GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO N° 14

OBJETIVOS:
Lograr que el Alumno:
- **Interprete el concepto de Diferencial**
- **Resuelva ejercicios y problemas de aplicación.**

CONTENIDOS:

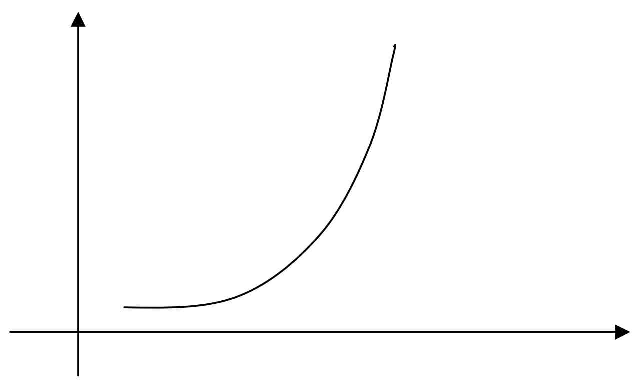
- **Diferencial**
- **Antidiferenciación**
- **Aplicaciones en el Trazo de la Gráfica de una Función**

NOTA:
- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura que han presentado la primera parte de la carpeta completa, presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al segundo parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDAD:

- **Diferencial**

A partir del siguiente enunciado complete la grafica: en la figura, se tiene una curva de una función $y = f(x)$. La recta PT es tangente a la curva en $P(x,y)$, Q es el punto $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, y la distancia dirigida MQ es Δy. En la figura, Δx y Δy son positivos, sin embargo, podrían ser negativos. Para un valor pequeño de $|\Delta x|$, la pendiente de la recta secante PQ y la pendiente de la recta tangente en P son aproximadamente iguales, es decir: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$

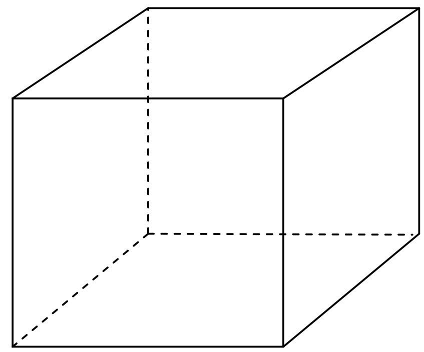


Complete las siguientes definiciones:

Definición 1: Si la función f está definida por $y = f(x)$, entonces la diferencial de y, denotada por dy, está dada por ....donde x está en el .... de f' y Δx es el ....de x.

Definición 2: Si la función f se define por $y = f(x)$, entonces la diferencial de x, denotada por dx, está dada por: .... donde Δx es el ....de x, y x es cualquier numero en el .... de f'.

Ejemplo 1: Se determinó que la arista de un cubo mide 15 cm con un margen de error de 0,01 cm. Por medio de diferenciales, calcular el error aproximado al obtener la medida de:
a) el área de una de las caras,
b) del volumen.



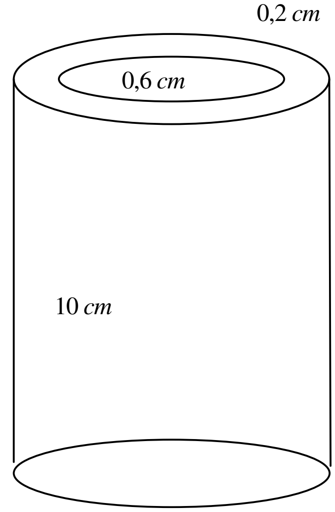
Solución: Realicemos la figura del cubo, en el cuál observamos que siendo x la cantidad de cm del arista y llamando dx el error de 0,01 cm, el área A tiene un error aproximado dA, mientras que el volumen V tiene un error aproximado dV, tomándose a éstos como incrementos del área y volumen, respectivamente.

$$A = x^2 cm^2 \qquad V = x^3\ cm^3$$

a) $dA = 2x dx\ cm^2 = 2\times 15\times 0{,}01 cm^2 = 0{,}3 cm^2$

b) $dV = 3x^2 dx\ cm^3 = 3\times 15^2 \times 0{,}01\ cm^3 = 6{,}75\ cm^3$

Ejemplo 2: Una arteria, considerada geométricamente como un cilindro abierto, tiene aproximadamente 2 mm de espesor. Si el radio interno es de 0,6 cm y el largo considerado es de 10cm, obtenga con diferenciales la cantidad aproximada de tejido que cubre la arteria.

