TELECÁTEDRA
Una propuesta e-learning

E-clase de PRECÁLCULO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

¿Qué es Telecátedra?

Telecátedra es un servicio académico anexo a la Cátedra de Análisis Matemático I de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCa, que año año se realiza con los alumnos que ingresan a las carreras de Ingeniería. Un servicio académico no convencional en el sentido de los medios que usará para comunicarse con sus eventuales beneficiarios. En efecto es una propuesta de e-learning que irá cubriendo, a lo largo de todo el año, aspectos y temas diferentes, todos de utilidad para un mejor aprendizaje de los usuarios, especialmente de los alumnos de la Universidad, en general y de los alumnos de la Facultad de Tecnología, en particular.

La aparición de la informática hacia mediados del siglo pasado supuso un cambio enorme en relación al almacenamiento y archivo de datos así como a la evolución de las comunicaciones. En 1960 nace otra tecnología de punta, la de Internet, que se convierte en una revolución sin precedentes en la comunicación y transmisión de información. Sus efectos se han dejado sentir en la educación y ya en el siglo XXI somos incapaces de concebir la educación al margen de las Tecnologías de Información y Comunicación ó TIC, pues en la red es posible leer, escuchar, ver, interactuar en tiempo real o asincrónico, enviar documentos de todo tipo, formar una comunidad y sin olvidar que su capacidad es ilimitada.

La educación es un pilar básico de la sociedad que va más allá del aprendizaje en el aula y de la formación tradicional a distancia. Surge, gracias a Internet, el fenómeno del aprendizaje electrónico, que permite el acceso a la red con fines educativos de formación académica y profesional.

En general se llama e-learning al conjunto de tecnologías, aplicaciones y servicios orientados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje a través de Intranet/Internet.

E-learning implica un modelo pedagógico innovador e imaginativo que fomenta la adquisición de conocimientos de manera sistemática y que estimula la capacidad del estudiante de seguir su formación una vez que le ha sido abierto el camino.

A partir de esta página, la Cátedra de Análisis Matemático I propone a los alumnos ingresantes, a sus tutores y a cualquier lector interesado en el tema una propuesta de e-learning sobre matemática básica.

Los temas tratados son:

Los números. Los números para contar. Los números para medir. Los números para calcular.

Números enteros. Números fraccionarios. Números racionales. Números decimales. Operaciones. Números reales. Los números irracionales.

Ecuaciones. Ecuaciones de 1° grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones lineales. Ecuación de 2° grado. Propiedades de sus raíces.

Funciones. Clasificación y tipos de funciones.

Proporcionalidad. Proporcionalidad directa. Porcentaje. Proporcionalidad inversa.

Los cuerpos geométricos.

Algo sobre el teorema de Thales. Teorema de Pitágoras.

Las construcciones geométricas.

Estadística. Analizando información.

Las probabilidades. ¿La probabilidad se mide?

Todos los temas son abordados con situaciones problemáticas diversas, con problemas de la historia de la Matemática, juegos, curiosidades y paradojas. Y constituyen el andamiaje necesario para poder seguir eficientemente la asignatura….en suma, un PRECÁLCULO.

ISBN: 978-987-1341-52-8

La resolución de lo planteado garantiza el aprendizaje que será asistido on-line y que podrá ser autoevaluado por el estudiante con el apoyo y orientación del tutor que correspondiera. Servirá para reforzar lo desarrollado de manera convencional en el Curso de Nivelación.
Para finalizar, Telecátedra es una acción más del Programa que la Facultad se ha trazado para retener y graduar a sus alumnos, en el irrenunciable logro de la excelencia académica en la formación profesional de sus alumnos.
Magíster Olga Carabús
Profesora de Análisis Matemático I de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UN.Ca.

CARTA ABIERTA A LOS ALUMNOS INGRESANTES:

Estas líneas son para darles la bienvenida a quienes hoy desean comenzar a compartir TELECATEDRA, una propuesta de e-learning o aprendizaje on-line. Esto es una aprendizaje por intermedio de la comunicación electrónica.
Desde la Cátedra de Análisis Matemático I de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas se realiza este aporte destinado a los alumnos ingresantes, y a sus tutores, referido a la formación matemática básica, lo que se ha llamado Precálculo.
Podrás dirigirte por correo electrónico a la siguiente dirección: olca@arnet.com.ar para hacer las consultas necesarias o para solicitar la realización de algún foro de discusión sobre algunos de los temas.

La propuesta de esta e-clase, o clase por medio de la comunicación on-line, es una ejercitación en temas de matemática básica y está en consonancia con lo que se desarrollará en el Curso de Nivelación.

Los temas de matemática son los que considero indispensables para que tus estudios en la Facultad cualquiera sea la carrera que hayas elegido. También esta propuesta, tiene la intención de que vayas siendo capaz de autogestionar tu propio conocimiento y ejercitar tu juicio crítico.
Y significa un esfuerzo más que la Facultad está dispuesta a realizar para ayudarte a ingresar en las Carreras que ella tiene a cargo. Espero que sea de utilidad para tu preparación.
Para despedirme te digo: ¡Joven: el desafío está planteado!

Es cuestión de iniciar la partida. Tendrás todo el apoyo que necesites y solicites porque se establecerán los canales de comunicación entre los interesados a ingresar en alguna carrera y los docentes que tendrán a cargo la tarea de preparación para la admisión.

Esperamos tus preguntas, tus comentarios, tus sugerencias...

¡Manos a la obra! ¡Hasta siempre!

¡Y bienvenidos a la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCa!

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Magíster Olga Carabús
Profesora de Análisis Matemático I
de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas
de la de la Universidad Nacional de Catamarca

Los números. Números para contar y números para medir

Números para contar

Sé que hay nueve planetas. Puedo contar los alumnos de una clase o los años que he vivido...
Contamos con los **números naturales:** 1, 2, 3,....11,.....20,........100,......

Los números naturales sirven, también, para ordenar (numerar): decimos que la Tierra es el 3º (tercer) planeta teniendo en cuenta la distancia al sol o que tengo matemáticas en la 1ª hora de clase.

A veces para contar se requiere cantidades negativas. Por ejemplo el año –300 es el año 300 antes de Cristo ó tengo una deuda de 1000 pesos.

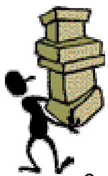
Estos son los **números enteros negativos.**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Números para expresar medidas.

Puedo medir el volumen o el peso o la superficie de un cuerpo o de una figura.

Son éstos los **números racionales**
Por ejemplo la superficie de una de estas cajas es de 2, 5 m^2;



la superficie de esta bandera de 120 dm^2;

el volumen de este recipiente es de 1,2 m^3 y la temperatura del agua es de 100 ºC.

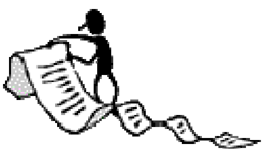
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Los números enteros son racionales

Números para calcular

Los números además de expresar cantidades y medidas sirven para operar con ellos, es decir, para calcular ciertas cantidades a partir de otras conocidas: ésta es la mayor de sus ventajas. El estudio de las operaciones aporta métodos de cálculo más cómodos y eficaces.

Para pensar y calcular



- Un día a las siete de la mañana el termómetro marcaba –8ºC. A lo largo de ésta la temperatura subió 14ºC y, durante la tarde, descendió la mitad de lo que había subido. ¿Qué temperatura marcaba el termómetro al atardecer?

- En un negocio nos encontramos con esta oferta: 1 disco: $7,50
  3 discos: $20,25

  ¿Qué descuento hacen por cada disco?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Los números naturales están ordenados. Esto permite representarlos sobre una recta del siguiente modo:

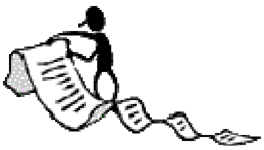
Origen 1 2 3 4 5 6 7

Los números naturales se pueden sumar y multiplicar y el resultado de esas operaciones siempre es un número natural.
Pero los números naturales no siempre pueden restarse. Por ejemplo si tengo en el Banco $2500 no puedo gastar $2800 si no quiero quedar con una deuda.
Los naturales y los correspondientes negativos, junto al 0 forman los números enteros y se representan

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Los números enteros pueden realizarse sumas, restas y multiplicaciones.

Para pensar y calcular
Si tienes calculadora úsala



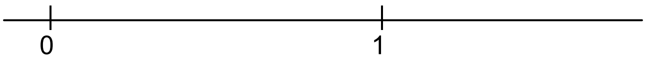
- La escalera de mi casa tiene 125 peldaños y una altura total de 25 metros. ¿Cuál será en cm, la altura de cada peldaño?

- Calcula la suma y la diferencia entre el mayor número de siete cifras y el menor número de siete cifras.

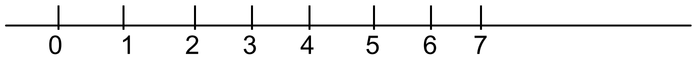
Números fraccionarios

Estos números son útiles para expresar las porciones de la unidad.
Son números fraccionarios 1/ 2; 1/3; 1/ 4;1 / 7; 3/ 5; 4/ 9 y 7 / 10.
Éstos son menores que la unidad y están representados en la recta entre 0 y 1.
Represéntalos acá.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

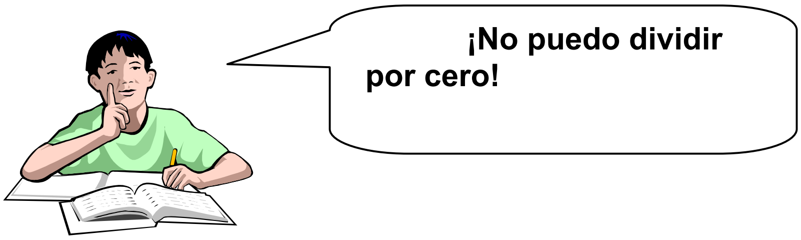


También son fraccionarios 11/ 2; 14/ 4 y 6/ 3. Represéntalos en la recta.



Números racionales

El conjunto formado por todos los números enteros y todos los fraccionarios se designa por **Q** (conjunto de los números racionales)
Los números racionales pueden expresarse como cociente entre dos números enteros:
- 7 / 5   = - 7 : 5 ; 4 = 4 : 1;
Pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, y el resultado es siempre un número racional. **La única operación que no puede hacerse es la división por cero.**



Si representáramos todos los números racionales sobre la recta, quedarían apretadísimos; basta decir que entre dos de ellos hay infinitos. Sin embargo, quedan aún muchísimos otros puntos de la recta sin llenar.

Operaciones con números racionales

Veamos como trabajar con fracciones.

Comparación:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Si quieres comparar dos fracciones puedes hacerlo a ojo en muchos casos. Por ejemplo, una fracción positiva es siempre mayor que una negativa; de dos fracciones que tienen el mismo denominador, es mayor la de mayor numerador; etc.

Pero cuando no estés seguro, debes buscar otras fracciones equivalentes a las que quieres comparar y que tengan el mismo denominador. Bastará comparar numeradores.

Comparamos, por ejemplo:

3/ 5 y 4/ 7: 3/ 5 = 21/ 35, 4 / 7 = 20 / 35 por lo tanto 3/ 5 > 4/ 7

Suma y resta.

Sumar y restar fracciones que tienen el mismo denominador es muy fácil:

3/ 5 –7/ 5 +12/5 = (3-7 +12)/ 5 = 8/ 5

Si no tienen el mismo denominador, se sustituyen por otras fracciones equivalentes y que tengan el mismo denominador

7 / 12 + 4/ 20 – 11/ 15 = 35/ 60 + 12/ 60- 44/60 = (35+12-44) / 60 = 3/ 60

Producto

El producto de dos fracciones es el producto de los numeradores sobre el producto de los denominadores

3/ 4 . 5/ 3 = (3 . 5) / (4. 3) = 15/ 12

3. 2/ 5 = (3. 2) / 5 = 6 / 5

Cociente

El cociente de dos fracciones es el producto de la primera por la inversa de la segunda

3/ 5 : 4/ 9 = 3/ 5 . 9 / 4 = 27 / 20

3 : 5 / 3 = 3 . 3 / 5 = 9 / 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

7 / 2 : 3 = 7 / 2 . 1 / 3 = 7 / 6

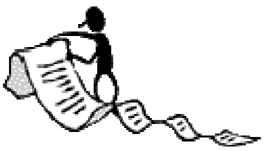
Simplificación

Simplificar una fracción es sustituirla por otra equivalente más sencilla. Esto puede realizarse cuando numerador y denominador se pueden dividir por un mismo número.

3/ 60 = 1/ 20; 15 / 12 = 5 / 4; 180 / 120 = 3 / 2

La simplificación puede ser realizada en varios pasos. Cuando una fracción no se puede simplificar más se dice que es irreducible. Por ejemplo: 1 / 20 y 5 / 4 son fracciones irreducibles.

