GUIA DE ACTIVIDADES Y TRABAJOS PRACTICOS N° 18

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:

- **Reconozca Técnicas de Diferenciación para aplicarlas en las Funciones Exponenciales y Logarítmicas**
- **Reconozca la integración en Funciones Exponenciales y Logarítmicas**
- **Resuelva Problemas de Aplicación**

CONTENIDOS:

- **Diferenciación e Integración de Funciones Exponenciales y Logarítmicas**
- **Aplicaciones de la diferenciación e integración de Funciones Exponenciales y Logarítmicas**

NOTA:

- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al segundo parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDADES:

Realizaremos un estudio dirigido de la diferenciación e integración de las funciones que contienen expresiones exponenciales y logarítmicas. Procedamos a cumplir las indicaciones dadas en la presente guía, desarrollando los ejemplos que se ilustran.

a) Derivadas de la Función Logaritmo:

Iniciemos nuestra tarea con el tema **Derivadas de Funciones Logarítmicas**. Nos detendremos a estudiar cada una de las expresiones que se mencionan en las Propiedades 1 y 2, primeramente:

Lea y analice la primera propiedad, que permite hallar la derivada del logaritmo de una función u de base b:

Propiedad 1: Si u es una función diferenciable de x, entonces: $D_x[\log_b u] = \dfrac{\log_b e}{u} D_x u$

Téngase en cuenta que la base b, es un número natural cualquiera, que en el caso de ser el número irracional e, se tiene la función logaritmo natural.

Ejemplo 1: Sea la función $y = \log_4 x^3$.Calculemos la derivada de la función respecto de x.

Solución: Comparemos la expresión dada con el enunciado anterior, aquí $b = 4; u = x^3$.

Entonces, la derivada es: $D_x y = D_x[\log_4 x^3] = \dfrac{\log_4 e}{x^3} D_x(x^3) = \dfrac{\log_4 e}{x^3} 3x^2 = \dfrac{3\log_4 e}{x}$

Para el caso de logaritmo natural, la derivada esta dada en la propiedad 2:

Propiedad 2: Si u es una función diferenciable de x entonces $D_x[\ln u] = \frac{1}{u} D_x u$

Ejemplo 2: Consideremos la función: $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, calcule su derivada.
Solución: Ahora la función es logaritmo natural, y u es la expresión entre paréntesis. Usando la notación anterior, se tiene:

$$D_x[\ln(x^2 + 3x)] = \frac{1}{x^2 + 3x} D_x[x^2 + 3x] = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

La función logaritmo está definida para valores positivos, por ello es que necesitamos justificar con la notación de valor absoluto, el argumento de la función de la siguiente manera: $D_x(\ln|x|)$

Para desarrollar esta derivada se sustituye $\sqrt{x^2}$ por $|x|$:

$$D_x(\ln|x|) = D_x\left(\ln\sqrt{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} D_x\left(\sqrt{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Propiedad 3:. Si u es una función diferenciable de x entonces $D_x(\ln|u|) = \frac{1}{u} D_x u$.

EJERCICIOS

1) **(EO)** Diferencie las funciones dadas y simplifique el resultado:

a) $f(x) = \ln(4 + 5x)$ b) $f(x) = \ln\sqrt{4 + 5x}$ c) $f(x) = \ln(8 - 2x)$ d) $f(x) = \ln(8 - 2x)^2$

e) $f(x) = \ln(3x + 1)^2$ f) $f(x) = [\ln(3x + 1)]^2$ g) $f(x) = \log_{10} \frac{x}{x + 1}$ h) $f(x) = \frac{\log_{10} x}{x}$

b) Integrales que dan la Función Logaritmo:

La integración de una expresión, que tiene por resultado la función logaritmo natural, se menciona a continuación:

Propiedad 4: $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$

Ejemplo 5: Evaluar $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$

Solución: Debemos reconocer la función u y su diferencial. Sea $u = x^3 + 1$ resulta $du = 3x^2 dx$, o bien: $\frac{du}{3} = x^2 dx$. Reemplazando y usando la propiedad 4:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \int \frac{du}{3}\frac{1}{u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\mathbf{ln}|u| + C = \frac{1}{3}\mathbf{ln}\left|x^3+1\right| + C$$

EJERCICIOS

2) **(EO)** Evalúe las integrales indefinidas:

a) $\int \frac{dx}{3-2x}$ b) $\int \frac{dx}{7x+10}$ c) $\int \frac{3x dx}{x^2+4}$ d) $\int \frac{3x^2 dx}{5x^3-1}$