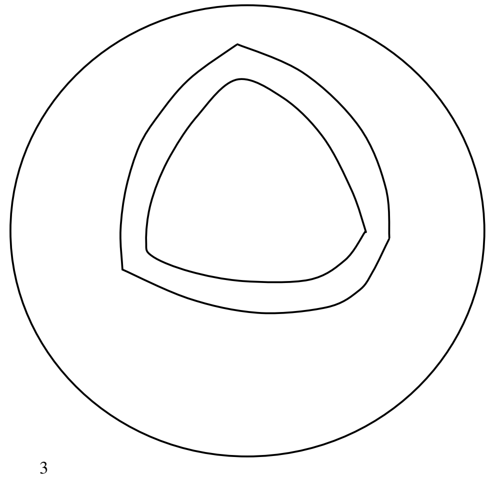


Solución: Para nuestro modelo geométrico considerado, el volumen del tejido se toma como un incremento del volumen del cilindro hueco. Así haciendo r el número de cm del radio de la circunferencia interior, V el volumen en del volumen del cilindro hueco se tiene:

$$V = \pi\, r^2 h\ cm^3 = \pi \times 0{,}6^2 \times 10\ cm^3 = 3{,}6\pi\ cm^3$$

$$dV = 2\pi\, rh\, dr\ cm^3 = 2\times\pi\times 0{,}6\times 10\times 0{,}2\ cm^3 = 2{,}4\pi\ cm^3$$

Ejemplo 3: Tomemos el modelo esférico para describir una naranja, suponiendo que el radio de la misma es de 10 cm, y que la cáscara tiene aproximadamente un espesor de 0,4 cm. Hallar el volumen de la cáscara de la naranja.



Solución: Haciendo que el volumen de la cáscara sea el incremento del volumen de la esfera dada por la naranja expresada en $V\ cm^3$, y siendo el radio de tal esfera de $r\ cm$, entonces:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3\ cm^3$$

$$dV = 4\pi\, r^2\ dr\ cm^3 = 4\pi\times 10^2 \times 0{,}4\ cm^3 = 160\pi\ cm^3$$

Por lo tanto el volumen de la cáscara es de $160\ \pi\ cm^3$.

EJERCICIOS

1) (EO)(AB) El tallo de cierto hongo es de forma cilíndrica y un tallo de $2\ cm$ de altura y radio r tiene un volumen de $V\ cm^3$, donde $V = \pi r^2 h$.Utilice la diferencial para obtener el incremento aproximado en el volumen del tallo cuando el radio crece de $0{,}4$ a $0{,}5\ cm$.

2) (EO)(AB) Una quemadura en la piel de una persona es de forma de circunferencia tal que si r centímetros es el radio y $A\ cm^2$ es el área, entonces $A = \pi r^2$.Utilice la diferencial para calcular la reducción aproximada en el área de la quemadura cuando el radio disminuye de 1 a $0{,}8\ cm$.

- **<u>Antidiferenciación</u>**

Conocemos operaciones inversas, tal el caso de: la adición y la sustracción en el conjunto de los números reales, otro par de operaciones que son inversas es la multiplicación y la división. En los pares de operaciones anteriores se observa que la operación directa es conmutativa, razón por la cuál la operación inversa es única; esto no ocurre cuando se trata de la potenciación, en efecto, aquí las operaciones opuestas son dos: radicación y logaritmo.

Ahora vamos a expresar la operación inversa de la diferenciación: antidiferenciación.

Complete la siguiente definición:

Definición 3: Una función F se llama **antiderivada** de una función f, en un intervalo I, si ....= .... para todo valor de x en I.

Complete los siguientes enunciados:

- Si f y g son dos funciones tales que sus derivadas son iguales, es decir, $f'(x) = g'(x)$, para todos los valores de x en un intervalo I, entonces existe una constante k, tal que ...., para todo x del intervalo I.