Para pensar y calcular
Puedes usar la calculadora



- ¿Cuál es mayor 11/ 2 ó 12/ 13?
- De los números –3/ - 2; 2/ 3 ; ; -4 / 3 ; 5 / 7; -5; -1/-2; 5/4; y 5 / -6 indica cuáles son:

1. menores que cero
2. mayores que cero y menores que uno,
3. mayores que uno

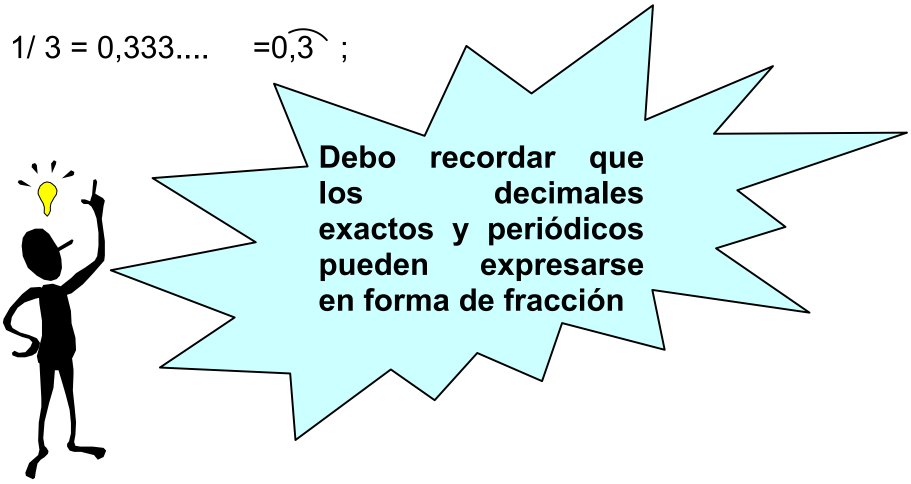
- Tres recipientes contienen agua: uno 50/ 20 de litro; el segundo 62/ 50 de litro y el tercero 33/ 25 de litro. ¿Qué recipiente contiene menos agua y cuál más?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Números decimales

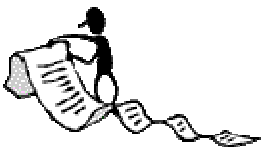
Los números racionales pueden expresarse en forma decimal. Así lo hace tu calculadora.
Por ejemplo: 5 / 6 =0, 8333......=0,$\overset{\frown}{8}$;

1/ 3 = 0,333.... =0,$\overset{\frown}{3}$;

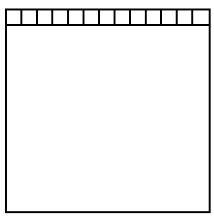


Potencias y raíces

Para pensar y calcular

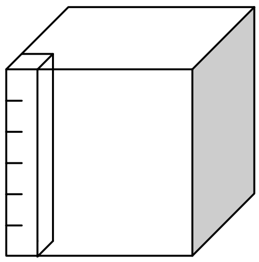


- El piso de una habitación es cuadrado y esta embaldosado con baldosas cuadradas y hay 13 baldosas por cada lado. ¿Cuántas baldosas hay en total



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

- Este depósito cúbico está lleno de cubitos como el de la figura. Si por cada arista van 6 cubitos. ¿Cuántos hay en total?



- Si la superficie de un cuadrado es de $144m^2$. ¿Cuánto vale su lado?

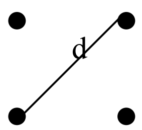
- Si el volumen de un cubo es de $1000cm^3$. ¿Cuánto vale su arista?

- Calculo en los casos que sea posible:

  a) $\sqrt{216}$; b) $\sqrt{-216}$; c) $\sqrt{400}$; d) $\sqrt{0{,}0025}$
- El ser vivo más pequeño es un virus que pesa alrededor de 10^{-21} kg y el más grande es la ballena azul que pesa aproximadamente $1{,}38 \times 10^5$ Kg. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?
- La pirámide de Keops tiene un volumen estimado de 2 500 000 m^3 y el lago Ness de 7,5 km^3. ¿Sabrías compararlos?
- Da valores a las letras para que se verifique que $(HE)^2 = SHE$

Los Números Reales

Hasta acá vimos los números racionales y operamos con ellos.
Resuelve: Une los puntos. ¿Qué figura obtienes?
Si cada lado mide 1 cm. ¿Cuánto vale su diagonal? Usamos el Teorema de Pitágoras para encontrar su valor.



$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

La diagonal mide $\sqrt{2}$ cm

El número $\sqrt{2}$ no es racional, es decir no puede expresarse como cociente de dos números enteros ni, por lo, tanto como decimal exacto o periódico.

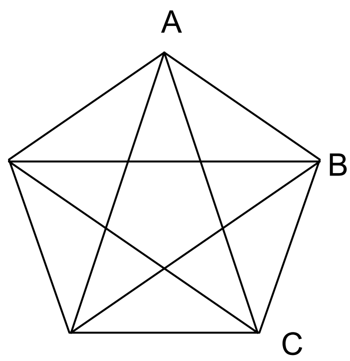
Un nuevo tipo de números: los irracionales

El número $\sqrt{2}$ es un número irracional. También son irracionales $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$, por ejemplo.

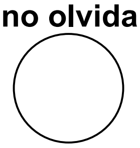
El número π es el irracional que necesitas para calcular la longitud de una circunferencia o el área de un círculo.
Su expresión decimal es 3,1415926535..... En la práctica se usan valores aproximados como 3,14 ó 3,1416.

El número Φ ó **número de oro** es también un número Irracional.

AC / AB = Φ

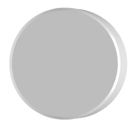


Para no olvidar



Longitud = π . diámetro

Área = π.(radio)^2



Superficie: = π.(radio)^2
Volumen=4/3 π.(radio)^3

π =3,1415926535

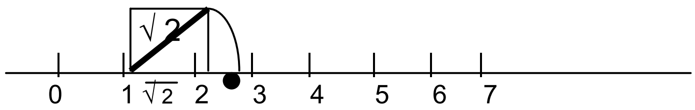
Tanto **π** como **Φ** eran números conocidos y usados por los griegos. El primero, como dijimos, muy útil en geometría y el segundo muy usado en el arte.
El número **e** es un número muy importante en las matemáticas. Su valor decimal es 2,718281...

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Aparece en ciertos procesos de crecimiento, por ejemplo el crecimiento de una población animal o vegetal, en la desintegración radioactiva y está en la curva llamada catenaria que es la que describe un hilo o cable flexible que pende sujeto sólo por sus extremos, como los cables del tendido eléctrico.

Los números irracionales sobre la recta

¿Cabrán todos los números irracionales en los huecos que, sobre la recta, dejaban los racionales?
Los puntos vacantes o vacíos de los números racionales que son infinitos, son ocupados por los irracionales.

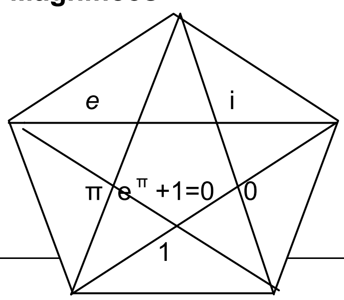


El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se llama conjunto de los números reales y se designa con **R**
Los números racionales a su vez incluyen a los números enteros, y éstos a los números naturales.
Los números reales llenan por completo la recta. Por eso se le llama **recta real.**

Para pensar y calcular

Un sorbito de matemática

Los Seis Magníficos

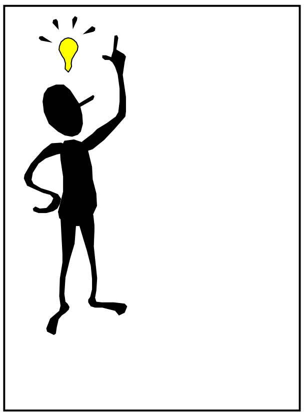


¿Y el que falta?
¿Los magníficos son todos reales?
¿Cuál no es? ¿Por qué?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Ecuaciones

La astucia de un amigo



Mi amigo me dijo:

- *Piensa un número*
- *Añádele 15*
- *Multiplica por 3 el resultado*
- *A lo que salga réstale 9*
- *Divide entre 3*
- *Resta 8*
- *Dime lo que sale*

Yo le dije:

- *32, mi amigo.*

Y mi amigo me dijo instantáneamente:

- *El número que pensaste fue el 28*

¿Cómo consigue mi amigo averiguarlo tan de prisa?

Para saber lo que mi amigo hizo tendremos que expresar, en lenguaje simbólico, todas las operaciones que ordenó que yo realizara. Pero... ¿por qué pudo hacerlo tan rápido?
Veamos el trabajo de mi amigo:

Piensa un número	$\longrightarrow$	x
Añádele 15	$\longrightarrow$	$x + 15$
Multiplica por 3 el resultado	$\longrightarrow$	$3\,(x + 15) = 3x + 45$
A lo que salga réstale 9	$\longrightarrow$	$3x + 45 - 9 = 3x + 36$
Divide entre 3	$\longrightarrow$	$\frac{3x + 36}{3} = x + 12$
Resta 8	$\longrightarrow$	$x + 12 - 8 = x + 4$
Dime lo que sale	$\longrightarrow$	$x + 4 = 32$

Si $x + 4 = 32$ entonces $x = 32 - 4 = 28$
El número es el 28. Y mi amigo planteó y resolvió una ecuación.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Ecuaciones en R

Llamamos **ecuación** a toda igualdad entre expresiones numéricas que se verifica para determinados valores de las variables que figuran en ella.

Por ejemplo: $2x + 3 = 19$ sólo se verifica cuando $x = 8$

Las variables, cuyo valor desconocemos, reciben el nombre de **incógnitas** y el valor de la incógnita que satisface la ecuación se llama **raíz de la ecuación.**
Las expresiones que aparecen igualadas reciben el nombre de **miembros de la ecuación.**

Una ecuación es una igualdad en la que aparecen incógnitas

La igualdad sólo se verifica para ciertos valores de las incógnitas

Las ecuaciones pueden ser de diferentes tipos, según sean las expresiones que intervengan en ellas, su grado y la cantidad de incógnitas.
Ejemplos:

$2x + 3 = 19$ es una ecuación de 1º grado con una incógnita
$2x = 5y$ es una ecuación de 1º grado con dos incógnitas
$x^2 + 5x = 7$ es una ecuación de 2º grado con una incógnita
$\operatorname{sen} x = \cos x$ es una ecuación trigonométrica con una incógnita
$\log x = 2$ es una ecuación logarítmica.
$e^x = 5$ es una ecuación exponencial

Estudiaremos sólo las ecuaciones de 1º grado con una incógnita

Las **ecuaciones de primer grado con una incógnita** son ecuaciones del tipo **ax = b**, donde
- **a** es el coeficiente de x,
- **b** es el término independiente
- **x** es la incógnita.

Una ecuación de primer gado con una incógnita tiene una sola raíz

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

En general las ecuaciones no aparecen en la forma antes indicada, pero pueden reducirse a ésta realizando determinadas operaciones. Ese procedimiento consiste en obtener **ecuaciones equivalentes**, lo que significa que tienen la misma raíz.

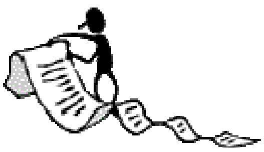
Las siguientes operaciones permiten obtener ecuaciones equivalentes:

- **Sumar a ambos miembros el mismo número (pasaje de términos)**
- **Multiplicar ambos miembros por el mismo número (pasaje de factores o divisores)**
- **Reemplazar cualquiera de los miembros por una expresión equivalente.**

Un ejemplo

He comprado un terreno de 250 m^2, que tiene 12,5 m de frente. Si su forma es rectangular, ¿cuánto tiene de fondo?
La fórmula de la superficie del rectángulo nos ayuda a escribir la ecuación:
A = b h en este caso la base es el frente y la altura es el fondo (el largo)
La ecuación queda: **12,5 x = 250**
De lo que resulta: **x = 20**. El terreno tiene 20 m de fondo.

Para pensar y calcular



- La suma de tres números consecutivos es 48.¿Cuánto vale cada número?

ISBN: 978-987-1341-52-8

(Ayuda: llama **x** al primero, **x + 1** al segundo, **x + 2** al tercero)

- Reparte \$ 2000 entre tres personas, de manera que la primera reciba \$100 más que la segunda y ésta reciba \$200 más que la tercera.
- Resuelve: 1) $5x - 6 = 3x$ 2) $2(x + 4) = 7x + 2$
- Inventa una situación que pueda resolverse con la ecuación 1) del punto anterior

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Son ecuaciones de la forma $ax + by = c$
Este tipo de ecuación tiene infinitas soluciones.
Cada solución es un par de valores, uno para x y el otro para y. Tales pares se indican (x, y) con lo cual entendemos que el primer valor corresponde a x y el segundo a y.

Si bien las raíces son infinitos pares de valores, no cualquier par de valores es una raíz de la ecuación.

Ejemplo: $2x + 3y = 20$ tiene como raíces los pares: (4, 4) ; (7, 2) ; (5/2 , 15/3) y otros infinitos pares. Pero el par (2, 3) no es raíz de la ecuación; y tampoco lo es (5, 4).

Para resolver este tipo de ecuaciones se "despeja" una de las incógnitas, con lo que se obtiene una expresión que nos permite calcularla "en función" de la otra.
En este caso, si despejamos x,
resulta $x = \dfrac{20 - 3y}{2}$
Dando diferentes valores a y, obtengo los correspondientes valores de x para formar los pares.

Sistemas de ecuaciones lineales

Algunas situaciones requieren, para su resolución, se descriptas por un conjunto de ecuaciones. Tales ecuaciones no son independientes entre sí, sino que deben tener la misma raíz, por lo que forman un sistema de ecuaciones

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Ejemplo:
A una reunión asistieron 20 estudiantes entre hombres y mujeres. La entrada costaba 6$ para los hombres y 4$ para las mujeres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron si se recaudaron 104$?

Las incógnitas son: x la cantidad de hombres, y la cantidad de mujeres.
Del enunciado tenemos que $x + y = 20$
Por otra parte la expresión $6x$ indica el dinero pagado por todos los hombres, y la expresión $6y$ dice la cantidad de dinero pagada por las mujeres.

La situación problemática queda expresada en lenguaje simbólico así:

$$6x + 4y = 104.$$

El sistema que permite resolver el problema es:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 6x + 4y = 104 \end{cases}$$

Cada ecuación por separado tiene infinitas raíces **(x, y**), y ocurre una y sólo una de las siguientes tres posibilidades:

Un solo par es raíz de las dos ecuaciones:
El sistema se llama **compatible determinado**
Todos los pares son raíces de ambas ecuaciones:
El sistema se llama **compatible indeterminado**
Ningún par es solución de las dos ecuaciones:
El sistema se llama **incompatible,** y decimos que no tiene solución.

