CARTILLA DE COLOQUIOS

Hace algunos años un gran científico dio un sabio consejo: **"Aquel que le gusta la práctica sin la teoría, es como el marino que navega barcos sin timón ni brújula y nunca sabe dónde debe andar"**

Leonardo de Vinci

Escribió Domingo Faustino Sarmiento, en Caligrafía Tomo XXVIII, página 289: **"Si se sirven hoy nuestros campesinos de los mejores arados y de las máquinas más adelantadas que la Europa y los Estados Unidos han aplicado a la labranza, ¿por qué no nos serviremos igualmente de los medios más perfectos para educar a nuestros hijos"**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES COMO UNA ARGUMENTACIÓN PARA EL CÁLCULO

Atenderemos temas del Cálculo Diferencial e Integral, que ya haz estudiado, a través del uso de calculadoras que grafican funciones. Cada actividad propuesta para la discusión tiene como aspecto principal el contenido, con especial énfasis en lo referente a la conceptualización de las ideas esenciales del Cálculo. La graficadora, te permitirá hacer otra mirada, facilitándote la mejor comprensión de los mismos.

PRACTICANDO CON LA GRAFICADORA

Trabajaremos con la CFX- 9850G Plus. La orientación te será útil para trabajar con la graficadora que dispongas, ya que con el manual de uso podrás fácilmente encontrar la manera de realizar lo propuesto aquí.

Graficando a f(x) con la graficadora

La función con la que ensayaremos es $f(x) = 1/ (1 + 2 e^{-x})$

Presionamos la siguiente secuencia de teclas:

<MENÚ> y < GRAPH > para graficar

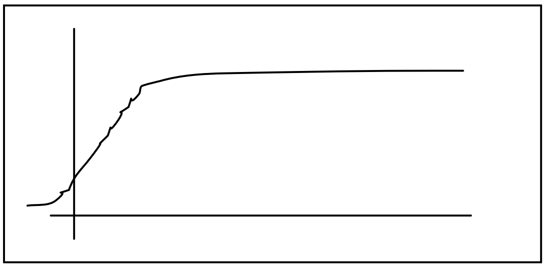
Ingresamos la fórmula en Y_1 =

<1>, < : >, <(>, <1>,<+>,<2>, <SHIFT>,<ln>,<(-)>,<x,θ,T>, <)>

La pantalla muestra 1: (1+2 x e- x)

Oprimimos <DRAW>

Y la pantalla de la calculadora nos muestra la gráfica de Y_1



Es probable que tu gráfica difiera un poco de la que aquí se presenta. La pantalla de la calculadora solo puede presentarnos una porción de todo el plano cartesiano, la que decidamos que nos muestre. Es como si abriéramos una ventana para ver la gráfica. Si abrimos la ventana en una porción del plano donde no hay gráfica no veremos nada en la pantalla, esto no quiere decir que no exista gráfica sino que posiblemente estamos mirando en el lugar equivocado. Si la

Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

ventana es muy pequeña podemos ver los detalles de la gráfica pero perderemos características globales de la misma. Si la ventana es muy grande podríamos perder los detalles de la gráfica, aún aquellos que nos caracterizan una curva. El detalle apropiado de la ventana dependerá de lo que queramos explorar: comportamientos locales (detalles) o comportamientos globales(formas) de la función en estudio.
Con la tecla **V-WINDOW** podemos definir la porción del plano que decidimos ver. La calculadora tiene valores asignados desde la fábrica para su rango. Estos valores determinan el rango estándar de la máquina o el rango "defauld". Podemos cambiar estos valores como nos convenga. Los valores del rango o ventana estándar son

X mín = -10	Y min = -10
X máx = 10	Y max = 10
X scale = 1	Y scale = 1

El tamaño de la ventana lo indicaremos así **[X min, X max] [Y min, Y max].** Por ejemplo si quieres obtener una gráfica como la nuestra te sugerimos la ventana **[-4, 10], [-1,-1.1].**
En la gráfica se observa el comportamiento tendencial de f(x) a ser y = 1 cuando " x tiende a ser grande", y a ser Y = 0 cuando x tiende a ser pequeño(con signo negativo).

Una situación a plantear puede ser: determinar los parámetros de la función f(x) para que el límite sea uno propuesto, por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} a/\left(b + 2e^{-cx}\right) = 4$$

Esta situación matemática puede ser presentada en un contexto de la economía, por ejemplo.

