misma intensidad?

11) **(EO) (AB** En los primeros 10 días del mes de diciembre, una célula vegetal creció de tal manera que t días después del 1 de diciembre el volumen de la célula crecía a razón de $(12-t)^{-2}$ micrómetros cúbicos por día. Si para el 3 de diciembre el volumen de la célula era de $3\,\mu m^3$, ¿cuál fue su volumen para el 8 de diciembre?.