Resolveremos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando los métodos de sustitución, igualación y reducción por suma o resta.
Como ejemplo tomaremos el sistema ya planteado

$$\begin{cases} \mathbf{x + y = 20} \\ \mathbf{6x + 4y = 104} \end{cases}$$

Método de sustitución

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, y se la reemplaza por la expresión obtenida en la otra ecuación.
$x = 20 - y$
$6(20 - y) + 4y = 104$ que es lo mismo que **$120 - 6y + 4y = 104$**
Ya tenemos una sola ecuación con una incógnita, y resolviendo:
$2y = 16$ es decir **$y = 8$** Por lo tanto asistieron 8 mujeres.
Como **$x = 20 - y$** entonces **$x = 12$** Por lo tanto asistieron 12 hombres.

Método de igualación

Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.
En la primera ecuación: **$x = 20 - y$**
En la segunda ecuación: **$x = \dfrac{104 - 4y}{6}$**

Igualamos: $20 - y = \dfrac{104 - 4y}{6}$

O sea $6(20 - y) = 104 - 4y$
$120 - 6y = 104 - 4y$
$2y = 16$
$y = 8$ y reemplazando: **$x = 12$**

Método de reducción por suma o resta

A una de las ecuaciones se le suma la otra multiplicado por un número elegido convenientemente para hacer desaparecer una incógnita.

Observando el sistema vemos que nos conviene multiplicar la primera ecuación por (-6) y sumarle la segunda ecuación:

(Recuerde que las igualdades se suman miembro a miembro)

$$\begin{array}{lr} \text{al multiplicar la primera por (-6) resulta} & -6x - 6y = -120 \\ \text{sumamos la segunda} & 6x + 4y = 104 \\ \hline & 0x - 2y = -16 \end{array}$$

Observe que elegimos (-6) para que al sumar $-6x + 6x$ desaparezca la incógnita x.

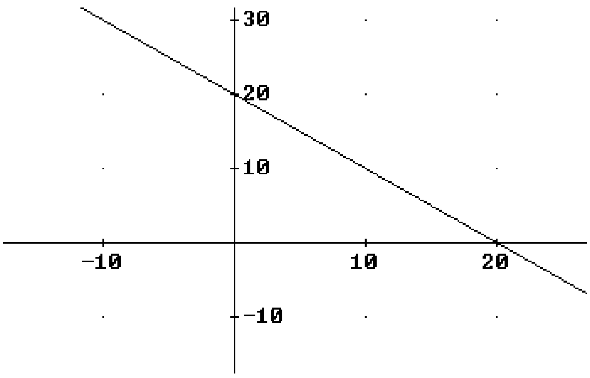
Resulta $2y = 16$ o sea **$y = 8$** y reemplazando en la primera se obtiene **$x = 12$**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Resolución gráfica de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

Recordemos que cada ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas raíces y que cada raíz es un par ordenado de números.

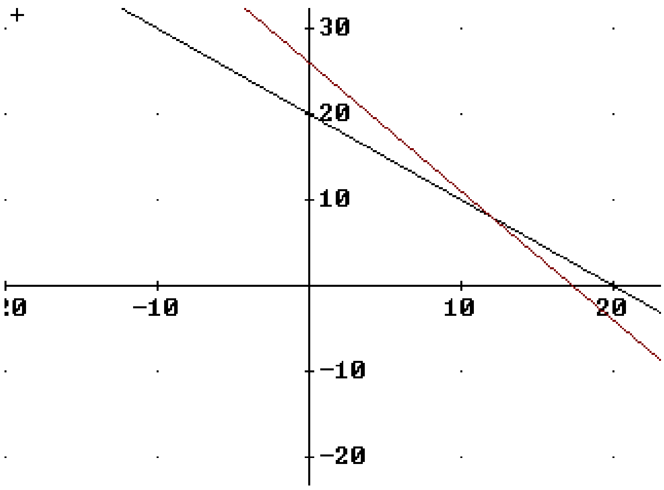
Si representamos los pares ordenados correspondientes a una ecuación cualquiera de primer grado con dos incógnitas, veremos que se obtiene una recta.



corresponde a la ecuación x + y = 20

Si representamos en un mismo sistema de ejes los pares correspondientes a las dos ecuaciones del sistema,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8



Vemos que las rectas se cortan en un punto. Dicho punto tiene como coordenadas al par (x, y) encontrado como raíz del sistema. En este caso $x = 12$, $y = 8$

Para pensar y calcular

- Dos amigos fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir, uno de ellos preguntó al otro: "¿Contaste cuántas gallinas y cuántos conejos había?".- No." Averígualo. Había 72 ojos y 122 patas"

- Resuelve:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 19 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Ecuación de 2º grado con una incógnita

La forma general de una ecuación de este tipo es

Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, que se conoce como **forma completa general**

Si **$a = 1$**, la ecuación es: **$x^2 + b\,x + c = 0$** que es la **forma completa reducida**

Si $c = 0$**, la ecuación adopta la forma**: $ax^2 + bx = 0$
Si **$b = 0$**, la ecuación es: **$ax^2 + c = 0$**
Las dos últimas formas son **formas incompletas**.

Siempre podemos suponer que $a > 0$. Si $a < 0$, multiplicamos ambos miembros de la ecuación por -1, y en la nueva ecuación, que es equivalente a la dada, $a > 0$.
Los coeficientes a, b y c son números reales. Si son racionales, podemos reducirlos a enteros. En efecto, si son fraccionarios multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, y en la nueva ecuación, equivalente a la dada, los coeficientes son números enteros.

Formas de la ecuación de 2º grado	
Completa general	**$2x^2 - 5x + 1 = 0$**
Completa reducida:	**$x^2 - 2x + 8 = 0$**
Incompleta: falta el término independiente	**$3x^2 - 2x = 0$**
Incompleta: falta el término de 1º grado	**$5x^2 - 20 = 0$**

Resolución de la ecuación de 2º grado

La fórmula general $= \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

se aplica a cualquiera de las formas de la ecuación, reemplazando a, b y c por sus respectivos valores.
El signo $\pm$ de la formula indica que se obtendrán **dos resultados**, según si se suma o se resta el resultado de la raíz indicada.
A uno de los resultados lo llamaremos **x_1** y al otro **x_2.**

En el caso de las formas incompletas, si bien se puede aplicar la fórmula anterior, es posible simplificar el cálculo analizándolas por separado:

Forma en la que falta el término de primer grado

ISBN: 978-987-1341-52-8

$$ax^2 + c = 0$$

Despejando x obtenemos: $x = \pm\sqrt{-c/a}$

Observe que el signo ± nos permite obtener dos soluciones $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$
Observe sin embargo que no siempre es posible encontrar la raíz cuadrada indicada.

¿Cuál es la condición para que existan x_1 y x_2? ¿Cómo son entre sí cuando existen?

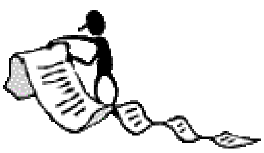
Forma en la que falta el término independiente

$$ax^2 + bx = 0$$

Aplicando el primer caso de factoreo, obtenemos: $x\,(ax + b) = 0$
Es decir tenemos una multiplicación cuyo resultado es cero, por lo tanto uno de los factores debe ser cero.
Si escribimos la expresión anterior como $x_1\,(ax_2 + b) = 0$,
Tenemos que $\mathbf{x_1 = 0}$ y $\mathbf{x_2 = -b/a}$

O sea que una ecuación de este tipo siempre tiene una raíz nula.

Para pensar y calcular



- Resuelve las ecuaciones: a) $x^2 - 2 = 2$; b) $3x^2 - 6x = 0$; c) $(x-1)^2 = 4$
- Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 32 cm y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados y el área. Ayuda: Usa el teorema de Pitágoras

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Propiedades de las raíces de una ecuación de 2º grado

Es posible comprobar que en toda ecuación de 2º grado en una variable x, la suma de las raíces es – b/a y el producto de las raíces es c/a.

$x_1 + x_2 = -b/a \qquad\qquad x_1\, x_2 = c/a$

Esta propiedad nos permite reconstruir una ecuación, conociendo sus raíces.

Ejemplo: El área de un rectángulo es 21 cm^2 y su perímetro 19 cm ¿cuánto mide cada lado?
La fórmula del área es A = bh donde b y h son los lados desconocidos
Podemos escribir $\mathbf{x_1\, x_2 = 21}$

La fórmula del perímetro es P = 2b + 2h
Podemos escribir $\mathbf{2x_1 + 2x_2 = 19}$ o sea $\mathbf{x_1 + x_2 = 19/2}$

De lo que resulta que **-b/a = 19/2** y **c/a = 21**

Si suponemos a = 1, la ecuación reconstruida queda $\mathbf{2x^2 - 19x + 42 = 0}$

Aplicando la fórmula: $x = \dfrac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \times 2x\ 42}}{2 \times 2}$

Con lo que $\mathbf{x_1 = 3,5} \qquad \mathbf{x_2 = 6}$

El rectángulo buscado tiene 3,5 cm de base y 1 cm de altura.

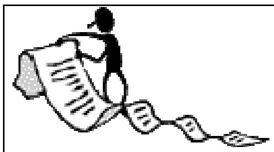
Los resultados deben ser comprobados, lo que haremos a continuación:

A = b x h = 3,5 x 6 = 21 El área mide 21 cm^2

P = 2b + 2 h = 7 + 12 = 19 El perímetro mide 19 cm.

Para pensar y calcular

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8



- El perímetro de un rectángulo mide 20 cm y su área 21 cm ^{2}. Calcula sus dimensiones.
- Resuelve mentalmente $x^2 - 5x + 6 = 0$

Funciones de R en R

Previo a definir el concepto de **función**, recordaremos los conceptos de producto cartesiano entre dos conjuntos y de relación entre dos conjuntos:

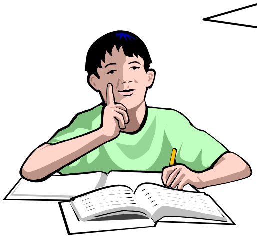
Producto cartesiano A x B

Es el conjunto de **todos** los **pares ordenados** que se pueden formar, tales que el primer elemento pertenezca al conjunto **A** y el segundo elemento pertenezca al conjunto **B**.

Ejemplo:

A = { 2, 3, 4, 5}   **B** = { a, b, c, d}

A x B = {(2,a), (2,b), (2,c), (2,d)……….........................(5,b), (5,c), (5,d) }



Deben ser **todos** los pares ordenados que se puedan formar ¿Qué pongo en los puntos suspensivos?

Relación entre A y B (A *R* B)

Es el conjunto de los **pares ordenados**, tales que el primer elemento pertenece a **A**, el segundo elemento pertenece a **B,** y entre ellos se cumple **la propiedad** que define la relación.

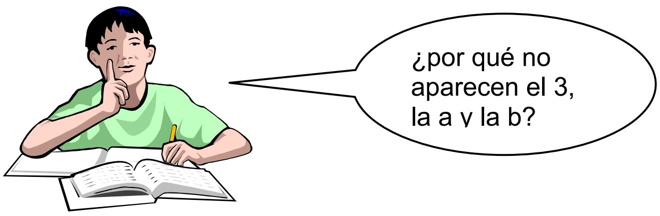
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Ejemplo: si tenemos los mismos conjuntos **A** y **B** del ejemplo anterior, y la propiedad que define la Relación es

R : " el nombre del número comienza con la letra"

Los pares que se forman son: (2,d) , (4, c) y (5, c)

Entonces **A *R* B =** { (2,d) , (4, c) , (5, c) }



Los elementos 2, 4 y 5 , que pertenecen a **A**, forman el d**ominio** de la Relación *R*

Los elementos c y d, que pertenecen a **B**, forman el **codominio** de la Relación *R*

Los conceptos **de producto cartesiano** y **relación** suponen un orden determinado, y los conjuntos involucrados reciben el nombre de conjunto de partida y conjunto de llegada.

Función

Una **función** es una relación entre dos conjuntos que cumple con dos condiciones:

1) El dominio coincide con el conjunto de partida

2) A cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada

A todo elemento del conjunto A le corresponde un elemento del conjunto B y sólo uno

En símbolos:

f: A→B que se lee "f de A en B" es el conjunto de los pares ordenados (x,y) tales que y = f(x), es una función de A→B, si a cada valor de x (elemento de A) le corresponde como imagen uno y solo un elemento de y (elemento de B).

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

En este estudio nos interesan las funciones **R→R**, esto quiere decir que tanto x como y son números reales, entonces:

y = f(x) es la fórmula o expresión que me permite encontrar el número **y** que le corresponde a cada número **x**

Como el valor de y depende del valor elegido de x, se dice que **x** es la **variable independiente** y que **y** es **la variable dependiente.**

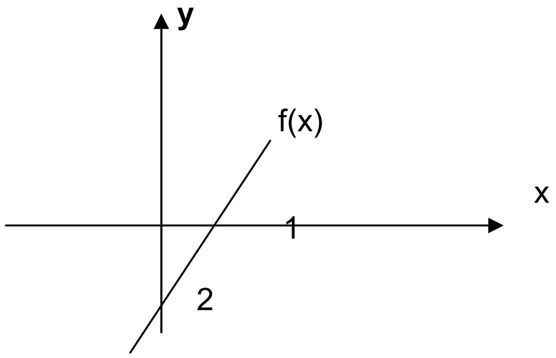
Nota:
Hemos abordado la noción de función con un enfoque conjuntista porque entendemos que es al que estás más acostumbrado. No obstante, durante el año en la Cátedra de Análisis Matemático I, se dará un enfoque más actual. La función concebida como una correspondencia arbitraria entre cantidades cualesquieras.