El valor activo de cierto capital, con respecto al tiempo, al cabo de un proceso de capitalización está representado por el siguiente modelo:

$V(x)= \quad a/\left(b + 2e^{-cx}\right) = 4$

Determina los parámetros, en el modelo, de tal suerte que cuando el tiempo x sea considerablemente grande, el valor activo V tenga un comportamiento muy cercano a 4 millones de dólares.

Secuencia para el análisis y discusión de las soluciones:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

1) multiplicidad de valores para los parámetros a, b y c
2) condiciones iniciales distintas
3) condición inicial única pero con comportamientos de crecimiento distinto

Para graficar las funciones que obtienes al tomar los valores de los parámetros que sugiere tu análisis, debes escribir las fórmulas en Y_1 , Y_2 ,Y_3 , sucesivamente.
Para poder ver las gráficas oprime DRAW

ENSAYANDO UN PROGRAMA CON LA GRAFICADORA

Ensaya con tu graficadora un programa que te permita dibujar las gráficas de $f(x) = 4 : (1 + 2 e^{-cx})$, cuando c toma los valores de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 8 ; es decir 8 gráficas dibujadas en un mismo plano.

COLOQUIO Nº 1

EXPLORANDO LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Utilizando a la calculadora como un graficador para explorar las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = a (x - h)^2 + k$, variaremos estos parámetros y veremos los efectos de esta variación en la gráfica.
Comenzamos con una función cuadrática de la más simple: $f(x) = x^2$.
Grafica la función $f(x) = x^2$.
Grafica luego $g(x) = 2x^2$
Grafica las funciones : $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = 0,5x^2$ y $y(x) = -2x^2$
La ventana [-10, 10], [-10, 10] podría ser útil aquí. Hemos trabajado funciones de la forma $f(x) = a x^2$. La variable ha sido a y hemos observado los efectos de esta variación en la gráfica de la función.
Ensaya otros valores de a en la función $f(x) = a x^2$. Modifica la ventana si lo crees conveniente
¿Qué efectos produce , en la gráfica de $f(x) = a x^2$, la variación del parámetro a ?

Exploremos ahora funciones de la forma $f(x) = x^2 + k$.
Grafica $f(x) = x^2$
Usando Y_2 , Y_3 y Y_4 grafica $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 – 5$ y $y(x) = x^2 - 5$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Hemos trabajado con funciones de la forma $f(x) = x^2 + k$. Con los valores ensayados para k, probamos el efecto que este parámetro de la función ocasiona a la gráfica de la misma.
Prueba otros valores de k en la función $f(x) = x^2 + k$. Modifica la ventana si lo crees conveniente
¿ Qué efectos produce, en la gráfica de $f(x) = x^2 + k$, la variación del parámetro k?

Exploremos ahora funciones de la forma $f(x) = (x + h)^2$
Grafica simultáneamente las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x + 3)^2$
Grafica simultáneamente las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 3)^2$ y $h(x) = (x - 3)^2$
Podemos ya observar el efecto del parámetro.
Prueba con otros valores de h en la función $f(x) = (x + h)^2$. Modifica la ventana si lo crees conveniente.
¿Cuál es el efecto de la variación del parámetro h en la gráfica de $f(x) = (x + h)^2$
Hasta ahora has trabajado con la expresión: $f(x)= (x + h)^2 + k$, como una de las formas de las funciones cuadráticas. ¿Puedes explicar que significan a partir de la gráfica cada uno de estos parámetros a, h y k?
Trabajamos con la graficadora y representamos, por ejemplo:

$Y_1 = 2(x - 5)^2 - 17$ $\qquad$ $Y_3 = (x - 1)^2 - 2$

$Y_2 = 0,3(x + 9)^2 + 2$ $\qquad$ $Y_4 = -1,5(x + 8)^2 - 15$

¿Qué ventana sería la más apropiada para ver las cuatro funciones?

Una propuesta:

Elabora un programa con tu calculadora graficadora, tal que a partir de la gráfica de una función, encuentres su expresión analítica. La calculadora ofrecerá una gráfica de una parábola, los parámetros de la misma serán determinados por la calculadora de forma aleatoria, serán para mayor facilidad números enteros. Al observar la gráfica, intentarás "adivinar" el valor de estos parámetros. La calculadora dibujará entonces su gráfica. Si las gráficas coinciden, entonces has logrado el objetivo. ¡Suerte!

