GUIAS DE ACTIVIDADES Y TRABAJO PRACTICO N° 10

OBJETIVOS:

Lograr que el Alumno:

- **Distinga el comportamiento de una función a través de valores extremos**
- **Interprete en concepto de función creciente y decreciente**
- **Adquiera la destreza de graficar funciones aplicando el criterio de la primera derivada.**
- **Resuelva ejercicios y problemas de aplicación.**

CONTENIDOS:

- **Valores extremos de una función**
- **Funciones Crecientes y Decrecientes**
- **Criterio de la primera derivada**
- **Aplicaciones en el Trazo de la Gráfica de una Función**

NOTA:

- Los ejercicios indicados con **(EO)** son ejercicios obligatorios y formaran la carpeta de trabajos prácticos.
- Es requisito para los alumnos aspirantes al Régimen de Promoción de la Asignatura presentar esta guía de trabajos prácticos con todos los ejercicios (EO) desarrollados hasta el día siguiente al primer parcial.
- Los ejercicios de aplicación Biológica se indican con **(AB).**

ACTIVIDAD:

EJERCICIOS

- **Valores extremos de una función**

1) **(EO)** Recuerde el concepto de valor crítico de una función y obténgalos en las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$ **b)** $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$

c) $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$ **d)** $f(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 4x\right)^{1/3}$

e) $h(x) = \dfrac{x-3}{x+7}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

2) **(EO)** Halle los valores extremos de cada función en el intervalo que se indica, en caso de ser posible, y calcule los valores de x en los cuáles ocurren los valores extremos. Trace la gráfica de la función en ese intervalo.

a) $f(x) = 4 - 3x$ $\quad (-1,2]$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x}{9 - x^2}$ $\quad]-3,2[$

c) $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$ $\quad [2,5]$ **d)** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $\quad]-2,2[$

- **Funciones Crecientes y Decrecientes: Criterio de la Primera Derivada:**

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto $]a,b[$, que contiene al número c, y supóngase que su derivada f' existe en todos los puntos del intervalo, excepto posiblemente en c.

a) si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su punto extremo derecho, y si $f'(x) < 0$, para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tenga a c como su punto extremo izquierdo, entonces f tiene un valor máximo relativo en c. Ver fig. 1.

b) si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su punto extremo derecho, y si $f'(x) > 0$, para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tenga a c como su punto extremo izquierdo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c. Ver fig. 2.

Figura 1

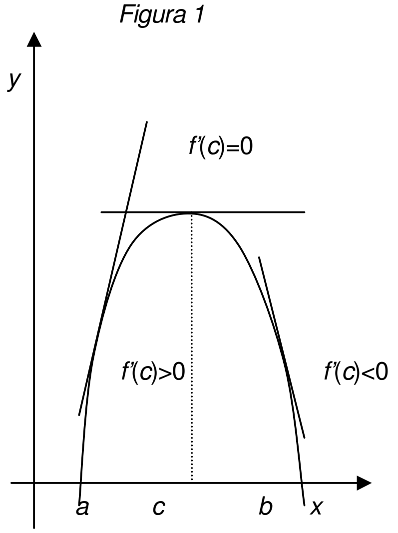
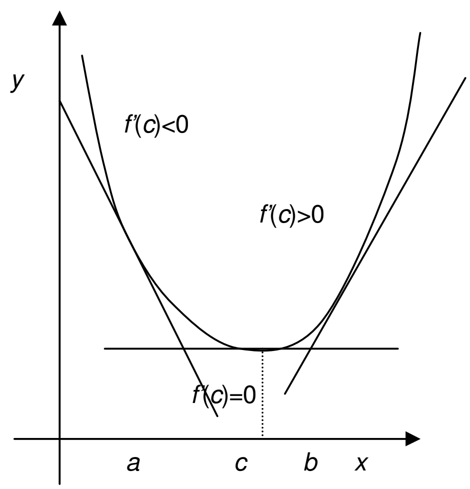


Figura 2



- **Prueba de la Primera Derivada:**

Para determinar los extremos relativos de una función f, se presenta la llamada prueba de la primera derivada:
1°) Encuentre $f'(x)$.
2°) Halle los números críticos de f, es decir, los valores de x, para los cuáles la derivada se anula o bien no existe.
3°) Aplique el criterio de la primera derivada.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, encontrar los extremos relativos de f aplicando el criterio de la primera derivada. Determinar los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos, así como los intervalos en los cuales f es creciente y en los cuales es decreciente.

Solución: Primero calculamos la derivada, la cuál es: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
Buscamos a donde se anula la derivada, y resulta ser en los puntos con $x = 1$ y $x = 3$.
Así los números críticos son 1 y 3. Aplicamos el criterio que lo resumimos en el siguiente cuadro:

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x<1$		+	f crece
$x=1$	5	0	f tiene un máximo relativo
$1<x<3$		-	f decrece
$x=3$	1	0	f tiene un mínimo relativo
$x>3$		+	f crece

Finalmente, con la información obtenida del cuadro, trace la gráfica.

EJERCICIOS:

3) 1°.-obtenga los extremos relativos de f aplicando la prueba de la primera derivada.
2°.-determine los valores de x en los que ocurren extremos relativos.
3°.-determine los intervalos en los cuáles f es creciente.
4°.-determine los intervalos en los cuáles f es decreciente.
5°.-trace la gráfica correspondiente.

a) (EO) $f(x)=x^2-4x-1$ **b) (EO)** $f(x)=3x^2-3x+2$

c)(EO) $f(x)=x^3-9x^2+15x-5$ **d)(EO)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

e) $g(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

f) (EO) $f(x)=\begin{cases}2x+9 & si \quad x\le 4\\ 13-x & si \quad x>4\end{cases}$ **g)** $g(x)=\begin{cases}3x+5 & si \quad x<-1\\ x^2+1 & si \quad -1\le x<2\\ 7-x & si \quad x\ge 2\end{cases}$

4) Complete y conteste los siguientes enunciados:

i) Se dice que una función diferenciable f es creciente en un intervalo I si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 dentro del intervalo I, donde $x_1 ....x_2$ resulta $f(x_1)........f(x_2)$

De la grafica correspondiente a la definición anterior se tiene que la primera derivada de f, siendo creciente en el intervalo I , ésta resulta ser ....

ii) En forma análoga escriba la correspondiente definición de función decreciente.

Con la grafica de una función decreciente en un intervalo, se tiene que la primera derivada de f resulta ser ....

5) (AB) Durante un acceso de tos hay una reducción en el radio de la tráquea de una persona. Supóngase que el radio normal de la traquea es R centímetros y el radio de ésta durante un acceso de tos es de r centímetros, donde R es una constante y r una variable. La velocidad del aire que pasa por la traquea puede mostrarse como función de r y si $V(r)$ cm/s es esta velocidad, entonces

$$V(r)=kr^2(R-r) \text{ con } r\in\left[\frac{1}{2}R,R\right]$$

donde k es una constante positiva. Determinar el radio de la traquea durante un acceso de tos para el cuál la velocidad del aire a través de ésta es la máxima.