Gráfico de una función

Puesto que una función **f: R→R** determina un conjunto de pares ordenados **(x, y)** donde **y = f(x),** y a partir de nuestro conocimiento del sistema de representación de ejes cartesianos, podemos asociar a una función **f : R→R** una figura en el plano xy formada por todos los puntos representativos de los pares **(x,y)**

Un ejemplo:

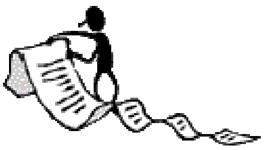
y = f(x) = ½ x - 2



dominio de f= Df = R; codomio de f= C f=R

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Para pensar y completar



- La función definida entre dos conjuntos es una.............tal que a cada elemento del conjunto de partida le corresponda...........elemento del conjunto de llegada.
- El dominio de una función es el conjunto de..
- El codominio de una función es el conjunto de.......................................
- La velocidad y aceleración de un móvil en relación al tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada son dos ejemplos de funciones en la vida diaria. Cómo explicas la relación funcional para cada caso. Completa:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

La velocidad de un móvil es la función entre la....................y........................
La aceleración de un móvil es la función entre la...................y ....

- El consumo de combustible de una máquina y el tiempo de funcionamiento, definen, una función porque..
- Grafica las funciones: a) $y = x$;b) $y= -x$; $y = x + 2$; $y = x - 2$; $y = -x + 2$; $y =-x - 2$. ¿Cómo son las gráficas? ¿Qué otra conclusión sacas?
- Inventa una situación que pueda ser descripta con la función $y = 3x + 2$, y determina su dominio.

Clasificación de funciones

Una función puede ser:

Función inyectiva: una funcion es inyectiva si y solo sí a elementos distintos del dominio le corresponden elementos distintos de la imagen.

Función suryectiva: (o sobreyectiva) una función es suryectiva si y solo sí si todo elemento del conjunto de llegada es un elemento correspondiente de algún elemento del dominio.

Función biyectiva: una función es biyectiva si y solo si es inyectiva y suryectiva.

Tipos de funciones

De acuerdo a la forma de la función, tenemos distintos tipos de funciones.

Función lineal

$f: R \to R / \mathbf{y} = a\mathbf{x} + b$. Su representación gráfica es una recta.

Donde $a \in R$ y $b \in R$; a es pendiente y b ordenada al origen.

Siendo $\begin{cases} b: \text{ el valor que toma y cuando } x = 0 \\ a: \text{ la variación de y cuando x aumenta una unidad.} \end{cases}$

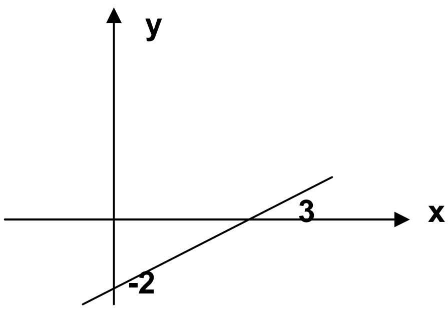
Ejemplo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

f(x) = $\frac{2}{3}x-2$ pendiente a: $\frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es b = -2

el domf = R y el codo f= R

La Función Lineal es **BIYECTIVA**



El gráfico de esta función lineal es una recta no vertical.

Intersección con los ejes

Con el eje y: es la ordenada al origen f(0) =-2, o sea el punto (0, -2).

Con el eje x: resolvemos la ecuación f(x) =0 es decir:

$$\frac{2}{3}x-2=0$$

$$\frac{2}{3}x=2$$

$$x=2\div\frac{2}{3}$$

$$x=3$$

Luego la intersección con el eje x es el punto (3,0).

Aclaremos los conceptos de función y ecuación que hemos usado en los párrafos anteriores:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Función y = f(x)

Establece la relación entre las variables.
Me permite encontrar la imagen $\mathbf{y_0}$ de cualquier valor conocido $\mathbf{x_0}$ de la variable x

Ecuación y_0 = f(x)

Es una igualdad con una incógnita.
Me permite encontrar la pre-imagen $\mathbf{x_0}$ de un valor conocido $\mathbf{y_0}$ de la variable y.

Cuando dibujo el gráfico de la función, doy diferentes valores a x, obtengo los valores que les corresponden en y, y luego grafico los pares ordenados resultantes

Cuando encuentro la intersección de la gráfica con el eje x, tomo el valor conocido y = 0, y encuentro el valor de x que le corresponde

Funciones cuadráticas

Si tuviéramos que construir una tapa de cartulina rectangular, de tal manera que la base de la tapa sea las dos terceras partes de la altura, entonces su área, que indica la cantidad de cartulina que usaré, puede expresarse así:

$$A = x \,.\, 2/3 \,.\, x$$

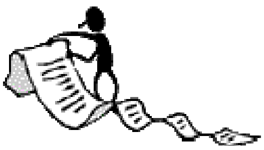
El área de la tapa a construir es función de su base y altura. Si llamo **x** a la base e **y** a la superficie y recuerdo la relación entre la base y la altura la relación funcional la expresamos con esta fórmula:

$$y = x.\, 2/3\, .x$$

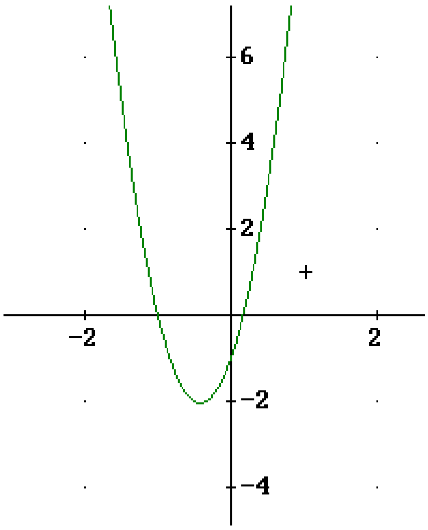
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

ó $y = 2/3 . x^2$

Para pensar y realizar



- Realiza la gráfica de la función $y = 2/3\ x^2$ en un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Qué obtienes? ¿Qué más puedes decir de la gráfica?
- Ahora representa a $y = 2/3\ x^2 + 1$. Encuentra similitudes y diferencias con la gráfica anterior.
- Mira esta gráfica y descubre su ecuación. ¿Es una función cuadrática?



Proporcionalidad

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Hay ciertos problemas que se nos presentan todos los días. ¿ Cuanto tendré que pagar por 800 gramos de carne si el kilo cuesta $3,50?
¿Cuántos paquetes de caramelos puedo comprar con $3, si cada paquete cuesta $ 0,20?
¿Cómo hacemos para dibujar el plano de una casa?
La matemática ayudará a dar una respuesta a algunos problemas planteados.

Proporcionalidad directa

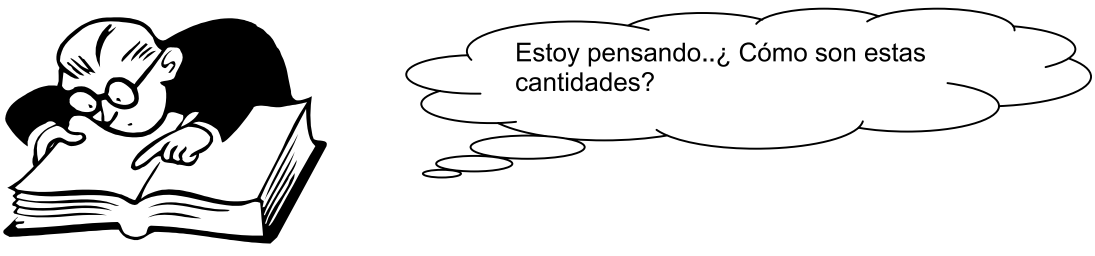
Analía es la dueña de un negocio que vende madera para armar estantes. El otro día, Federico llevó 5 metros y pagó $ 45. Si no le hicieron ningún tipo de descuento,
a) ¿Cuántos metros de la misma madera habrá levado Pablo si pagó $ 90? Y Raquel que pagó $180?
b) Si Pablo llevó 2 metros y medio ¿Cuánto pagó?

Metros de madera	Precio
5 m	$ 45
10m	$ 90
20m	$ 80

En el primer cuadro, si se duplican las cantidades de metros también se duplican los precios, por ejemplo, de 5 m por 2 a 10m y de $ 45 por 2 a $90

Metros de madera	Metros de madera
1 m	$ 9
10m	$90
20 m	$ 180

En el segundo cuadro está calculado el precio de 1 metro de madera. Y a partir de este precio se multiplica por 10 para 10 metros y por 20 para 20 metros.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Podemos concluir que:

- Al doble de la cantidad le corresponde el doble del precio
- Al multiplicar por 4 ó por 10 una de las cantidades, la otra queda multiplicada por 4 ó 10
- Al dividir por 2 una cantidad, la otra queda dividida por 2
- A la suma de dos cantidades de una misma columna le corresponde la suma de las cantidades correspondientes

La constante de proporcionalidad

Cuando entre dos cantidades hay proporcionalidad directa, existe un número llamado constante de proporcionalidad, que permite pasar de una cantidad a otra
En efecto divide dos cantidades de maderas, por ejemplo 20 metros y 10 metros. El cociente es 2. El mismo valor lo obtienes al dividir los precios correspondientes a estas cantidades, esto es, $ 180 por $90. El valor 2 es la constante de proporcionalidad en este caso.

Para pensar y calcular

- Completa la tabla:

Cantidad de paquetes	Cantidad de caramelos
8	160
10	200
....	60
17	.....

- En un supermercado 5 kg de arroz cuestan $22,50. En otro supermercado, 9 kg del mismo arroz cuestan $43,20.¿Dónde conviene comprar? ¿Por qué?

- Cuando hablamos por teléfono a otro país, por ejemplo Brasil, la llamada cuesta $4,50 por minuto. Si hablamos, por ejemplo 2 minutos 30 segundos, pagamos por 3 minutos; si hablamos 50 segundos, pagamos por un minuto.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

a)¿Cuánto pagará una persona que habló 8 minutos 10 segundos?
b) ¿ Y si habló 16 minutos 20 segundos?
c) ¿Hay proporcionalidad directa entre el tiempo hablado y el precio? ¿Por qué?

Porcentaje

La maestra está analizando las ausencias a clase de un determinado día de la semana. El total de los alumnos de la clase es 40. La maestra le dice a la directora: - ¡Ha faltado la cuarta parte del curso!
La directora dice: ¿Por qué han faltado tantos chicos?¡Un 25% es una barbaridad!

Para entender a la directora veamos algo sobre porcentaje.

Si la cantidad de alumnos fuera	100	200	40
Los ausentes serían	25	50	10

Como hay proporcionalidad directa esta tabla nos indica que es lo mismo decir 25 de cada 100 ó 25% que decir 10 ausentes de un total de 40 o sea la cuarta parte de ausentes. Entonces la directora y la maestra estaban diciendo lo mismo de diferentes maneras.

1/ 4 = 0,25 = 25/ 100= 25%

Hay otro camino para encontrar el 25 % de 40.Recordemos que, cuando hay proporcionalidad directa, es posible hallar la constante de proporcionalidad y con ésta pasar de una cantidad a otra a través de una multiplicación.

Si la cantidad de alumnos fuera	100	40
Los ausentes serían	25	?

La constante es 25/ 100.
Para calcular el 25% de 150, podemos hacer 25/ 100 x 150= 37,5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Para pensar y calcular

- Un comerciante tiene una ganancia del 25% sobre el precio de costo de los productos que vende. Si el producto A le costó $ 120, ¿ A cuánto deberá venderlo?. Si vendió el producto B a $ 180, ¿cuánto habrá sido el costo?
- En un almacén pueden conseguir un descuento del 20% pero al mismo tiempo, tendrán que pagar un impuesto del 15%. ¿Qué prefieren que les calculen primero el descuento o el impuesto?

Proporcionalidad inversa

Un comerciante compró en noviembre 100kg de manzanas por semana a $4 el kilo.
Si en enero el precio es de $2 y el comerciante destina la misma cantidad de dinero semanal para la compra de manzanas. ¿Cuántos kg podrá comprar?
¿Y en marzo cuando el precio es de $1?

Nuevamente una tabla nos ayuda a organizar la información.

Precio de manzanas	Cantidad de Kg comprados
4	100
2	200
1	400

Observa la tabla:

- A la mitad de una cantidad le corresponde el doble de la otra
- A la cuarta parte de una cantidad le corresponde el cuádruplo de la otra

Cuando sucede que al dividir (o multiplicar) una cantidad por un número, la otra se multiplica (o divide) por el mismo número, decimos que hay **proporcionalidad inversa** entre las cantidades.

