GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJOS PRACTICOS N° 2

Objetivos:
Lograr que el Alumno:

- **Actualice el manejo algebraico de sistemas de ecuaciones en los distintos conjuntos numéricos.**
- **Interprete gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones.**
- **Adquiera la destreza de resolver sistemas de ecuaciones lineales.**
- **Reconocer y aplicar correctamente métodos de resolución de un SEL en Problemas de Aplicación.**

Contenidos:

- **A) Sistemas de ecuaciones lineales.**
- **B) Sistemas de ecuaciones lineales en forma triangular.**
- **C) Sistemas equivalentes. Operaciones elementales.**
- **D) Sistemas de ecuaciones que se reducen a triangulares. Método de eliminación de Gauss.**
- **E) Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.**
- **F) Ejercicios y Problemas con Aplicaciones a la Biología.**
- **G) Método de Determinantes: Regla de Cramer**

Actividades:

A) Sistemas de ecuaciones lineales

Dadas dos o más ecuaciones lineales con iguales incógnitas, es necesario frecuentemente obtener las soluciones comunes a todas las ecuaciones. Esto es obtener las soluciones en forma simultánea de todas las ecuaciones.
Así por ejemplo dadas las ecuaciones $2x+3y=13$ y $3x-8y=7$ podemos resolver a cada uno por separados o bien interesarnos por las soluciones comunes, en tal caso decimos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales, que se denota de la forma:

$$\begin{cases} 2x & +3y & =13 \\ 3x & -8y & =7 \end{cases}$$

Si bien reconocemos que cada ecuación por separado tiene infinitas soluciones, la solución común es única en este caso: $x = 5$ y $y = 1$. Por lo tanto para un sistema de ecuaciones con n incógnitas, la solución es una n –upla.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, en adelante S.E.L., primero veremos una forma particular: los S.E.L. en forma triangular.

B) Sistemas de ecuaciones lineales en forma triangular

Dada una ecuación lineal con varias incógnitas, decimos que una variable es la **primera incógnita** si es la primera que tiene su coeficiente no nulo.
Así, en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, si en la primera ecuación la primera incógnita es la primera variable del sistema, y la primera incógnita de la segunda ecuación es la segunda variable del sistema diremos que el sistema esta en forma triangular.

Por ejemplo el siguiente S.E.L. es triangular:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ \quad 3y = -6 \end{cases}$$

Para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas un ejemplo es:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 8 \\ \quad -3y + 2z = -2 \\ \quad\quad -2z = 6 \end{cases}$$

En general podemos decir que un sistema de ecuaciones lineal está en forma triangular, si el número de ecuaciones y el de incógnita es igual, y además, si en la primera ecuación del sistema, la primera variable del sistema es la primera incógnita, en la segunda ecuación la segunda variable del sistema es la primera incógnita, y así sucesivamente, hasta que en la ultima ecuación la última variable del sistema es la primera incógnita de la ecuación.

Resolver un sistema en forma triangular tiene sus ventajas, por un lado podemos resolver cada ecuación por separado, en forma ordenada, desde abajo hacia arriba, pues la ultima es una ecuación con una sola incógnita, en donde su solución es única. Con esa solución y reemplazando su valor en la ecuación anterior, o sea la anteúltima, esta se convierte también en una ecuación con una sola incógnita, … y continuando el proceso hacia arriba llegamos a la primera. Finalmente se tiene una única solución para el sistema.

Ejemplo 1: Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma triangular, hallar su solución:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2t = 9 \\ \quad 5y - z + 3t = 1 \\ \quad\quad 7z - t = 3 \\ \quad\quad\quad 2t = 8 \end{cases}$$

Solución: De la última ecuación se tiene $t = 4$, y sustituyendo hacia arriba aparecen los otros valores, así se tiene: $7z = 3 + 4$; es decir:

$$z = 1$$

Luego: $5y = 1 - 3.4 + 1$ Entonces : $y = -2$

Finalmente, $2x = 3\,(-2) - 5.\,1 + 2\,.4 + 9$
$2x = -6 - 5 + 8 + 9$, esto es: $x = 3$

El proceso utilizado en el ejemplo anterior se denomina sustitución hacia arriba y permite decir que el sistema tiene una única solución.

