GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJOS PRACTICOS Nº 19

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:

- **Adquiera la destreza en el Cálculo a través de Técnicas de Integración**
- **Interprete y distinga expresiones para integrar por Tablas**
- **Resuelva Problemas de Aplicación**

CONTENIDOS:

- **Integración por Primitiva**
- **Integración por Partes**
- **Integración mediante Tabla de Integración**

NOTA:

- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al segundo parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDADES:

El presente tema, tiene como objeto, resolver integrales, definidas e indefinidas, por medio de técnicas, las cuáles dan practicidad a la operación. Las técnicas a emplear son:

A) Por primitivas
B) Por partes
C) Uso de tablas de integrales.

En cada uno de los casos que presentaremos, es importante destacar la conveniencia de cada técnica a efectos de obtener el resultado deseado sin mayores esfuerzos.

A) Por primitiva: Se dice que una integral se resuelve por su primitiva cuando se conoce la antidiferencial de la expresión dada, es decir se resuelve en forma directa. Esto ocurre si se tiene algunas de las conocidas formas:

$$\int du = u + C \qquad \int a\,du = au + C \qquad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \qquad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad \int e^u du = e^u + C$$

$$\int sen\, u\, du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\, du = sen\, u + C$$

Ejemplo 1: Resolver la siguiente integral $\int 2x^2 \sqrt{x^3+1}dx$

Solución: En forma directa no podemos hallar la antidiferencial de la función dada, por lo debemos definir una nueva variable, sea ésta el radicando dado.

Sea $u = x^3 + 1$, su diferencial es: $du = 3x^2 dx$, o bien , $\frac{du}{3} = x^2 dx$

Entonces reemplazando se tiene:

$$\int 2x^2\sqrt{x^3+1}dx = 2\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = 2\int \sqrt{u}\frac{du}{3} = \frac{2}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

En la última expresión ya estamos de condición de aplicar la primitiva de $u^{\frac{1}{2}}$, según la tercera regla dada arriba:

$$\int 2x^2\sqrt{x^3+1}dx = \frac{2}{3}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{9}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

B) Por Partes: A partir de la derivada de un producto de dos funciones: $d(u.v) = u\,dv + v\,du$ y escribiendo: $u\,dv = d(u.v) - v\,du$, se obtiene al integrar ambos miembros, la expresión:

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

Tal fórmula se denomina **integración por partes**, y permite hallar la integral de una función dada a través de otra más directa, siempre que la función dada se pueda expresar como el producto de otras dos, de la cuál una de ellas se integra en forma más directa. Una buena elección de las partes permitirá resolver en forma más sencilla, pero una mala elección nos llevará a una integral más difícil aún que la dada.

Ejemplo 2: Resolver la siguiente integral $\int xe^x dx$

Solución: Tratemos de elegir una variable u tal que el resto de la expresión sea el diferencial de la otra variable, de manera que esta resulte fácilmente diferenciable.

Sea entonces $u = x$ y $dv = e^x dx$
Con esta elección resulta $du = dx$ y $v = \int e^x dx = e^x + C_1$
Usemos ahora la formula presentada arriba:

$$\int xe^x dx = x\left(e^x + C_1\right) - \int \left(e^x + C_1\right)dx = xe^x + xC_1 - \int e^x dx - C_1\int dx =$$
$$= xe^x + xC_1 - e^x - C_2 - C_1 x = xe^x - e^x - C_2$$

Como puede observarse la primera constante no aparece en el resultado final. Esto puede aplicarse de ahora en mas y solo dejar como constante de antidiferenciación a la que resulta de la ultima integral.

Debe tenerse cuidado en la elección de las variables, pues una mala elección permite arribar a una nueva integral que es mas difícil de resolver que la original.

La reiteración de ésta técnica durante un ejercicio es factible si no se llega a una forma directa en un primer intento. Esto se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3: Resolver la siguiente integral $\int x^2 e^x dx$

Solución: Definamos las variables $u = x^2$ y $dv = e^x$. Así $du = 2xdx$ y $v = e^x$
Por lo tanto: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$

La integral de la derecha no es antidiferenciable por primitiva, pero al menos es mas facil que la dada. Debemos aplicar nuevamente la regla de integral por partes definiendo nuevamente dos variables. Sean éstas:
$\tilde{u} = x$ y $d\tilde{v} = e^x$, nos queda: $d\tilde{u} = dx$ y $\tilde{v} = e^x$. Esto como vimos en el ejemplo anterior es