En la proporcionalidad inversa **el producto** de dos cantidades que se corresponden es **constante.**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Para pensar y calcular

- Un fabricante envasa cierta cantidad de caramelos. Si los coloca en cajas de 50 caramelos cada una, necesita 72 cajas. Si los envasa en cajas de 150 caramelos cada una, ¿ Cuántas cajas necesita? ¿ Cuantos caramelos tiene para envasar?.
  Si los quisiera colocar en tres cajas de igual cantidad de caramelos cada una, ¿cuántas entrarían en cada caja?
- Completa la siguiente tabla y justifica:

Kg de harina	2	4	5	2,5	....
Precio	0,80	1,50	....	....	3

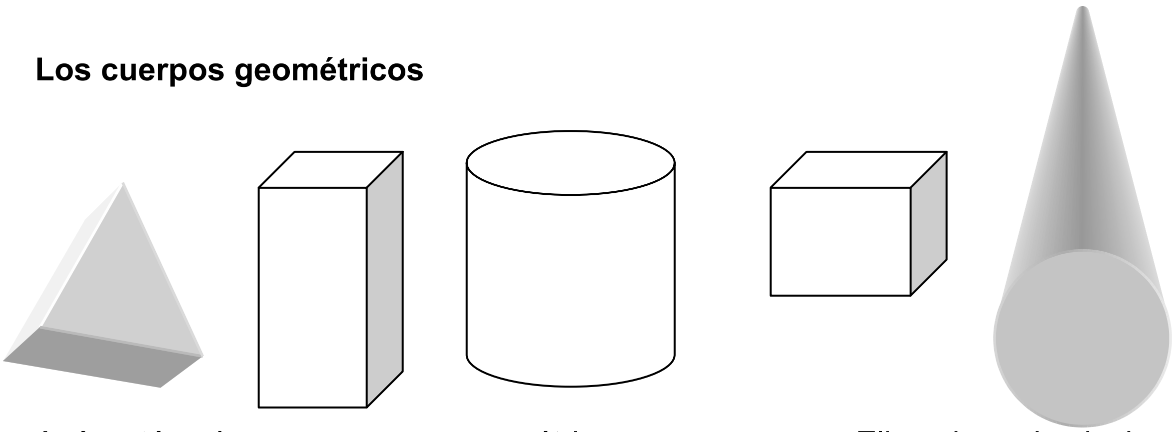
- Los recibos de cierta compañía se confeccionan según los siguientes criterios:

1º Con independencia del consumo, en cada recibo se incluyen una cantidad fija de 300 monedas

2º Si el consumo no supera los 100kw, se factura a razón de 2 monedas el Kwh

3º A partir de los 100kwh, cada kwh adicional se factura a 1,2 monedas. Obtén una expresión y = f(x) que proporcione el precio y (en monedas) en función del consumo x (en kwh). Representa gráficamente.

Los cuerpos geométricos



Acá están algunos cuerpos geométricos que conoces. Elige dos, sin decir cuáles y anota las características comunes y las diferencias entre ellos.

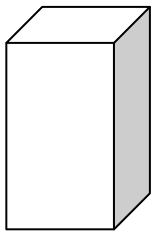
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Un alumno ya eligió e hizo estas anotaciones. ¿Sabes cuáles son esos cuerpos?

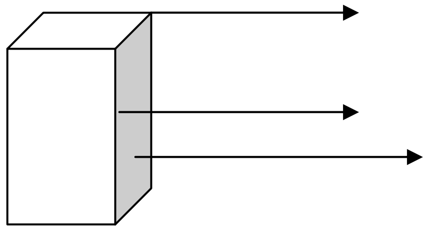
Características comunes	Diferencias
▪ Tienen más de una cara plana ▪ Tienen por lo menos un par de caras paralelas	▪ Todas las caras de un cuerpo son cuadriláteros mientras que en el otro no

A los cuerpos que tienen todas sus caras planas los llamamos **poliedros**

El prisma es un poliedro



¿Qué otros cuerpos de los presentados son poliedros?
¿Cuáles no son poliedros? ¿éstos pueden rodar?
Indica en este prisma las aristas, vértices y caras. ¿Las caras que son?



Leamos un cuento de Frederic Brown, titulado ”Aprendamos Geometría“

“**Enrique miró su reloj: eran las dos de la mañana. Cerró el libro preocupado ya que seguramente lo aplazarían en el examen que rendiría por la tarde. Por más que leyera la geometría, no la comprendía. Sólo un milagro haría posible su aprobación. ¿Un milagro? ¿Por qué no?**

Siempre se había interesado por conocer algo de magia. Tomó de un conjunto de libros que trataban el tema, uno de ellos. Las instrucciones para pedir ayuda a los diablillos eran sencillas.

ISBN: 978-987-1341-52-8

“Algunas fórmulas y ponerse a cubierto en un rectángulo. Llega el diablillo, no te puede hacer nada y le pides lo que quieras”.

Despejó el piso y luego marcó con una tiza el rectángulo protector.

Pronunció los encantamientos y se armó de coraje.

El diablillo era feo pero Enrique le dijo:

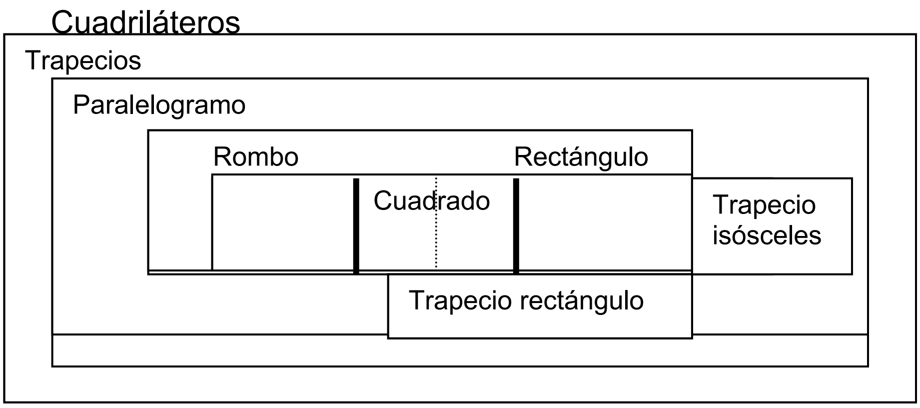
- Siempre he sido inútil en geometría

-¿A quién se lo dices?-repitió el diablillo riendo burlonamente. Y cruzó, para comerse a Enrique, las líneas del romboide que aquel tonto había dibujado.“

Para que a ustedes no les pase lo de Enrique, estudiemos geometría.

Sobre una hoja en blanco ubica 4 puntos de diversas maneras. Dibuja los cuadriláteros correspondientes y distingue a los cuadriláteros convexos. Observa las similitudes y diferencias entre los mismos, lo que te permitirás clasificarlos.

Ubícalos en el presente esquema.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Para pensar y aprender

- ¿Cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para afirmar que un cuadrilátero sea un paralelogramo? Marca la respuesta correcta.
  1. Sólo un par de lados paralelos
  2. Sus cuatro ángulos rectos
  3. Sus diagonales congruentes que se cortan en el punto medio.
  4. Dos pares de lados paralelos.
  5. Dos pares de lados congruentes.
  6. Dos de sus ángulos rectos
  7. Un par de lados consecutivos congruentes.
  8. Pares de ángulos congruentes.
- Completa la línea punteada con **a veces, siempre, nunca,** según corresponda
  1.Los paralelogramos son ....trapecios
  2. Los rombos son.................................. cuadrados
  3.Los trapecios son .... paralelogramos
  4.Los cuadrados son............................ rectángulos
  5. Los romboides son .... paralelogramos
- Si un cuadrilátero puede seccionarse en dos triángulos mediante el trazado de una de las diagonales, es lógico inferir que la suma de sus ángulos interiores equivale a 4R. En base a lo dicho, indica si los siguientes ángulos determinan cuadriláteros:

	a	b	c	d
I	90 °	90°	90°	90°
II	75°	58°	104°	39°
III	89°	90°	89°	90°
IV	57°	83°	175°	45°

- Completa con **algún** o **todo** según corresponda:
  1...................romboide es rombo

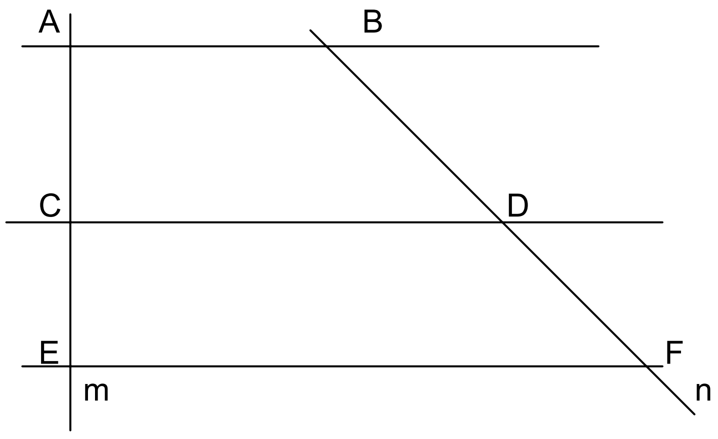
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

2.................. paralelogramo es trapecio
3.................. trapecio tiene un par de lados paralelos
4...................rombo es romboide

- Dibuja los siguientes cuadriláteros:
  1. trapezoide 2. trapecio isósceles
  3. paralelogramo 4. romboide
  5. rectángulo 6. rombo
  7. cuadrado

Algo sobre el Teorema de Thales

La historia de la matemática cuenta una leyenda acerca de uno de sus grandes personajes: Thales de Mileto (- 624; -548). Según esta leyenda Thales fue el primero en calcular la altura de la pirámide de Keops a partir de su sombra, la sombra que el mismo proyectaba a la misma hora y en el mismo lugar. ¿Cómo pudo ser el procedimiento?
Ahora lo veremos.
En el dibujo, las rectas AB, CD y EF son paralelas



Si hacemos las mediciones para calcular:

$\overline{AC}$; $\overline{BF}$; $\overline{AE}$; $\overline{BD}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

$\overline{CE}$ $\overline{DF}$ $\overline{CE}$ $\overline{DF}$

Y comparamos los resultados vemos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} \quad ; \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DF}}$$

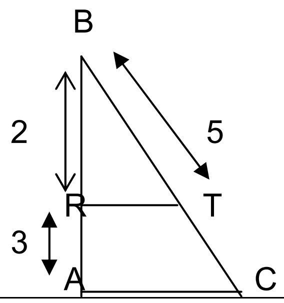
Esto no es casual: Siempre que las rectas consideradas sean paralelas, los segmentos determinados sobre una transversal (m) son proporcionales a los determinados sobre la otra(n). A esta propiedad se la conoce con el nombre de Teorema de Thales, y es importante recalcar que se verifica sólo cuando las rectas consideradas (AB, CD y EF en nuestro caso) son paralelas.

Con respecto a la altura de la pirámide, la relación que sin dudas planteó Thales es la siguiente:

$$\frac{\text{Altura de Thales}}{\text{Sombra de Thales}} = \frac{\text{Altura de la pirámide}}{\text{Sombra de la pirámide}}$$

Para pensar y calcular

- A Mercedes y a Rocío les pidieron que calcularan la longitud del lado $\overline{CB}$ con los datos de la figura



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Mercedes los razonó así:

$2 / 3 = 5 / x \quad \rightarrow x = 7{,}5$ y $\overline{BC} = 12{,}5$

Rocío, en cambio, lo hizo de esta forma:

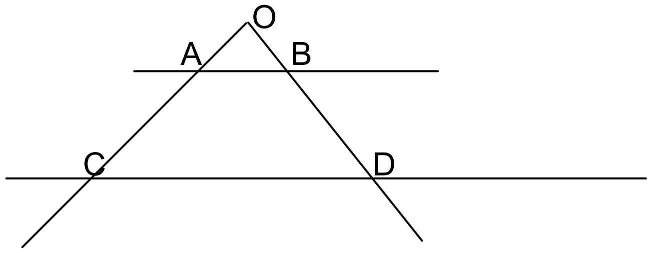
$2/ 5 = 5 / x \quad \rightarrow x = 25/ 2$ y $\overline{BC} = 12{,}5$

¿ Las chicas lo hicieron bien?

- Con los datos que figuran en el gráfico investiga si las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas.

$\overline{OA} = 2$ $\quad\quad$ $\overline{OC} = 6$

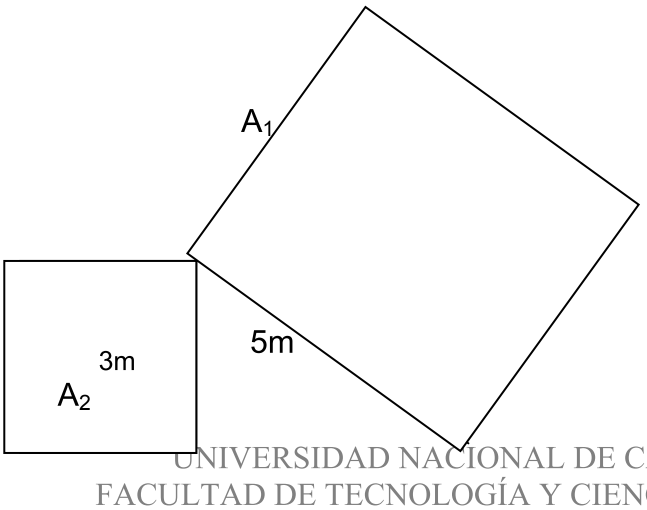
$\overline{OB} = 3$ $\quad\quad$ $\overline{BD} = 6$



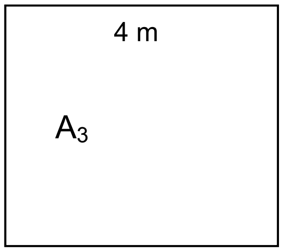
El teorema de Pitágoras

Recordemos: en un triángulo rectángulo, los lados que determinan el ángulo recto reciben el nombre de **catetos** y, el otro, **hipotenusa.**

Calculemos las áreas construidas sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo dado. Sus catetos miden 3m y 4 m y su hipotenusa 5 m.

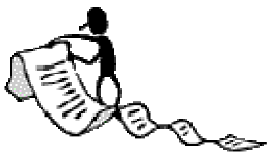


UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8



Para poder calcular las áreas de las figuras sobre cada lado del triángulo rectángulo comencemos por recordar las siguientes fórmulas:
Área del cuadrado = L x L
Así tenemos $A_1 = 25\ m^2$
$A_2 = 9\ m^2$
$A_3 = 16\ m^2$
Si sumamos $A_2 + A_3$ obtenemos A_1: $9\ m^2 + 16\ m^2 = 25\ m^2$

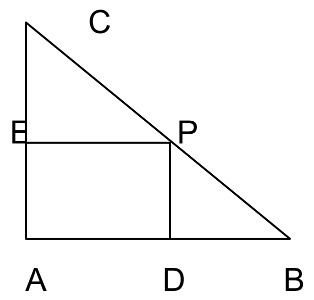
Para pensar y calcular



- ¿ Qué longitud tiene los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, si la longitud de su hipotenusa es de 4 cm?