Otra propuesta:

Una función de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, se puede escribir como $f(x) = ax^2+2ahx + h^2 + k$. Esto es, una función cuadrática de la forma $f(x)= ax^2+bx +c$, con $b= 2ah$ y $c = h^2 + k$.
Modifica el programa anterior cambiando a las funciones a esta forma y estima los coeficientes a, b y c.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Con el uso de la calculadora, y a partir de cualquier función $Y_1 = f(x)$ ya puedes concluir con la exploración de las gráficas de funciones, respondiendo:
¿Cómo es la gráfica de $Y_2 = a\,f(x)$; cómo la de $Y_3 = f(x) + k$; cómo la de $Y_4 = f(x - h)$?
¿ Cuál sería la gráfica de $a\,f(x-h) + k$ con respecto a la gráfica de f(x).?

COLOQUIO Nº 2

COMPORTAMIENTO TENDENCIAL EN LAS OPERACIONES GRÁFICAS

Aquí exploraremos diferentes situaciones gráficas que surgen cuando a una función conocida f(x)a la que se le suma una " recta" arbitraria,

$$Y(x) = f(x) + \text{"recta"}.$$

Por ejemplo, la situación gráfica de la función $f(x) = x^2$, al sumarle la recta $y(x) = ax + b$, consiste en trasladar a la parábola horizontalmente y/o verticalmente, dependiendo de los parámetros a y b.
Si a partir de $f(x) = x^2$, se suma la recta $y(x) = ax + b$, entonces es:

$$Y(x) = x^2 + ax + b$$

Una transformación algebraica da cuenta del traslado de la parábola $f(x) = x^2$. Completando el cuadrado es:

$$Y(x) = (x + a/2)^2 - (a/2)^2 + b$$

$$Y(x) = (x + a/2)^2 + (b - a^2/4)$$

El vértice de la parábola es el punto P (a/2, $b - a^2/4$).

La transformación gráfica fue trasladar la gráfica de la parábola llevando el vértice desde el origen a P.
El propósito aquí es descubrir la transformación a partir del comportamiento tendencial de la gráfica Y(x) y no de los vértices y / o ceros de la función.
Consideraremos aquí los comportamientos tendenciales entre $f(x) = x^2$ y la recta $y(x) = ax + b$
Grafica $f_1 = x^2$; $f_2 = x$ y $f_3 = x^2 + x$
Ensaya con distintos tipos de rectas f_2 , que pasen por el origen

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

De acuerdo a las situaciones gráficas obtenidas, puedes apreciar diferentes traslados de la parábola $f(x) = x^2$, a la izquierda o derecha de su posición original. Estos " traslados" de la parábola dependen de la "recta" .
Al tomar rectas de distintas pendientes, pero que pasen por el origen, se observa que es allí donde la parábola tiende a ser como "la recta". Es decir, la parábola $f(x) = x^2$ tiene un comportamiento tendencial a la recta $y = ax$ en esa misma ventana.

$$f(x) = x^2 \longrightarrow \qquad y = ax$$

Puede verse que también la recta tiene un comportamiento tendencial a la parábola si atendemos a los valores del coeficiente a, quien determina el trazo de la curva $Y(x)= x^2+ax$
Ensaya con $f(x) = x^2$, sumándole las rectas $y_1 =x$; $y_2 = 1/100x$; $y_3 = 100x$; $y_4 =-x$.
Caracteriza "la aritmética de las gráficas" dadas aquí
Explora de situación gráfica de manera similar al caso anterior para la función $Y(x)=x^2+ ax + b$, con b # 0
Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola, $Y(x) = x^2+ ax + b$, en el punto (0, Y(0))
Relaciona los resultados obtenidos en los puntos anteriores

Una propuesta

Explora ahora situaciones gráficas de la función $Y(x)= x^3$ + "recta". Trabaja con a = 1, 1/ 100, 100, -1 y b=0. Observa el comportamiento tendencial de la función cúbica y analiza su punto de inflexión y establece alguna conclusión.
Explora una situación gráfica para la función $Y(x) = x^3+ax + b$, , con $b \neq 0$.
Halla la ecuación de la recta tangente a la cúbica, $Y(x) = x^3+ax + b$, en el punto (0, y(0))
Relaciona los resultados obtenidos.
Explora una situación gráfica para la $Y(x) = x^n+ax + b$.
Halla la ecuación de la recta tangente a la cúbica, $Y(x) = x^n+ax + b$, en el punto (0, y(0))
Relaciona los resultados obtenidos en los dos últimos puntos.
¿Qué puedes decir, de la discusión anterior si Y(x) = f(x), donde f(x) es cualquier función?

Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

COLOQUIO Nº 3
COMPORTAMIENTO TENDENCIAL DE LA FUNCIÓN DERIVADA Y SU PRIMITIVA

Acá estudiaremos las relaciones que guardan las gráficas de f(x) y f ’(x). Con la calculadora podemos graficar a ambas.
Grafica $f(x)= x^2$ y $f'(x)=2x$ en una misma pantalla. La primera es una parábola y la segunda una recta.
Grafica la función $g(x) = 2\ x^2$ y su derivada, $g'(x) = 4x$. ¿Qué efecto produjo el cambio de parámetro a en una función de la forma $f(x) = ax^2$ en su gráfica y en el de su derivada?
Ensaya algunos otros valores para a en f y f’

Graficando la derivada

La calculadora grafica la derivada numérica de una función para un valor particular de x. La calculadora usa, para encontrar dicho valor, la siguiente fórmula:

$$\text{NDER}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

En el menú CALC de la calculadora podrás encontrar la opción para la derivada numérica.
En la CFX- 9850 PLUS de CASIO, en el Menú de presentación, elegir RUN, que es el que corresponde al análisis de funciones. Usa OPTN y F4 (CALC) y la opción de la derivada numérica.
Grafica una y = f(x) y su derivada en la misma pantalla. Responde:
¿ Qué sucede en f para los valores de x donde f ’ es cero?
¿ Qué sucede en f para los valores de x donde f ’ es negativa?
¿ Qué sucede en f para los valores de x donde f ’ es positiva?

Grafica y = senx y sus derivada y = cos x. Responde a los mismos interrogantes anteriores
¿De la gráfica de la derivada de una función puedes ensayar el dibujo de la gráfica de la función? ¿Te sirve la graficadora?

Calculando integrales definidas

Con la graficadora ensaya el cálculo de integrales entre límites.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

COLOQUIO Nº 4

EL USO DE SISTEMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO

Existen numerosos SCS especializados, diseñados para resolver problemas de tipo específico; los más usados en la enseñanza por los países más adelantados están los siguientes: REDUCE, MACSYMA; MATHEMATICA; MAPLE y DERIVE.
En nuestro curso usaremos el DERIVE, ya que es el más fácilmente disponible.

DERIVE

Aquí daremos algunas indicaciones para facilitar tus primeros pasos. El conocimiento de las múltiples posibilidades del sistema, así como la soltura en su manejo, las irá adquiriendo con el uso y con tus propios descubrimientos.
Con DERIVE es posible simplificar, desarrollar, factorizar expresiones aritméticas o algebraicas, calcular integrales, límites, desarrollos de Taylor, determinantes, productos e inversas de matrices, resolver sistemas de ecuaciones lineales, dibujar gráficas de curvas, etc.
En Análisis Matemático I, lo usarás de según las propuestas que en este trabajo te encomendaré.
Las expresiones se introducen con Author y el resultado de una operación indicada en una expresión se obtiene con Simplify.
Las fórmulas se introducen usando la notación estándar en matemáticas (cuidando los paréntesis) y el sistema las presnta en pantalla de forma fácil de leer.
Ejemplo: Al acceder a Author, el sistema nos permite escribir en la línea de edición. Si escribimos, por ejemplo, la expresión 2^25x / (x+4!) , aparecerá en la pantalla