EJERCICIOS

1.- Mencione cuando un sistema de ecuaciones lineales tiene la forma triangular. Escriba un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales en forma triangular con cinco ecuaciones. ¿Cuántas incógnitas tiene el sistema que escribió?.

2.- Resolver los siguientes sistemas en forma triangular:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ 4y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 7y = 24 \\ 3y = 16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 5y = 14 \\ -3y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 8y + z = 35 \\ y - 5z = 10 \\ 3z = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 5y + 6z = 12 \\ 5y + 2z = -6 \\ 2z = -4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ -22y + z = 24 \\ z = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x - 3y + 3z = 8 \\ -4y + 12z = 10 \\ -3z = 9 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2t = 9 \\ 5y - z + 3t = 1 \\ 7z - t = 3 \\ 3t = 12 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + 5y + z + 3t = 12 \\ 3y + 6z + 7t = 5 \\ 4z - 2t = 4 \\ 5t = 15 \end{cases}$

C) Sistemas equivalentes. Operaciones elementales.

Dado dos S.E.L. pueden tener el mismo conjunto solución, en tal caso se dice que los sistemas son ***equivalentes***. Si el sistema esta en forma triangular sabemos que su solución es única, mientras que si no esta en forma triangular se puede buscar un sistema triangular equivalente, con el cual conoceremos su solución. No todo sistema tiene uno equivalente que sea triangular.
La transformación en un sistema triangular se puede realizar a través de las llamadas *operaciones elementales*
Existen tres operaciones elementales, ellas son:

i) A partir de un sistema se obtiene otro equivalente si se intercambia dos ecuaciones entre sí.
ii) A partir de un sistema se obtiene otro equivalente si se multiplica una ecuación por una constante no nula y se la reemplaza en el otro sistema.
iii) A partir de un sistema se obtiene otro equivalente si se suma dos ecuaciones de un sistema y se la coloca en el otro sistema.

D) Método de eliminación de Gauss

Dada un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, la solución puede plantearse aplicando el sistema de eliminación siguiente, mediante la cuál reducimos el sistema a una sola ecuación sencilla con una sola incógnita. El método, que fue usado en el ejemplo 2, consiste en dos pasos:

i) Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a una ecuación múltipla no nula de la otra, de forma tal que una de las incógnitas se elimine.

ii) Resolver la nueva ecuación para la única incógnita y luego sustituir el valor obtenido para esa incógnita en una cualquiera de las ecuaciones dadas del sistema y obtener el valor de la otra incógnita.

D.1) Sistemas de dos Ecuaciones con dos incógnitas

Tomemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, sabemos que cada una de ellas tiene infinitas soluciones; podemos interesarnos en conocer si existen soluciones comunes a las dos ecuaciones. Esto es, deseamos conocer los pares de números reales k_1, k_2, que son solución tanto de la primera como de la segunda ecuación.

Se dice entonces que ambas ecuaciones forman un ***sistema de ecuaciones***. Consideramos el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero debe entenderse que el número de ecuaciones con el de incógnitas es independiente. Una ventaja de comenzar con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, está en que resulta práctico generalizar el método de resolución. Otra ventaja está en que existe una interpretación geométrica.

Sean dos ecuaciones lineales no degeneradas, con dos incógnitas que forman el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Sean k_1, k_2 las soluciones del sistema, es decir, soluciones de ambas ecuaciones. Existen tres casos que se describen geométricamente de la siguiente manera:

i) Si el sistema tiene ***una única solución***, los gráficos de cada ecuación lineal se cortan en un punto que es la solución.
ii) Si el sistema ***no tiene solución***, los gráficos de las ecuaciones lineales son rectas paralelas.
iii) Si el sistema tiene ***un número infinito de soluciones***, los gráficos de las ecuaciones son rectas que coinciden.