- Dibuja un triángulo rectángulo isósceles, ABC, en el que el cateto AB mida 10cm. Marca un punto P cualquiera sobre la hipotenusa y dibuja el rectángulo PDAE.

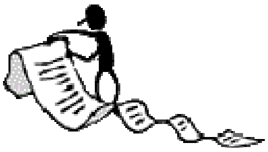
a) Comprueba que el perímetro del rectángulo es de 20cm cualquiera que sea el punto P elegido.
b) Llama x a la distancia PD y construye una tabla dando valores a x y calculando el área del rectángulo
c) Dibuja la gráfica correspondiente.
¿Cuándo es máxima el área? ¿Cuándo es mínima?



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Las construcciones geométricas

Para pensar y realizar



- Construir un cuadrado conociendo la diagonal (incompleto si no se especifica el instrumento que se usará en la construcción)
  . con regla no graduada y compás
  . con regla graduada y escuadra
  . con regla graduada y transportador

- Construir un cuadrado dado el lado
  . con regla no graduada y compás
  . con regla graduada y escuadra
  . con regla graduada y transportador

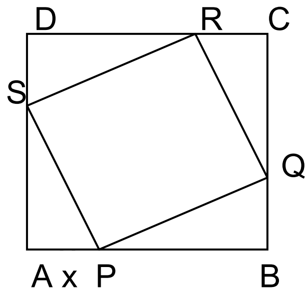
- Con un pedazo de papel cualquiera y plegando formar un cuadrado.

- Plegar un triángulo equilátero (sin trisecar el ángulo recto)

- Dibuja un cuadrado de 7cm de lado. Sobre el lado AB, marca un punto P que diste x de A y dibuja un nuevo cuadrado PGRS inscripto en el anterior.

a) Observa que, si x= 3 cm, entonces AS= 7-3= 4 cm.
¿Cuándo mide PS?
¿Cuánto mide el área del nuevo cuadrado?

b) Construye una gráfica dando a x valores desde 0 a 7 y calculando el área del cuadrado inscripto.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Estadística

La maestra de tercer grado tiene registrada la asistencia de sus alumnos en el mes de junio. Los datos los ha recogido en la siguiente tabla:

Nombre	Inasistencia	Nombre	Inasistencia	Nombre	Inasistencia
Analía	0	Verónica	3	Ramón	2
Graciela	1	Silvia	1	Liliana	1
Marisa	3	Pablo	1	Estela	2
José	5	Natalia	1	Raúl	2
Griselda	4	Gabriela	0	Laura	0
Juan	3	Paula	0	Mariano	1
Diego	2	Santiago	1	Víctor	1
Alberto	3	Lucas	2	Nora	1

A partir de esta información completa la siguiente tabla:

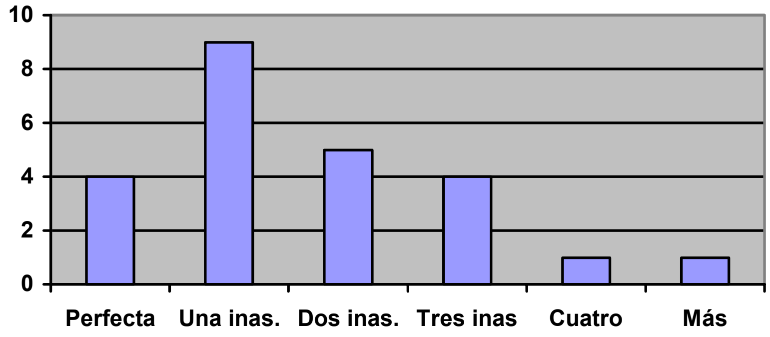
Cantidad de inasistencia	Número de alumnos (frecuencia)	Porcentaje
Asistencia perfecta	4	8 %
Una única inasistencia	9	37%
Dos y sólo dos inasistencias	5	21%
Tres y sólo tres inasistencias	4	8%
Cuatro y sólo cuatro inasistencias	1	4%
Más de cuatro inasistencias	1	4%

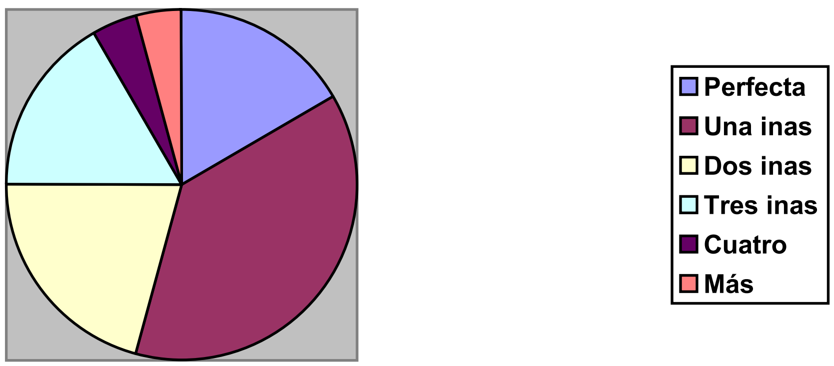
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Lee con atención:

- ¿Cuál es la población en estudio? En este caso la población estudiada es la formado por los alumnos de 3º grado.
- ¿Cuál es la variable que estás analizando? Es la inasistencia
- ¿Es la variable discreta o continua? La variable acá es discreta. Solo pueden figurar números enteros de faltas
- ¿Y qué significa el porcentaje de la última columna? Da las partes de la clase que tienen sus respectivas asistencias. Por ejemplo hay 21% de la clase con sólo dos inasistencias.

Haremos ahora un gráfico de barras y un gráfico de sectores.





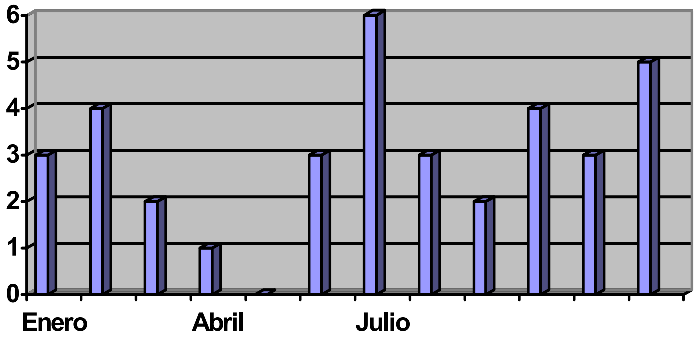
Una clase tiene 36 alumnos y los números de ellos que nacieron en cada mes (frecuencia) están indicados en la siguiente tabla:

Mes	Frecuencia	Mes	Frecuencia	Mes	Frecuencia
Enero	3	Mayo	0	Setiembre	2
Febrero	4	Junio	3	Octubre	4

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Marzo Abril	2 1	Julio Agosto	6 3	Noviembre Diciembre	3 5

Con los datos hemos construimos un gráfico de barras.
¿Cuál es la **moda?**
La máxima frecuencia corresponde al mes de agosto y vale 6.



Otro ejemplo:
En una casa viven dos niños de 6 años cada uno, cinco de 8 años y los dos abuelos de 70 y 76 años respectivamente.
La **media aritmética** de las edades es el promedio de los datos y acá se calcula así:

(2 x 6 + 5 x 8 +70+ 76): 9 =22

La edad de 22 años es la **media aritmética** en este caso.
Ahora, ¿la media permite visualizar las edades de la población estudiada?
A veces la media no nos informa ciertamente sobre la población por lo que se recurre a otros parámetros como **la moda** y la **mediana.**
La **moda** es la edad de ocho años ya que es la más se repite o la de mayor frecuencia.
La **mediana** es la que divide los datos. Una vez ordenados los datos la mediana es la que los separa en dos partes iguales. Acá la edad de ocho años es la que divide a la población. En efecto hay dos personas mayores y dos menores de ocho años.
René Descartes, filósofo y matemático que vivió en Francia en el siglo XVIII, fue el primer hombre que se valió de un gráfico para representar información. Si revisas los diarios y revistas podrás comprobar que comúnmente se presentan distintos tipos de gráficos, con variada información, por ejemplo, sobre salud, economía, administración, educación y otros. Muchos de los gráficos presentados en la prensa no cumplen con ciertas convenciones establecidas, pero sí lo gran su propósito: **comunicar.**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Recordemos que:

- Media aritmética es el promedio de los datos
- Mediana: si la cantidad de datos es impar y los mismos se ordenan en forma creciente o decreciente decimos que la mediana es el valor central de la sucesión de datos. Si el número es par, es la media de los datos centrales.
- Moda: es valor más frecuente

Para pensar y realizar

- En 1930, K. Landsteiner recibió el Premio Nobel de Medicina por haber descubierto que la sangre de las personas se divide en los grupos **A, B, AB, 0** y que puede ser peligroso mezclar sangre de grupos diferentes en las transfusiones. Para la raza blanca, los grupos se distribuyen según los porcentajes indicados en la tabla.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Grupo	Porcentaje
A	42
B	9
AB	3
0	46

Representa estos datos en un gráfico de barras y en un gráfico circular.
Si la Argentina tiene 32 608 687 habitantes, ¿cuántos hay en cada grupo sanguíneo?.
Naturalmente se trata de un número aproximado, derivado de datos estadísticos. Comprueba si estos valores se aproximan a los reales entre los compañeros de tu clase.

- Las calificaciones de un examen (0 a 10) para una clase de 33 alumnos han sido (en orden de lista):
  6,7,8,4,1,2,2,4,5,3,4,10,9,6,7,5,4,4,3,9,4,5,2,6,2,7,7,4,5,4,10,8,6
  Construye la tabla de frecuencias, halla la media aritmética, la moda y la mediana de las calificaciones y dibuja el gráfico de barras correspondiente.

- En una oficina trabajan 20 empleados, cuyos sueldos y las frecuencias respectivas están dados en la siguiente tabla:

Sueldo	250	400	600	1 200	1 500
f	5	4	7	3	1

  La **media aritmética** de los sueldos...
  La **moda** es.................................La **mediana es**.......................................

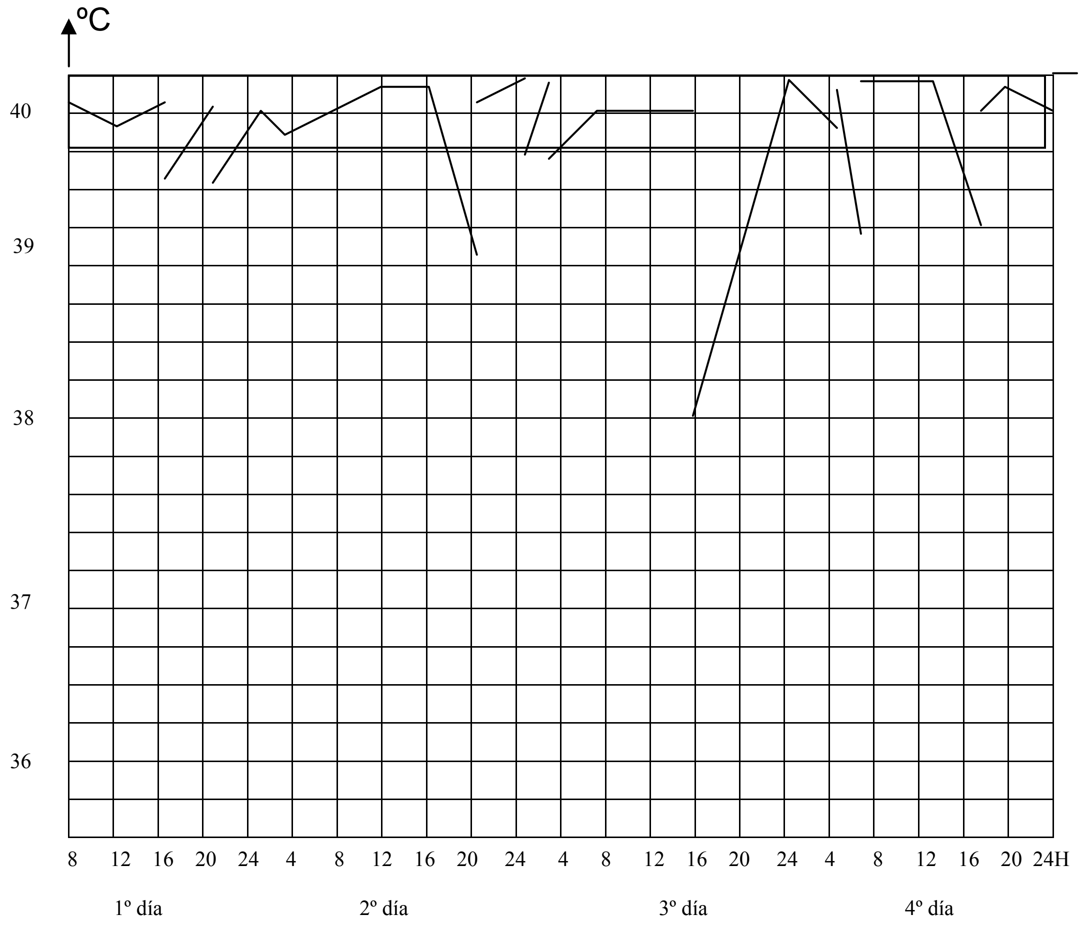
- Entre los 28 alumnos de una clase, hay 12 partidarios del equipo de fútbol A, 8 partidarios del equipo B, 5 partidarios del equipo C y 3 partidarios del equipo D. Construye los respectivos gráficos de barras y circular.
- Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello recoge uno de cada 100 tornillos fabricados y los analiza. El conjunto de tornillos analizados, ¿es población o muestra? ¿Por qué?
- Un campesino posee 127 gallinas. Para probar eficacia de un tipo de alimentación, las pesa a todas antes y después de los 20 días que dura el tratamiento. El conjunto de esas gallinas, ¿es población o muestra? ¿Cuál es el carácter seleccionado en la población? ¿Es cualitativo, cuantitativo discreto o cuantitativo - continuo? ¿Por qué?