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x - \tilde{C}$$

Volviendo al ejercicio dado: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x - \tilde{C}\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

EJERCICIOS

1)Evalúe las integrales indefinidas siguientes por partes:

a) (EO) $\int xe^{3x} dx$ **b) (EO)** $\int xe^{-2x} dx$ **c) (EO)** $\int x3^x dx$ **d)** $\int x10^{\frac{x}{2}}\, dx$

e) (EO) $\int \ln x\, dx$ **f) (EO)** $\int \log_{10} x\, dx$ **g) (EO)** $\int \ln 2x^2 dx$ **h)** $x^2 \ln x\, dx$

i) (EO) $\int (\ln x)^2 dx$ **j)** $\int xa^x dx$ **k) (EO)** $\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$ **l)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

2)Evalúe las integrales definidas:

a) (EO) $\int_0^2 x^2 3^x dx$ **b) (EO)** $\int_{-1}^2 \ln(x+2) dx$ **c)** $\int_1^3 x^2 (\ln x)^2 dx$

d) (EO) $\int_0^2 xe^{2x} dx$ **e) (EO)** $\int_0^{\pi/3} sen(3x)\cos x dx$ **f)** $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(2x) dx$

C) Uso de tablas de Integrales:

El objetivo en este punto es reconocer formas de la función a integrar, que responden a las que figuran en las tablas, y que por lo tanto pueden ser utilizadas directamente con solo reconocer cuales son las constantes o números que intervienen en la expresión.

Ejemplo 4: Resolver la siguiente integral $\int \frac{dx}{5 - 3x^2}$

Solución: Debemos identificar la forma de la función y comparar con las dadas en tablas de manera que respondan según variables y constantes dadas.
Para el ejercicio dado, el integrando es fraccionario. En el numerador esta solo el diferencial, en este caso dx, que permite distinguir cual es la variable diferenciada, o sea x. Mientras que en el denominador existe una diferencia entre dos expresiones, de las cuales solo contiene a la variable, la cual esta al cuadrado.
Con este reconocimiento la formula a usar es:

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

Es decir, $u^2 = 3x^2$ y $a^2 = 5$.

En consecuencia: $u = \sqrt{3}x$, $du = \sqrt{3}dx$, $dx = \frac{du}{\sqrt{3}}$, $a = \sqrt{5}$

$$\int \frac{dx}{5-3x^2} = \int \frac{du}{\sqrt{3}} \frac{1}{5-3x^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{5}}{\sqrt{3}x-\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{15}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{5}}{\sqrt{3}x-\sqrt{5}}\right| + C$$

EJERCICIOS

3) **(EO)** Evalúe las siguientes integrales. Sugerencia: utilice una de las fórmulas de la 6 a la 13.

a) $\int \frac{x}{2+3x} dx$ **b)** $\int \frac{x}{(5-2x)^3} dx$ **c)** $\int \frac{x^2}{(6-x)^2} dx$

4) **(EO)** Evalúe las siguientes integrales. Sugerencia: utilice una de las fórmulas de la 14 a la 23.

a) $\int x\sqrt{1+2x}dx$ **b)** $\int x^2\sqrt{1+2x}dx$ **c)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x}}$

5) **(EO)** Evalúe las siguientes integrales. Sugerencia: utilice una de las fórmulas de la 24 a la 26.

a) $\int \frac{dx}{4-x^2}$ **b)** $\int \frac{dx}{x^2-25}$

6) **(EO)** Evalúe las siguientes integrales. Sugerencia: utilice una de las fórmulas de la 27 a la 38.

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$ **b)** $\int \sqrt{4x^2+1}dx$

7) **(EO)** Evalúe las siguientes integrales. Sugerencia: utilice una de las fórmulas de la 39 a la 48.

a) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$ **b)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-9x^2}}$

8) **(EO)** Evalúe las siguientes integrales. Sugerencia: utilice una de las fórmulas de la 49 a la 58.

a) $\int x^4 e^x dx$ **b)** $\int x^3 \ln(3x) dx$ **c)** $\int 5x^2 e^{-2x} dx$

9) Evalúe las siguientes integrales definidas usando la tabla.

a) (EO) $\int_1^2 \frac{dx}{x(5-x^2)}$ **b) (EO)** $\int_0^3 \frac{x}{(1+x)^2} dx$ **c)** $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+16}}$

d) (EO) $\int_1^2 x^4 \ln x dx$ **e)** $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$