---

1: $\dfrac{2^{25}\,x}{x + 4!}$

Si después pedimos Simplify, la pantalla quedará

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

1: $\dfrac{2^{25}\,x}{x + 4!}$

2: $\dfrac{33554432\,x}{4 + 24}$

El comando Calculus engloba los comandos que permiten calcular derivadas, integrales, límites, polinomios de Taylor.
Propuesta:
Introduce en pantalla algunas funciones con las que trabajaste durante el año. Por ejemplo: F(x) :=3x^2 + 7 (ojo! , es importante poner := para que el sistema lo reconozca).
Para introducir una función definida a trozos se puede usar la función IF. Sdu sintasis es sencilla:
IF(condición, instrucción 1, instrucción 2, instrucción 3). Las instrucciones 2 y 3 se pueden omitir.
Por ejemplo, la función

$$f(x)=\begin{cases} 2\,x \text{ si } x > 0 \\ 5x - 3 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$$

se puede definir introduciendo en Author la expresión IF (x>0, 2x, 5x –3)
Introduce en pantalla una función definida por trozos

Gráficas con DERIVE
Para representar la gráfica de una función se usa el comando Plot. La primera vez que lo hagamos el sistema creará una ventana gráfica y nos pedirá elegir una de las siguientes opciones:
Beside (ventana situada en la parte derecha de la pantalla)
Under (ventana situada en la parte inferior)
Overlay (ventana superpuesta)
Si elegimos una de las primeras opciones, podemos ver al mismo tiempo las expresiones y las gráficas. En este caso, el sistema pedirá el tamaño de la nueva ventana proponiendo una opción por defecto, que podemos modificar, o bien aceptar pulsando < Intro>

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Grafica la función sen x, eligiendo la opción Under
Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \log x \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \left(\left(1/x^2\right) - \left(1/\sin x^2\right)\right)$$

usando el menú (Calculus / Limit), después de haber introducido la función, o bien con la instrucción directa Lim(expresión, x, 0)
Calcula, usando Calculus/ Differenciate, las dos primeras derivadas de

$$\left((2x+1)/(1+x^2) \right)^{2x}$$

Usa el comando Plot para obtener la representación gráfica de

$f(x) = x^3 - x$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x^2 e^{1/x}$

Calcula: $\int_0^1 (1/\sqrt{x})\,dx$

COLOQUIO Nª 5

UN SISTEMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO: DERIVE

Estudiando sucesiones con el DERIVE

Las sucesiones que conoces pueden ser trabajadas con el DERIVE. Para introducirlas debes usar el comando Author.
Por ejemplo para la sucesión $\{a_n\} = \left\{\dfrac{3n+5}{2n-7}\right\}$
se teclea la expresión a(n): = (3 n + 5) / (2 n – 7).
Si pedimos que simplifique, por ejemplo, la expresión a (250) de la sucesión, es en este caso 750/ 493. En ocasiones, es preferible tomar el valor aproximado, con approx, en lugar de Simplify.
Pidiendo la simplificación o aproximación de la expresión

VECTOR (a (n), n ,1, k)

Para algún número k, DERIVE devuelve un vector con los k primeros de la sucesión.
Al simplificar la expresión

VECTOR (a (n), n ,1, k)

DERIVE devuelve la matriz de la forma

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

[[1, a(1)], [2, a(2)] [3, a(3)] .... [k, a(k)]]

donde a (i) es i-ésimo término de la sucesión.
Pidiendo Plot sobre la matriz se consigue la representación gráfica de los primeros términos de la sucesión, la que a veces facilita la elaboración de conjeturas sobre las propiedades de ésta.
A veces una sucesión se define de modo recurrente, por ejemplo en la forma x_0 = a, $x_n = f(x_{n-1})$. Para introducir en Derive una sucesión así definida se puede usar IF o la función ITERATE. Para ello se introduce la expresión

x(n) : = (n = 0, a , f(x (n -1))

o bien

x(n) : = ITERATE(f(x), x , a , n)

Para calcular los términos de la sucesión con valores altos de n, la segunda expresión es más aconsejable que la primera, ya que resulta más eficiente.
Si utilizas ITERATES, en lugar de ITERATE, al simplificar se obtienen los primeros términos de la sucesión.
Toma alguna sucesión de la que ya hayas encontrado el límite y comprueba el resultado con el DERIVE
Dadas las sucesiones:

1) 7, 7.1, 7.01, 7.001, 7.0001, 7.00001,......
2) 1/3, 1/2/, 3/5, 2/3, 5/7, ¾, 7/9,........

encuentra la fórmula para su término general a(n) y comprueba con DERIVE que la propuesta es correcta.