Analizando información

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

En cada una de las situaciones siguientes debes analizar la información dada a través del enunciado y la gráfica. Estarás aplicando tu capacidad de comprensión de textos y la correspondiente elaboración del discurso.

1) Se ha tomado la temperatura de un enfermo cada cuatro horas durante tres días y medio. A la vista de esta gráfica en la que se expresan los resultados de estas observaciones, haz un estudio de la función tiempo-temperatura.

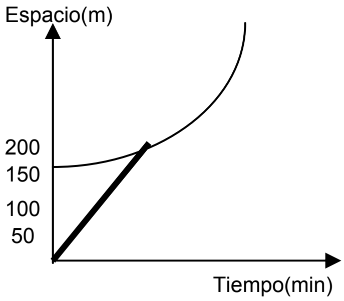


- ¿A qué crees que se debe la franja que aparece en torno a los 37° C?
- En el intervalo de tiempo que va desde las 8 de la mañana hasta las 8 de la tarde (20h) del primer día, la temperatura del paciente es demasiado baja. Señala otro intervalo de tiempo en el que ocurra lo mismo.
- ¿En qué intervalo la temperatura es demasiada alta?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

- Señala un intervalo de 8 horas en el que la temperatura haya sido creciente. ¿Cuánto ha aumentado? En ese intervalo, ¿cuál ha sido la subida media por hora?
- ¿Cuál es el descenso más brusco que observas en la gráfica?
- La temperatura mínima del enfermo durante estos días ha sido 35,8º C a las 8 de la tarde del segundo día. Éste es el mínimo de la curva. Localiza y describe su máximo.

2) Observa estas gráficas referentes a un ómnibus en movimiento y a un viajero que habiéndolo perdido, corre a alcanzarlo:



a)¿cuál es la gráfica del viajero?

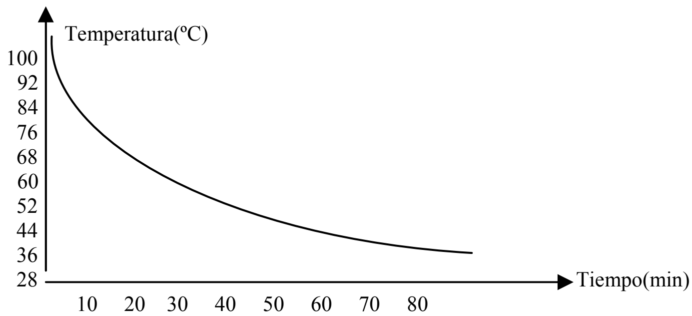
b) ¿A qué distancia estaba del ómnibus cuando comenzó a correr?

c) ¿Llega a alcanzarlo? ¿Por qué?

d)¿ Dónde y cuándo se produce el alcance?

e) Intenta dibujar una nueva gráfica imaginándote que el corre es un viejecito. Contesta, con una nueva gráfica, a las preguntas anteriores.

3) Calentamos un cuarto litro de agua hasta el punto de ebullición. Una vez retirada del fuego, en una habitación de 20º C, medimos la temperatura del agua ocho veces: una cada diez minutos. Obtenemos la siguiente gráfica:



a) ¿Qué temperatura tiene el agua al cabo de 20 minutos? ¿Y al cabo de 35 minutos?
b) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando el agua alcanza los 65º C? ¿Y cuándo alcanza los 45º?
c) ¿Cómo prolongarías la gráfica hacia la derecha? ¿Por qué?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

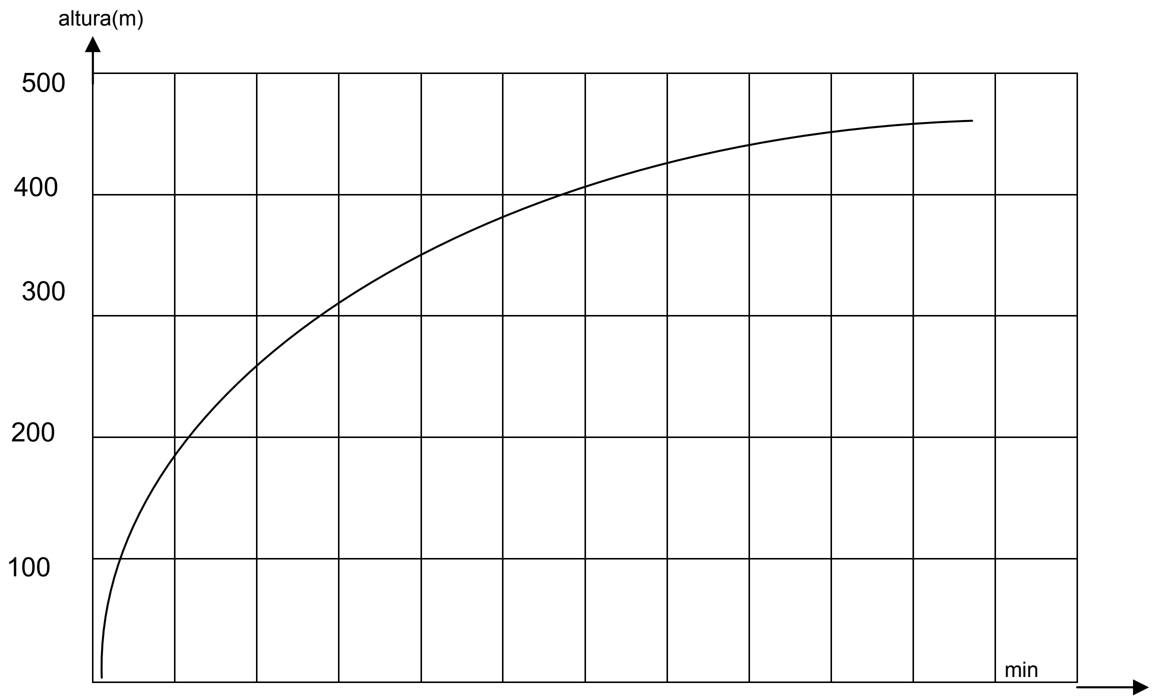
d) ¿Cómo sería la gráfica si la habitación estuviera a 5º C?

4- Recuerda que en un polígono regular convexo todos los lados tienen la misma longitud y los ángulos la misma medida.
Completa la siguiente tabla y representa la función correspondiente:

Número de lados	3	4	....	12
Medida de cada ángulo				

¿Qué forma tendrá un polígono convexo en el que cada ángulo midiera 36º? ¿Sería regular?

5) La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra un globo de hidrógeno que hemos soltado y que se va elevando hasta que estalla:



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

a) ¿A qué altura sube en el primer minuto?
b) ¿A qué altura se encuentra a los 4 minutos de haberlo soltado?
c) ¿Cuánto tarda en estallar desde que los soltamos?
d) ¿Qué altura gana entre el minuto 7 y el minuto 8?
e) ¿Cuál es la función? ¿Crece o decrece?

Las probabilidades ¿La probabilidad es una medida?

Todo pensamiento es una tirada de dados
Stéphane Mallarmé

Inicialmente, al cálculo de probabilidades se le dio el nombre de geometría del azar. Blas Pascal, uno de los creadores de la geometría del azar, decía:
"Así, juntando el rigor de estas demostraciones de la ciencia con la incertidumbre de la suerte, y conciliando estas dos cosas en apariencia contradictorias, puede, sacando su nombre de las dos, arrogarse este título desconcertante: "la geometría del azar".
Históricamente, la teoría de la probabilidad se inició con el estudio de los juegos de azar.
Todos alguna vez hemos jugado con dados. Sabemos que, al arrojar un dado, el conjunto E de los resultados posibles es
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

- ¿Cuál es la probabilidad de que salga el 4?
- ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?

Si juegas con un mazo de naipes españoles, y sacas una carta, cuánto vale:

- la probabilidad de que sea un oro
- la probabilidad de que sea un siete
- la probabilidad de que sea una copa
- la probabilidad de que sea un as o un siete
- la probabilidad de que sea un oro o un siete
- la probabilidad de que sea oro, copa, espada o basto
- la probabilidad de que sea un quince

Anota las observaciones que vayas sacando al tomar en cuenta cada suceso.

Haz medido la probabilidad de los distintos sucesos planteados con una escala graduada desde cero en un extremo hasta uno en el otro. La unidad (1) representa la **certeza absoluta.** La probabilidad de que yo muera algún día es igual a uno, ya que es absolutamente seguro que moriré. El cero (0) representa la **imposibilidad absoluta.** La probabilidad de que yo tenga éxito en un intento de cruzar el Atlántico a nado es cero, ya que el fracaso sería absolutamente seguro.
Intenta dibujarla y representar en ella, las probabilidades de algunos de los sucesos que has analizado.

¿Cómo se llega a una medida efectiva de la probabilidad de cada uno de los sucesos de la vida real?

En los ejemplos anteriores, haz calculado **a priori** los valores de las probabilidades de los sucesos aludidos. La naturaleza misma de los sucesos lo permitía.
Otro camino para medir la probabilidad de un suceso es contar el número de veces que el suceso se presenta en un cierto número de pruebas.
Un cirujano realiza cierta operación en 200 personas y mueren 16 de ellas; se podría tomar probabilidad de muerte p = 16/ 200 = 0,08.
Intenta calcular:

- La probabilidad de que al arrojar tres monedas salga tres caras o tres cruces.
- En una familia de cuatro hijos, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro sean varones. ¿Y la que ninguno sea varón?
- En una bolsa hay 10 bolas blancas, 8 rojas y 2 negras. Sacamos tres bolas, una a una y devolviéndolas, cada vez, a la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras sean blancas y la tercera negra?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

- Calcula las mismas probabilidades del ejercicio anterior si no se devolviera cada vez a la bolsa extraída.

Te proponemos que expreses una función de probabilidad con un extraño dado, que tiene: dos “unos”; dos” dos”, un “tres” y un “cuatro”. Damos una parte de la respuesta en la tabla:

{1}	{2}	{3}	{4}	{1,2}	{1,3}	{2, 3, 4}	......
1/3	1/3	1/6	1/6	2/3	½	2/3	......

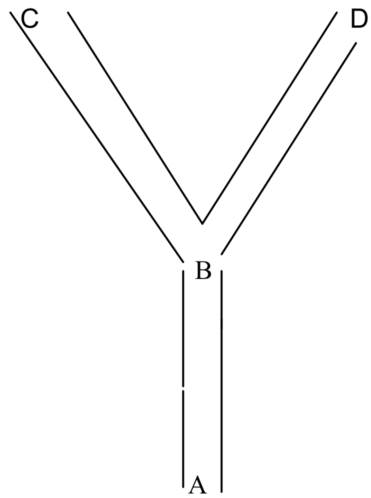
¿Por qué decimos **una** función y no **la** función?
Un alumno distraído, al completar la tabla anterior, calculó así

P ({1,2, 3, 4]):
{ 1,2, 3, 4] = {1,2} + {2, 3, 4}
P ({1, 2, 3, 4]) = P({1,2}) + P({2,3,4})
2 / 3 + 2 / 3
= 4 / 3 ¡No puede ser!

¿Por qué no puede ser? ¿Cuál es el error del razonamiento del alumno?

Un turista despistado

La carretera de una ciudad consta de dos ramales con un trozo común, como indica el plano siguiente:



De los vehículos que parten de A y B, la mitad van a C y la otra mitad a D, alternándose de la forma siguiente:

CDCDCDCDCDCD...

Cada vehículo lleva escrito su destino, para que los pasajeros no se confundan.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Un día, sin embargo un turista despistado que quiere ir a D toma la carretera sin mirar las indicaciones.

¿Cuál de los siguientes sucesos piensas que es más probable?

- el turista llegará a C
- el turista llegará a D

Supongamos que durante esta semana 100 personas tomaron el tren sin mirar su destino.

- ¿Cuántas piensas que llegarán a C, aproximadamente? ¿y a D?
- ¿Qué valor asignarías a la probabilidad de que el turista llegue a C en el ejemplo anterior?

Si con la letra C representamos el suceso "el turista llega al punto C" la probabilidad de que ocurra la representamos por P(C).

- Asigna un valor a la probabilidad de que el turista llegue a D.
  P (D)=
- Calcula la suma siguiente:

P(C)+ P(D)=

- Cuando una persona toma la carretera en la estación B sin fijarse, puede acabar en dos destinos diferentes, C ó D. Podemos representar estas estaciones mediante un conjunto: el conjunto de posibles destinos del viajero. Llamaremos E a este conjunto:

E = {C; D}

¿Cuántos elementos tiene este conjunto?

Dados que nos enseñan probabilidades

Lanzar un dado es un experimento aleatorio. ¿Cuántos resultados diferentes puedes lograr en el tiro de un dado? Representa estos resultados formando un conjunto:

E=

- ¿Cuántos elementos tiene E?

Si lanzas un dado 600 veces. ¿Cuántas veces esperas obtener un 3?

- Asigna un número a las siguientes probabilidades:

P(1)= P(5)= P(2)=

- ¿Cuál es el valor de la suma?

P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Al conjunto de resultados posibles lo llamamos espacio muestral y lo representamos por la letra E. Así, al lanzar un dado, obtenemos el siguiente espacio muestral:
E= {1, 2,3, 4,5, 6}
y podemos encontrar los resultados de algunos sucesos como, por ejemplo,
A: "obtener par" : {2,4,6}

Escribe los resultados de los siguientes sucesos:
B: "número impar"
C: "número primo"
D: "número compuesto"
F:"múltiplo de 3"
Asigna probabilidades a cada uno de los sucesos B, C, D, F
P(B)= P(C)= P(D)= P(F)=

Dados no cúbicos

Construye un dado de cartulina, de forma de tetraedro, es decir con cuatro caras que son triángulos equiláteros iguales.