Ejemplo 2: Al resolver los siguientes sistemas de ecuaciones usaremos el método de eliminación que presentaremos en el parágrafo siguiente:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 8x + 6y = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 1 \end{cases}$

Solución:

a) Reescribimos el sistema dado: $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$

Multiplicando por 2 la segunda ecuación y restando esto de la primera ecuación se tiene la nueva segunda ecuación:

$$-5y = 0$$

La segunda ecuación tiene una sola incógnita y su solución es y=0; reemplazando en la primera ecuación éste valor obtenido se tiene: $2.x + 3.0 = 6$
Es decir , $2x = 6$, o bien , $x = 3$.

Luego, el par $(3,0)$ es solución del sistema dado.

b) Resolveremos ahora el sistema: $\begin{cases} 4x & +3y & =2 \\ 8x & +6y & =4 \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por dos y restándole la segunda ecuación, queda:

$$\begin{cases} 4x & +3y & =2 \\ 0x & +0y & =0 \end{cases}$$

La segunda ecuación es degenerada con término independiente nulo, por lo tanto existen infinitas soluciones dadas por pares (a,b) de números reales. La segunda ecuación se elimina del sistema y las soluciones de la primera ecuación son las soluciones del sistema. Es decir, nos queda:

$$4x+3y=2$$

donde la variable libre y se parametriza, haciendo: $y=a$.
Luego: $4x+3a=2$

Finalmente, la solución es el par $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}a;a\right)$, para todo a real.

c) El sistema a resolver es: $\begin{cases} 3x & -2y & =5 \\ 6x & -4y & =1 \end{cases}$

Tomando dos veces la primera ecuación y restando la segunda nos queda:

$$\begin{cases} 3x & -2y & =5 \\ 0x & +0y & =9 \end{cases}$$

La segunda ecuación es degenerada e igualada a una expresión no nula, por lo tanto, carece la ecuación de solución, y por ello el sistema no tiene solución.

D.2) Sistemas que se reducen a forma triangular

Revise el método de eliminación Gaussiana, recordando las operaciones elementales por filas, y observe para sistemas de más ecuaciones e incógnitas:

Ejemplo 3: Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, hallar la forma triangular equivalente, a través de operaciones elementales por filas.

$$\begin{cases} 4x & +3y & +z & =15 \\ x & -y & -2z & =2 \\ 2x & -2y & +z & =4 \end{cases}$$

Solución: Reescribiendo el sistema dado, analizamos que operaciones podemos aplicar para eliminar las primeras incógnitas en la segunda y tercera ecuación.

$$\begin{cases} 4x & +3y & +z & =15 \\ x & -y & -2z & =2 \\ 2x & -2y & +z & =4 \end{cases}$$

Vemos que podemos restar de la primera ecuación cuatro veces la segunda ecuación para eliminar la primera incógnita en la segunda ecuación; mientras que la primera ecuación menos dos veces la tercera, nos permite eliminar la primera incógnita en la tercera ecuación.

$$\begin{cases} 4x + 3y + z = 15 \\ 7y + 9z = 7 \\ 7y - z = 7 \end{cases}$$

Ya eliminada la primera incógnita de la segunda y tercera ecuación, vamos a eliminar la segunda incógnita de la tercera ecuación. Para esto último consideramos que el coeficiente de la segunda incógnita en ambas ecuaciones son iguales por lo tanto restamos de la segunda ecuación la tercera.

$$\begin{cases} 4x + 3y + z = 15 \\ 7y + 9z = 7 \\ 10z = 0 \end{cases}$$

Así con el sistema en forma triangular se obtiene las soluciones

$$x = 3;\ y = 1;\ z = 0.$$

EJERCICIOS

3.- Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ x + 9y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ 5x + 2y - 3z = -13 \\ x - 2y + 5z = 15 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - y + 5z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 3 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ x - 2z = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

E) Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si todas las constantes independientes del sistema son nulas.
Si el sistema homogéneo se reduce a la forma triangular, la única solución es nula.