Para cada una de las siguientes sucesiones:
$\{1/n\}$; $\{(n + 2) / n\}$; $\{(3 n + 5)/ (1 – 4n)\}$

1) Define para DERIVE su término general
2) Representa gráficamente los cincuenta primeros términos (Te recomiendo usar la opción Under para tener la representación en la parte inferior de la pantalla y tomar Scale x : 5, y : 1 . Con Move x : 25 y Center se puede hacer que sólo aparezca en pantalla el semiplano de la derecha)
3) A la vista de la gráfica correspondiente a cada sucesión, intenta conjeturar algunas propiedades de la misma; por ejemplo si tiene límite y el valor, en su caso, de éste. Comprueba, pidiendo al ordenador que calcule el límite, la validez de esta conjetura.

Estudiando series de potencias con DERIVE. Desarrollo en Series de Taylor

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Para hallar un desarrollo en series de Taylor deberá procederse del siguiente modo:

Author: introducir la función
Calculus
Taylor

Pide el grado (degree) y el punto(point)
Con Expand se consigue el desarrollo

Comprueba con funciones cuyo desarrollos en series de Taylor conoces :

1) f(x) =1 /(1 +x) en x = 0 y de grado 10
2) f(x)=senx en el punto π / 2 y de grado 8
3) f(x) =cos x, en el punto x = 0 y de grado 10 (MacLaurin)
4) f(x) = e^x , en el punto x = 0 y de grado 7 (MacLaurin)
5) f(x) = lnx en el punto 2 y de grado 5

COLOQUIO Nª 6

UN SISTEMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO : DERIVE

Las propiedades analíticas de las funciones se pueden ver con el DERIVE

La posibilidad de un SCS de calcular límites y límites laterales permite verificar las conjeturas hechas a través de las aproximaciones gráficas y numéricas. Esto te será de suma utilidad para no quedarte con la mera aproximación y verificar tus conjeturas.
Dada una función f(x), se pueden obtener aproximaciones numéricas a sus límites en diferentes puntos de una manera rápida y clara utilizando la función VECTOR DERIVE.
Por ejemplo, para aproximar lím f(x) se puede definir:
LIMITE- DERECHA (c,h) : =VECTOR([c+kh, f(c +kh)], k, 7, 1, -1)
Que dará una matriz 7 x 2, cuya primera columna son valores de x que se aproximan a c (más próximos cuanto menor sea h) y la segunda columna representa los valores f(x) en dichos puntos.
Por ejemplo, si se define
F(x) : = sen x / x

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Y simplificamos LIMITE- DERECHA (0, 0.01) se obtiene el resultado que aparece en la figura que sigue:

$$4: \left[\begin{array}{ll} 0.07 & 0.999183 \\ 0.06 & 0.9994 \\ 0.05 & 0.999583 \\ 0.04 & 0.999733 \\ 0.03 & 0.99985 \\ 0.02 & 0.999933 \\ 0.01 & 0.999983 \end{array}\right]$$

DERIVE permite calcular límites laterales de una función. Se puede hacer, por ejemplo, desde el menú, utilizando los comandos Calculus/ Limit, y el programa pide sucesivamente la variable respecto a la que se hace el límite y el valor al que tiende, ofreciendo una opción para seleccionar si el límite es por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.
DERIVE calcula derivadas y derivadas parciales, usando las opciones del menú Calculus/ Differenciate, indicando la variable respecto a la que se deriva y el orden de la derivada deseada, y simplificando la expresión que resulta. También puede hacerse desde la opción Author escribiendo: DIF (función, variable, orden de la derivada).
Por ejemplo, escribiendo DIF(x ^5, x, 3) aparece en pantalla
$(d/dx)^3\ (x^5)$
y con Simplify obtenemos 60 x^2. Si escribimos DIF (f(x) , x), calcula la derivada primera.
El DERIVE tiene también la posibilidad de realizar el estudio de gráficas. Y permite estudiar a las mismas en torno a un punto concreto. Para ello situamos la cruz de la pantalla en dicho punto, o bien indicamos sus coordenadas usando el comando Move de la ventana gráfica, y seleccionamos Center. Una vez allí usamos el comando Zoom que permite elegir si cambiamos la escala en ambos (Both), sólo en X , o sólo en Y, y en qué sentido (In / Out).
El Zoom también puede controlarse, de forma más cómoda, desde las teclas de función:
< F9>: disminuye la escala en ambos ejes (el tamaño de la gráfica aumenta)
< F10>: aumenta la escala en ambos ejes (el tamaño de la gráfica disminuye)
< F7>: disminuye la escala en el eje Y