- Si haces el experimento de lanzar al aire este dado, ¿cuál es el espacio muestral, o conjunto de todos los resultados posibles?
- Si estuviera perfectamente construido, asigna probabilidades a cada uno de los siguientes sucesos:

"obtener un 3 "
"obtener número par "
"obtener impar "
"obtener un 6 "

- Si pegas un botón sobre la cara 2, ¿crees que sería correcto asignar las mismas probabilidades a los sucesos anteriores?

El dodecaedro es un poliedro regular con 12 caras que son polígonos regulares. Te sugerimos que dibujes en una cartulina 12 pentágonos regulares iguales, los recortes y los pegues con celo de tal modo que formen un dodecaedro. Numera sus caras del 1 al 12.
Si haces el experimento de lanzar al aire este dado dodecaédrico. ¿Cuál es el espacio muestral?
Considera los siguientes sucesos que pueden ocurrir cuando se realiza el experimento de lanzar el dado de doce caras:
A: "obtener un 8 "
B: "obtener par "
C. "obtener impar "
D: "obtener múltiplo de 3 "
E: "obtener múltiplo de 5 "
F: "obtener número primo"
Si estuviera perfectamente construido asigna probabilidades a cada uno de estos sucesos:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

P(A)= ; P(B)= ; P(C)= ; P(E)= ; P(F)=
Si pegas un botón en una de las caras, ¿crees que sería correcto asignar las mismas probabilidades a esos sucesos?

Un juego

Juega a "la carrera de los caracoles". Puedes jugar con seis compañeros.
Para ello debes disponer de un dado y un tablero que tenga ubicados en la primera columna los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Cada jugador recibe un caracol con uno de estos números. Por turno se tira el dado, y se mueve en el tablero el caracol que tiene el número que ha salido. Gana el primero que llega a la meta.
Repite el juego varias veces. Registra los resultados. ¿Qué importancia tiene el registro para el análisis probabilístico del juego?
Con el mismo tablero y los mismos elementos ¿Qué otras variantes puedes crear?
¿Qué contenidos se ponen en evidencia?

Con monedas

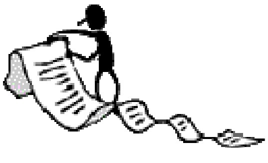
Tiro tres monedas distintas. Contesta:

- Todos los resultados posibles de la experiencia.
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres caras? .¿ Y la de obtener dos caras?
- ¿Qué es más probable: obtener tres caras u obtener dos caras y un número?
- ¿Se modificaría la respuesta a la pregunta anterior si las tres monedas son iguales? ¿Y si se tira tres veces la misma moneda?

Se tiran una moneda y un dado cúbico. Calcula la probabilidad de que:

- Salga número en la moneda y número par en el dado
- Salga figura y número par
- Salga figura o número primo

Para pensar, inventar, calcular y jugar



1) De las 120 personas que trabajan en una empresa, 70 están casadas, 80 son

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

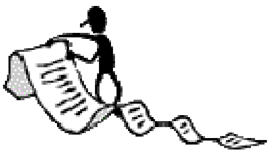
profesionales y 40 son profesionales solteros. ¿Cuál es la probabilidad de que si se elige un empleado de esta empresa al azar resulte:

- Soltero
- Casado y profesional
- Casado o profesional?.

2) Muchos libros dicen que la probabilidad es un número entre 0 y 1. ¿Por qué?
3) En una bolsa hay 20 bolitas blancas y 30 rojas. Sin mirar, se saca una bolita de la bolsa. Será ganador quien adivine el color que sale.
a) ¿Hay alguna estrategia que les permita ser ganadores del juego? ¿Por qué?
b) Si tuvieran que elegir un color para adivinar ¿Cuál elegirían y por qué?
4) Inventa un juego en el que haya una estrategia que les permita ganar siempre, si hacen una elección adecuada. Luego inventen otro en el que, si bien no se tiene la seguridad de ganar, haya alguna estrategia que dé mucha posibilidad de ser ganadores.
5) En una bolsa hay 3 bolitas blancas, 3 rojas y 2 negras y en otra bolsa hay 10 bolitas rojas, 9 blancas y amarillas. Un participante elige una de las bolsas (sabiendo qué contiene cada una) y sin mirar saca una bolita. Gana el juego si sale blanca. ¿Qué bolsa elegirían para jugar? ¿Por qué?
6) En un sobre hay 9 papelitos, todos de la misma forma y del mismo tamaño. Cuatro están pintados de color rojo, dos de color azul y tres son verdes.
a) ¿Cuántos papelitos tendrían que sacar para estar seguros de que aparecerán los tres colores?(una vez sacados los papelitos se dejan fuera del sobre)
b)¿Cuántas veces deberían sacar un papelito del sobre para que, en aproximadamente 30 de estas veces, salgan papelitos verdes?(En este caso el papelito que se saca se vuelve a poner en el sobre)
c) Se ha sacado 100 veces un papelito de un sobre (cada vez se vuelve a colocar en el sobre), y se obtuvieron 10 de color rojo. ¿Les parece que se han sacado del sobre del que se habla en el problema? ¿Por qué? ¿Qué podrían hacer para tener mayor seguridad en la respuesta?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Para pensar y leer



1) Una persona tira un dado.
a) ¿Qué es más probable: sacar un número par o un número menor que 4?
b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número menor que 7? ¿Y mayor que 8?
c) Si se repite la tirada 10 veces, ¿es posible que salga diez veces el uno?
2) Juan tira un dado y avanza una casilla si sale 6. Martín tira un dado y avanza una casilla si saca un número par.
. Juan dice: "Siempre estaré detrás de Martín"
. Martín dice: "Siempre estaré tres casillas delante de Juan"
. Lorena dice: "Es más probable que Martín le gane a Juan".
¿Quién tiene razón?

Dos problemas con historia

El caballero de Meré, un adepto empedernido a los juegos de azar que vivió en el siglo XVII, estudió la frecuencia con la que aparecían ciertos sucesos en relación con esos juegos. Estas experiencias y observaciones lo llevaron a plantearle algunos problemas al matemático y físico Blaise Pascal , quien a su vez escribió al matemático Pierre de Fermat, generándose así una correspondencia que enriqueció el estudio de las probabilidades.

Primer problema:

El caballero de Meré solía apostar a que saliera al menos un 6 en cuatro tiradas sucesivas de un dado (no cargado).
Para saber cuál era su probabilidad de ganar, pensamos que la suma de las probabilidades de que ocurran dos sucesos contrarios es 1; entonces planteamos:
P (ganar) +P (no ganar) = 1
P (al menos un 6) + P (ningún 6) = 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

P (al menos un 6) = 1 - P (ningún 6)

La probabilidad de que en una tirada no salga el 6 es 5 / 6; por lo tanto, la probabilidad de que no salga ningún 6 en cuatro tiradas es

$$(5/6)^4$$

Calcula el valor aproximado de esta probabilidad e indica si es ventajoso apostar como el caballero de Meré.

Segundo problema:

Otro problema que interesó a este caballero fue averiguar si era ventajoso apostar a que saliera un doble 6 al lanzar dos dados veinticuatro veces seguidas.

- Haga los cálculos
- Calcula el valor aproximado de la probabilidad de obtener al menos un doble 6 al arrojar dos dados 24 veces seguidas, e indica si la apuesta es o no ventajosa.

Con los dígitos 0, 2, 3, y 6 se forman todos los números posibles de tres cifras distintas, se anotan en papelitos y se introducen en una urna. Se extrae uno al azar. Calcula la probabilidad de que:
a) Sea un número impar
b) Sea un número par

Dos varones y una mujer forman una fila para entrar al cine y se ubican al azar. Calcula la probabilidad de que:
a) la mujer quede adelante
b) los varones queden juntos
c) la mujer quede atrás
Considerando el doble de personas, con la misma proporción de varones y mujeres, encuentra las probabilidades de los mismos sucesos anotados antes.

¡Qué curioso!

En clase somos 30. ¿Sabes que la probabilidad de que haya dos de nosotros con el mismo día de cumpleaños es mayor que ½?
¡Trata de probarlo!

Un experimento...
¡Jugamos todos!

Dibujamos en un papel una línea recta en la que estén representados los números enteros (desde –5 hasta 5). Colocamos una ficha o papel arrugado en el cero.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

Lanzamos una moneda cada uno y todos al mismo tiempo. Si sale cara, C, movemos el papelito a la derecha una unidad. Si sale cruz, F, el papelito se va a la izquierda. Lanzamos cinco veces moviendo cada vez el papelito de acuerdo con el resultado, como antes. Al final vamos a apuntar en el pizarrón dónde ha terminado el papelito de cada uno.
¿Hay un papelito que quedó en el cero? ¿Por qué?
¿Habrá más papelitos que queden en el cinco (5) que en el uno (1)? ¿Por qué? ¿Quedarán más en el uno o en el tres?

- **Curiosidades**

La paradoja de los presos

Tres presos condenados a prisión perpetua comparten la misma celda. Llega el guardia-cárcel y les dice que uno de ellos ha sido perdonado y será liberado. Cuando le preguntan quién es, el guardia responde: “No me está permitido revelarles a los presos la suerte que han de correr”. Los ruegos de los prisioneros no logran quebrar el mutismo del guardia. Pero el preso A consigue hablarle en privado y lo convence de que no violará sus instrucciones si le dice quién de los dos – B ó C - no ha sido perdonado. El guardia accede porque con ello no le revelará al preso A la suerte que va a correr, ni tampoco la identidad del hombre que ha sido perdonado. “El prisionero B no será liberado”, responde. Si B no será perdonado, piensa A, mi probabilidad de quedar en libertad ya no es 1/3, sino ½, es decir, algo más favorable que antes.
¿Es cierta la diferencia entre las dos probabilidades? ¿Por qué? ¿Cómo explica esta situación paradójica?

- **¡El mundo es un pañuelo!**

En nuestros días hay mucha gente convencida de que las coincidencias están provocadas por los astros u otras fuerzas ocultas. Dos personas acaban de conocerse, por ejemplo en el avión.
Paco: ¡Así que es usted sevillano! Yo tengo allí una gran amiga, Lola Valdecilla, que es abogada.
Jaime:¡ El mundo es un pañuelo! ¡Mi mujer y ella son dos grandes amigas!
¿Son inverosímiles este tipo de coincidencias? Los estadísticos han demostrados que no.
Casi todo el mundo se sorprende mucho cuando al conocer a un extraño-particularmente si es lejos de casa- descubre que tiene un amigo común. Un grupo de investigadores en ciencias sociales del MIT, dirigidos por Ithiel de Sola Pool, llevaron a cabo un estudio de esta paradoja de “el mundo es un pañuelo”. Descubrieron que elegidas al azar dos personas en Estados Unidos, por término medio cada una de ellas conoce a unas 1000 más. Se tiene entonces una probabilidad de 1 por 100 000 de que ambas se conozcan directamente. La probabilidad, de que ambas puedan quedar

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

conectados a través de una cadena de dos intermediarios es una realidad superior al 99! Dicho de otra forma, si Brown y Smith son dos norteamericanos tomados al azar, es prácticamente seguro que Brown conoce alguien que conoce a una persona que conoce a Smith:

- **Paradoja electoral**

Hay tres candidatos para la presidencia de un país. Lo llamamos Abel, Bustos y Calvo.
Una encuesta indica que 2/3 del electorado prefieren a A entre A y B, y que 2/3 prefieren a B frente a C. ¿Se deduce que la mayoría de votantes preferirían a A en la disyuntiva entre A y C?
¿No necesariamente? ¿Por qué?
Esta paradoja data del siglo XVII y es conocida con el nombre de “Paradoja de Arrow”, en recuerdo a Kenneth J. Arrow, premio Nobel de Economía, quien demostró, a partir de ella y de otras coincidencias lógicas, que un sistema perfecto de votación democrático es, en principio, imposible.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8

A modo de despedida

Después de haber compartido un espacio on-line relativo a temas de matemática básica, que te serán de suma utilidad para tus estudios universitarios, a través de estas e-clases de TELECÁTEDRA, que como ya sabes pretende ser un servicio académico no convencional pensado y realizado desde la Cátedra de Análisis Matemático I de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCa, sólo me queda instarte a estudiar con entusiasmo y valor. Sin dudas que encontrarás obstáculos en tu diario trabajo, pero venciéndolos es cómo lograrás el triunfo.

¡Imagínate ya profesional! Recorre imaginariamente el tiempo y sueña un poco. Adivina tu futuro, piénsalo y constrúyelo. La imaginación es la condición esencial sin la cual es no posible ningún tipo de realidad.

Habla con algún amigo o contigo mismo. Hablar es existir en el océano del lenguaje sabiéndonos idénticos al comunicar nuestros afectos, y diferentes porque sentimos sus efectos.

Al hablar, apalabrar, fabular, iniciamos un entramado imaginario que nos conduce a la formación creativa de nuestro ser. Imaginar es la presencia de la voz que pregunta por la voz que responde.

Usando tu imaginación e inteligencia y con emoción y devoción, podrás hacer que tu formación sea posible y real.

Y en esta empresa estarás acompañado...por todos los que hoy sueñan y deliran por un cambio, por cierto, que con esfuerzos y renunciamientos diversos. No es casual que los estudiantes universitarios franceses tomaran como consigna de su protesta del año 1968: ¡La Imaginación al Poder!

Magíster Olga Carabús
Profesora de Análisis Matemático I
de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas
de la Universidad Nacional de Catamarca

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-52-8