Ejemplo 4: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Solución: Al eliminar la primera incógnita de las ecuaciones segunda, tercera y cuarta, nos queda:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$$

Eliminando ahora y de la tercera y cuarta ecuación, tenemos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 6z = 0 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

De donde se puede eliminar la última ecuación, siendo el sistema dado equivalente al siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases}$$

Las incógnitas toman todas el valor cero.

EJERCICIOS

4.- Determinar si cada uno de los sistemas siguientes pueden reducirse a la forma triangular, si esto es posible, la única solución es nula:

a) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \\ 5x + 6y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + 5y - 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - 3y - z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + z - 2t = 0 \\ 5x - y + 2z + t = 0 \end{cases}$

F) Ejercicios y Problemas de Aplicación

Ejemplo 5: Un Químico cuenta con dos soluciones ácidas. Una contiene 15% de ácido, y la otra 6%. ¿Cuántos centímetros cúbicos de cada solución debe usar para obtener 400 cm^3 de una solución con 9% de ácido?.

Solución: Sean A y B las dos soluciones del problema, y las cantidades que debemos calcular las representamos por x e y respectivamente. Así, una condición es que ambas completen los 400 cm^3, es decir: $x + y = 400$. Por otro lado el contenido del ácido por solución es del 15% y 6% respectivamente; lo que nos lleva a otra ecuación que debe satisfacerse:

$$15\,x + 6\,y = 9\ .\ 400$$

Ambas ecuaciones forman el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 15x + 6y = 3600 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se encuentra que: $\frac{400}{3}cm^3$ de solución al 15% y $\frac{800}{3}cm^3$ de solución al 6% son las cantidades que requieren para obtener la cantidad propuesta.

Ejemplo 6: Si la temperatura de ebullición del agua a una altitud h pies sobre el nivel del mar es t grados Celsius, entonces, $h = a + bt + ct^2$. Sabiendo que el agua hierve a 100ºC al nivel del mar, a 95ºC a una altitud de 7400 pies y a 90ºC a 14550 pies; determine los valores de a, b y c.

Solución: Debemos hallar los valores de las tres constantes que determinan la altura h para una determinada temperatura t. Sabiendo como varia ésta temperatura según los tres datos, se pueden escribir estas ecuaciones como: $a + 100\,b + 10000\,c = 0$; $a + 95\,b + 9025\,c = 7400$ y $a + 90\,b + 8100\,c = 14550$.

El sistema entonces es:

$$\begin{cases} a + 100b + 10000c = 0 \\ a + 95b + 9025c = 7400 \\ a + 90b + 8100c = 14550 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se tiene: $a = 91000$, $b = -310$ y $c = -6$.

EJERCICIOS

Para cada uno de los siguientes enunciados, plantee el sistema de ecuaciones correspondiente y resuelva:

5.-Una aleación contiene 85% de oro, y la otra 45% de oro.¿Cuántos gramos de cada una de las aleaciones deben combinarse para obtener 50gr. de una aleación que contenga 70% de oro?.

6.-Un laboratorista tiene dos soluciones ácidas. Una contiene 25% de ácido y la otra contiene 8% de ácido.¿Cuántos centímetros cúbicos de cada solución deben utilizarse para obtener 200 de una solución ácida al 12%?.

7.-Un tanque contiene una mezcla de insecticida y agua en la cuál se tiene 5litros de insecticida y 25 litros de agua. Un segundo tanque también contiene 5 litros de insecticida pero sólo 15 litros de agua. Si se desea tener 7,5 litros de una mezcla de la cuál el 20% es insecticida, ¿cuántos litros deben tomarse de cada tanque?.

8.-Un criadero de peces proporciona 3 tipos de alimento a peces de tres especies que habitan juntas. Cada pez de la especie X consume por semana 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie Y consume por semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 unidades del B y 5 unidades del C. El consumo semanal promedio de la especie Z es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del B y 5 unidades del alimento C. Cada semana se vierten al agua 30.000 unidades del alimento

A, 20.000 del alimento B y 55.000 del alimento C. Si se supone que los peces consumen todo el alimento.¿Cuántos ejemplares de cada especie se están criando?