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

< F8>: aumenta la escala en el eje Y
< ↑ > < F7>: disminuye la escala en el eje X
< ↑> < F7>: aumenta la escala en el eje X
Para representar funciones sólo cuando se verifican determinadas condiciones, la función IF, permite indicar para qué valores queremos la gráfica de una función dada. Por ejemplo, para represntar f(x) en el intervalo [1,3) y g(x) en el resto, escribimos IF(1< = x < x, F(x), G(x)) y pulsamos Plot/ Plot para obtener la gráfica.
Para representar una función sólo cuando es creciente, escribimos
IF (d/dxF(x) >0, F(x)) y pulsamos Plot/Plot

Propuestas:

Considera la función $f(x) = x^3 - 2$. se lecciona el rango X=(-3,3), Y : (-3,3) y represéntala gráficamente. Utiliza la traza de la calculadora:

a) Haz una tabla de valores con los valores que toman x y f(x) considerando valores para x entre 0,4 y 1. A partir de esos datos, conjetura el valor de

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Pudes variar el rango si quieres observar valores más cercanos a 1. Puedes trabajar con usar el modo de variables paramétricas con Tstep.

b) Haz una tabla de valores que toman a x y f(x) considerando valores entre 1.5 y 1. A partir de esos datos, conjetura el valor de :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

c) Con lo obtenido en a) y b) , da un posible valor de

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

d) Con la calculadora evalúa la función f(x) en distintos puntos próximos a 1 y completa las siguientes tablas:

x	f(x)
0.5	
0.9	
0.99	
0.999	

x	f(x)
1.5	
1.1	
1.01	
1.001	

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

e) ¿Se confirma tu respuesta de c). Si no ¿cuál crees que puede ser el valor de $\lim_{x\to 1} f(x)$?

f) ¿Cómo justificarías que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no es –1.0001? ¿Y que no es – 0.9999?

g) ¿Cuánto vale f(1)? ¿Coincide con $\lim_{x\to 1} f(x)$? ¿Qué puedes decir de f(x) en x = 1?

Representa gráficamente h(x) = (sen x)/ x

a) Observando la gráfica, ¿cuánto vale $\lim_{x\to 0} h(x)$?

b) Halla h(0). ¿Qué ocurre? ¿Qué puedes decir de la continuidad de h(x) en x= 0?

c) Representa a la vez y = sen x e y = x. ¿Cómo son ambas gráficas cerca de x= 0? ¿Tiene esto alguna relación con el resultado de $\lim_{x\to 0} h(x)$?

Considera la función f(x) = 1 / (x –2) y realiza un estudio similar al planteado en el punto anterior, para $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$?

Propuestas para estudiar derivadas con DERIVE

Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 1$.

a) Define, en DERIVE, una función, PENDIENTE (a, b), que calcule la pendiente entre puntos de la forma (a, f(a)) y (b, f(b)). Utilízala para definir una función, SECANTE (a,b), que halle la ecuación de la recta secante a f(x) determinada por los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)).

b) Calcula las secantes correspondientes a los puntos: a = 0, b= 1; a = 0.4, b = 1 y a = 0.8, b= 1 (se deja fijo el punto correspondiente a x= 1 y el otro se va acercando a éste. Indica la pendiente de cada una de las rectas y represéntalas gráficamente junto con f(x).

c) Simplifica SECANTE (1,1). ¿Qué ocurre? Calcula $\lim_{b\to 1}$ SECANTE (1, b)

Representa gráficamente el resultado y da una interpretación geométrica del mismo.

d) Calcula $\lim_{b\to 1}$ PENDIENTE (1, b)¿Tiene alguna relación con lo obtenido en c) ?