- Si F es una antiderivada particular de f en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f en I esta dada por ……+…., donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 4: Calcular la antidiferencial siguiente:

Solución: Usando las expresiones para antidiferenciar una función resulta:

$$\int (4x+3)dx = \int 4xdx + \int 3dx = 4\int xdx + 3\int dx = 4\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 3(x + C_2)$$

$$= 2x^2 + 4C_1 + 3x + 3C_2 = 2x^2 + 3x + C$$

Observación: del ejemplo se ve que las constantes parciales que aparecen en cada antidiferencial pueden agruparse finalmente, y en tal caso, la podemos mencionar recién al finalizar la expresión.

En general debemos considerar enunciados de la antidiferenciación, operación también llamada integración, que a continuación puede completar:

Propiedad 1: $\int dx = x +$ **......**

Propiedad 2: $\int af(x)dx = a........$, siendo a una _______.

Propiedad 3: Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones definidas en un mismo intervalo entonces:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int .... + \int ....$$

Propiedad 4: Sean n funciones $f_1(x), f_2(x),...., f_n(x)$ definidas en un mismo intervalo, donde se dan las constantes $c_1, c_2,...., c_n$, se verifica que:

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)]dx = ...\int .... + ...\int .... + ...\int ....$$

Propiedad 5: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, siempre que n sea distinto de ______ .

Ejemplo 5: Calcular $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$

Solución: Escribiendo la raíz como potencia de exponente fraccionario resulta

$$\int \sqrt[5]{x^3}\, dx = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C$$

Cambio de Variable

Muchas de las antiderivadas no se pueden obtener directamente mediante su antidiferencial, sin embargo, muchas veces es posible calcular una antiderivada mediante un ***cambio de variables.***

Ejemplo 6: Hallar la antidiferencial $\int 3x^2 \sqrt{2 + x^3}\, dx$

Solución: Definimos una nueva variable $\begin{array}{l} u = 2 + x^3 \\ du = 3x^2 dx \end{array}$

Reemplazando $\int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$

Asi $\int 3x^2 \sqrt{2 + x^3}\, dx = \frac{2}{3}\left(2 + x^3\right)^{3/2} + C$

Regla de la Cadena de la Antidiferenciación

Sea g una función diferenciable de x, dada por $u=g(x)$, y cuya imagen es un intervalo I. Supóngase que f es una función definida en I y F es una antiderivada de f en I. Entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Propiedad 6: Si g es una función diferenciable, entonces si $u=g(x)$

$$\int [g(x)]^n g(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

siempre que n sea distinto de 1.

EJERCICIOS Revise las propiedades de antidiferenciación y apliquelos en los siguientes ejercicios:

3) Halle la antidiferenciaciones siguientes:

a) (EO) $\int 3x^4 dx$ **b) (EO)** $\int (3x^5 - 2x^3)dx$ **c)** $\int (t^2 - 2t + 3)dt$

d) $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)dx$ **e) (EO)** $\int (x^{3/2} - x)dx$ **f) (EO)** $\int \sqrt{x}(x+1)dx$

g) (EO) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)dx$ **h) (EO)** $\int \sqrt{1-4y}\,dy$ **i) (EO)** $\int \sqrt{5r+1}\,dr$

j) $\int 5x \sqrt[3]{(9-4x^2)^2}\,dx$ **k)** $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

4) (EO) Calcule $\int (2x+1)^3 dx$ por dos métodos distintos:

a) desarrolle el cubo del binomio y aplique teoremas correspondientes.
b) haga la sustitución $u = 2x + 1$

5) (EO) Calcule $\int \sqrt{x-1}\,dx$ por dos métodos distintos:

a) haga la sustitución $u = x - 1$
b) haga la sustitución $v = \sqrt{x-1}$

Respuestas de algunos ejercicios

1) El incremento aproximado en el volumen del tallo es $dV = 0{,}16\pi\ cm^3$

2) La reducción del área de la quemadura es $dA = 0{,}4\pi\ cm^2$

3) **a)** $\frac{3}{5}x^5 + C$ **b)** $\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + C$ **e)** $\frac{3}{5}\sqrt{x^5} - \frac{\sqrt{x}}{2} + C$ **f)** $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

g) $\frac{-1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$ **h)** $\frac{-1}{6}(1-4y)^{3/2} + C$ **i)** $\frac{2}{15}(5r+1)^{3/2} + C$