9.-En un laboratorio se experimenta la combinación de tres nuevos antibióticos a tres grupos de ratas. A cada rata del grupo R se le inyecta 2ml del antibiótico A, 1 ml del antibiótico B y 2 ml del antibiótico C. A cada rata del grupo S se le inyectan 3ml del antibiótico A, 4ml del B y 5ml del C. Finalmente a las del grupo T se le inyectan 2ml. del A,1ml. del B y 5ml del C. Si al fin de la semana se inyectan 25ml del antibiótico A, 20 ml. del B y 55ml. del C.¿cuántas ratas hay al fin de la semana en cada grupo?.

10.-En un zoológico se gastó $30 por día en alimentos para las jirafas, $20 por día para las llamas y $20 por día para los antílopes. Además, para el tratamiento veterinario el gasto diario fue de $20 para las jirafas, $30 para las llamas y $20 para los antílopes. Finalmente, en limpieza de las jaulas de los animales mencionados se gastó por día $10 en cada grupo. El registro de gastos del zoológico indica un total de $340 por alimento , $320 por tratamiento veterinario y $140 por limpieza. Calcular el número de días que se realizaran cada una de las actividades registradas.

11.-Una persona compra en un acuario 100 frascos de alimentos para peces de 20gr., 30 gr., y 42gr. Además el número de frascos de 30gr. que compró fue 10 menos que el total combinado de los otros dos frascos. Si el total de alimento es 3kg., ¿cuántos frascos compró de cada uno?.

G) Método de Determinantes: Regla de Cramer

Vamos ahora a presentar un método para resolver S.E.L. de igual número de ecuaciones que de incógnitas, conocido como Regla de Cramer, y que consiste en resolver determinantes.
Tomemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x & -4y & =3 \\ 5x & +8y & =-1 \end{cases}$$

Formamos un primer determinante con los coeficientes de las incógnitas de las ecuaciones, y lo llamamos Δ (delta); entendiendo por determinante a una disposición ordenada de elementos entre barras, en igual numero de filas y columnas. Para nuestro caso se trata de dos filas y dos columnas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Ahora resolvemos el determinante, que para un determinante de orden 2, se obtiene de multiplicar los números que se hallan en la diagonal que baja de izquierda a derecha, y luego restar a ese número el producto de los números que se hallan en la diagonal que baja de derecha a izquierda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 - (-4) \times 5 = 16 + 20 = 36$$

Si este número es distinto de cero, podemos continuar con el método, pues en caso de ser cero, el método no nos permite decir si existe solución.

Ahora formamos dos nuevos determinantes, en el primero que llamaremos Δx, reemplazaremos la primera columna, o sea los coeficientes de x por los términos independientes. En el segundo, que llamamos Δy, se reemplaza los coeficientes de la segunda columna por los términos independientes, es decir:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\times 8 - (-4)\times(-1) = 24 - 4 = 20$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1) - 3\times 5 = -2 - 15 = -17$$

Finalmente los valores de las incógnitas se obtienen como cocientes de sus respectivos determinantes divididos por el determinante inicial, es decir:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \qquad\qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-17}{36}$$

El método se extiende fácilmente para un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +.... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +.... & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ ..... & .... & .... & ...... & ...... \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +.... & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Solo falta saber como se resuelve un determinante de más elementos, esto es de tercer orden (tres filas y tres columnas) o de orden mayor. Únicamente trabajaremos con orden dos y tres, por lo que presentaremos la resolución de un determinante de orden tres, conocida como ***Regla de Sarrus:***

Construimos el determinante de orden tres, y repetimos las dos primeras filas debajo de la tercera. Ahora bajamos de izquierda a derecha multiplicando los tres elementos posibles, las tres veces. Luego bajamos multiplicando de derecha a izquierda, y a estos tres productos nuevos le cambiaremos de signo. Finalmente se suma los seis productos, los tres iniciales, con el signo obtenido, y los tres últimos con el signo cambiado como dijimos. El resultado es el determinante de orden tres.
Para guiarnos sigamos el diagrama siguiente, observando las flechas rojas para los tres primeros productos y las azules, que son las que cambian de signo:

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right| = a.e.i + d.h.c + g.b.f - c.e.g - f.h.a - i.b.d$$

En el sistema de n ecuaciones con n incógnitas tendremos el determinante Δ de los coeficientes de las incógnitas más n determinantes Δx_i, uno por cada incógnitas x_i, entonces la solución del sistema esta dada por la propiedad:

Propiedad: El sistema de n ecuaciones con n incógnitas x_i tiene solución única si Δ no es nulo, en cuyo caso la solución viene dada por:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \text{ para las } n \text{ incógnitas } x_i$$

Ejemplo 7: Resolver el siguiente de ecuaciones lineales por la Regla de Crámer.

$$\begin{cases} 2x & +4y & +6z & =18 \\ 4x & +5y & +6z & =24 \\ 3x & +y & -2z & =4 \end{cases}$$

Solución: Vamos a calcular el primer determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$, como es distinta de cero, podemos continuar.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

Por lo tanto: $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{24}{6} = 4 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-12}{6} = -2 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{18}{6} = 3$

Esta Regla de Crámer para resolución de sistemas de ecuaciones lineales se refiere a sistemas con igual número de ecuaciones que de incógnitas, y únicamente da la solución cuando D no es nulo. En caso de ser nulo, la expresión anterior no nos dice nada, pues habría división en cero.

EJERCICIOS:

12.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando la Regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 4x & +3y & =-6 \\ 3x & -2y & =4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & -y & =-8 \\ 6x & +3y & =0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x & -2y & -5z & =8 \\ x & +5y & +3z & =0 \\ -5x & -y & +2z & =-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x & +2y & -3z & =2 \\ 2x & -3y & +z & =1 \\ 5x & -4y & -z & =4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x & -2y & +4z & =2 \\ 2x & -3y & +5z & =3 \\ 3x & -4y & +6z & =7 \end{cases}$

SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS

2.- a) $x = \frac{11}{2}$; $y = 3$ **b)** $x = \frac{40}{3}$; $y = \frac{16}{3}$ **c)** $x = \frac{82}{9}$; $y = -\frac{8}{3}$

d) $x = -\frac{463}{9}$; $y = \frac{70}{3}$; $z = \frac{8}{3}$ **e)** $x = \frac{11}{2}$; $y = -\frac{2}{5}$; $z = -2$

f) $x = 3$; $y = -1$; $z = 2$ **g)** $x = -\frac{35}{8}$; $y = -\frac{23}{2}$; $z = -3$

h) $x = 3$; $y = -2$; $z = 1$; $t = 4$ **i)** $x = \frac{1565}{9}$; $y = -\frac{31}{3}$; $z = \frac{5}{2}$; $t = 3$

3.- a) $x = 3$; $y = -5$ **b)** $x = 1$; $y = 0$ **c)** $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{6}$

d) $x = \frac{12}{7}$; $y = -\frac{2}{7}$ **e)** $x = -1$; $y = 2$; $z = 4$

f) $x = -3$; $y = -5$; $z = 0$ **g)** $x = 3$; $y = 1$; $z = 2$

h) Sin solución **i)** Sin solución **j)** Sin solución

4.- a) $x = y = 0$ **b)** $x = y = z = 0$ **c)** $x = y = z = t = 0$

5.- 31,25 gr de aleación al 55% y 18,75 gr de aleación al 45%.

6.- 47,059 cm^3 de solución ácido al 25% y 152,941 cm^3 de solución al 8%.

7.- 4,5 litros del primer tanque y 3 litros del segundo.

8.- 5.000 ejemplares de la especie A, 2.000 de la B y 7.000 de la C.

9.- Ninguna rata del grupo R, 3 de S y 8 de T.

10.- 6 jirafas, 4 llamas y 4 antílopes.

11.- 30 frascos de 20gr, 45 de 30 gr y 25 de 42 gr.

12.- a) $x = 0$; $y = -2$ **b)** $x = -2$; $y = 4$ **c)** $x = -1$; $y = 2$; $z = -3$

d) Sin solución **e)** Sin solución