3)Evalúe las integrales definidas:

a) **(EO)** $\int_3^5 \frac{2x}{x^2-5}dx$ b) **(EO)** $\int_4^5 \frac{x}{4-x^2}dx$ c) $\int_2^4 \frac{dx}{x\mathbf{ln}^2 x}$ d) $\int_2^4 \frac{\mathbf{ln}\, x}{x}dx$

c) Derivadas e Integrales de la Función Exponencial:

Pasemos ahora a ver la diferenciación e integración de funciones exponenciales. Las propiedades siguientes nos indica como efectuar la derivada de una función que es potencia de base b con exponente u, donde u es función de x y luego para la base e.

Propiedad 5: Si u es una función diferenciable de x entonces $D_x\left(b^u\right) = b^u\, \mathbf{ln}\, b D_x u$

Ejemplo 6: Evaluar la derivada de $f(x) = 5^{2x}$

Solución: Aquí b es igual a 5 y u es $2x$. Aplicamos la propiedad 5 y tenemos:

$$D_x\left(5^{2x}\right) = 5^{2x}\,\mathbf{ln}\,5 D_x(2x) = 5^{2x}\,\mathbf{ln}\,5 \cdot 2 = 2 \cdot 5^{2x}\,\mathbf{ln}\,5$$

En forma idéntica, la propiedad 6 da la derivada cuando la base de la potencia es el número e.

Propiedad 6: Si u es una función diferenciable de x entonces $D_x\left(e^u\right) = e^u D_x u$

Ejemplo 7: Evaluar la derivada de $f(x) = e^{5x}$

Solución: Aquí la base es e y u es $5x$. Aplicamos la propiedad 6 y tenemos:

$$D_x\left(e^{5x}\right) = e^{5x} D_x(5x) = e^{5x} \cdot 5 = 5 \cdot e^{5x}$$

EJERCICIOS

4)Obtenga la derivadas de las funciones dadas:

a) **(EO)** $f(x) = e^{3x}$ b) **(EO)** $g(x) = 2^{5x}$ c) **(EO)** $f(x) = e^{-6x}$ d) **(EO)** $g(x) = 10^{-4x}$

e) $f(x) = e^{-4x^3}$ f) $g(x) = 2^{-x^2+5x}$ g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ h) $g(x) = 5x^3 4^x$

Las propiedades siguientes dan las integrales de potencias con una base arbitraria b, y con el número e, respectivamente.

Propiedad 7: Si b es cualquier número positivo diferente de 1, $\int b^u\,du = \dfrac{b^u}{\ln b} + C$

Ejemplo 8: Evaluar $\int 4^{3x+1}\,dx$

Solución: Siendo la base 4, debemos reconocer la función u y su diferencial. Sea $u = 3x+1$ resulta $du = 3dx$, o bien: $\dfrac{du}{3} = dx$. Reemplazando y usando la propiedad 7:

$$\int 4^{3x+1}\,dx = \int 4^u\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int 4^u\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{4^u}{\ln 4} + C = \frac{4^{3x+1}}{3\ln 4} + C$$

Propiedad 8: $\int e^u\,du = e^u + C$

Ejemplo 9: Evaluar $\int e^{5x}\,dx$

Solución: Siendo la base e, debemos reconocer la función u y su diferencial. Sea $u = 5x$ resulta $du = 5dx$, o bien: $\dfrac{du}{5} = dx$. Reemplazando y usando la propiedad 8:

$$\int \frac{e^{5x}}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int e^u\,\frac{du}{5} = \frac{1}{4\cdot 5}\int e^u\,du = \frac{1}{20}\cdot e^u + C = \frac{e^{5x}}{20} + C$$

EJERCICIOS

5)Evalúe las integrales indefinidas:

a) **(EO)** $\int e^{3x}\,dx$ b) **(EO)** $\int 3^{4x}\,dx$ c) **(EO)** $\int e^{-2x}\,dx$ d) **(EO)** $\int 10^{-4x}\,dx$

e) $\int x^2 e^{2x^3}\,dx$ f) $\int 3xe^{4x^2}\,dx$ g) $\int \dfrac{1+e^{2x}}{e^x}\,dx$ h) $\int 3^t e^t\,dt$

6)Evalúe las integrales definidas:

a) **(EO)** $\int_0^3 \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx$ b) **(EO)** $\int_1^2 \dfrac{e^x}{e^x + e}$