e) Calcula f ’(x) y f ’(1). ¿Qué relación tiene con lo obtenido en los puntos anteriores?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 1$

a) Sitúa la cruz de la pantalla gráfica en el punto (1,0) y centra la pantalla en dicho punto. Observa cómo se comporta la gráfica muy cerca del punto (1,0) (usa <F9>) hasta por ejemplo, la escala x: 0.001, y: 0.001).
   A medida que nos acercamos a (1,0), ¿a qué tipo de función se va pareciendo la gráfica?
   Busca con la cruz las coordenadas de algún punto de la gráfica próximo a x=1.0005. Halla la pendiente entre los dos puntos. Calcula f '(x) y halla f '(1). ¿Hay alguna relación entre ambos resultados?

b) Vuelve a poner la gráfica con escala x: 1, y: 1.
   Realiza los mismos cálculos del apartado anterior con el punto (-2,3)
   Cerca del punto (1,0), ¿la función es creciente o decreciente?
   Y cerca de (-2,3). ¿En cuál de los dos casos la función varía más rápidamente?

COLOQUIO Nª 7

UN SISTEMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO: DERIVE

Estudiando el crecimiento y concavidad de las gráficas de funciones con el DERIVE

Podemos estudiar a través de la visualización la relación entre la primera y segunda derivada de una función con la forma de su gráfica.
Comencemos por representar en un mismo gráfico una función y su derivada. Ya conoces cómo es la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función. Pero es más ilustrativo representar f(x) sólo en aquellos intervalos donde f '(x) mantiene el signo. Esto lo logramos usando la función IF.
Por ejemplo: “Primera derivada positiva” IF [d/dx (F(x)>0, F(x)]. Observamos que con f '(x) >0 , sólo aparece f(x) en aquellos intervalos en donde es creciente.
De manera análoga se puede ver al estudiar la relación entre concavidad de la gráfica de f(x) y su segunda derivada.
También puedes estudiar la relación entre los puntos en donde se anulan la primera y segunda derivada de uan función con sus extremos y puntos de inflexión.

Una propuesta:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

1) Representa gráficamente la función A(x) = [x^3 $e^{-xexp\ 2}$(3 – 2x^2) + 2/3]
a) De la observación de gráfica de A(x) responde:
¿En qué puntos debería anularse la derivada de A(x)?
¿En qué puntos no debería existir la derivada de A(x)?
b) Calcula A' (x) y represéntala gráficamente junto con A(x)
Señala en la gráfica de A'(x) los puntos en los que ésta se anula y en los que no existe. ¿Coinciden con los señalados en a)?

¿Qué se puede asegurar sobre el comportamiento de una función en un punto en el que la derivada es cero? (Señala la/s respuesta/s correctas/s)

- Ese punto es un extremo (máximo o mínimo) de la función
-En ese punto la tangente es horizontal
- En ese punto la función vale cero

c) ¿Se puede asegurar que todos los puntos críticos de una función son extremos de dicha función? Justifica la respuesta.
¿Se puede asegurar que todos los extremos de una función son puntos en donde la derivada se hace cero? Justifica la respuesta.

Conociendo sólo la derivada de una función, ¿cómo se puede determinar si un punto crítico es máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas?

2) Representa gráficamente la función B(x)= x^6 $e^{-xexp\ 2}$
a) Observando la gráfica de B(x), ¿en qué puntos se debería anular la segunda derivada de B(x)?
b) Calcula B''(x) y represéntala gráficamente junto con B(x).
Observando la gráfica de B"(x), ¿en qué puntos se anula B''(x) ¿ Coincide con los obtenidos en a)?

c) Halla los puntos de inflexión de B(x)

d) ¿Se puede asegurar que todos los puntos que anulan la segunda derivada de una función son puntos de inflexión de dicha función? Justifica la respuesta.
e) Conociendo sólo la segunda derivada de una función, ¿cómo se puede determinar si un punto que la hace cero es punto de inflexión o no?

3) Considera las funciones f(x) = $x^2 – x$ y g(x) = ln x
Calcula f(1), f '(1), f''(1) ,g(1), g '(1) y g''(1).
Representa gráficamente ambas funciones y su tangente en x = 1. Indica similitudes y diferencias entre ellas.
4) Ídem para las funciones h(x) = e^{x-1} y j(x) = ¼ x^2 + ½ x – ¾
5)Conjetura cuál puede ser el significado del valor de la derivada segunda de una función en un punto. Comprueba la validez de la conjetura para funciones del tipo y = a x^2 para diversos valores de a.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Descubriendo las reglas de derivación

Considera las funciones cos x, arc tan x, $\sqrt{x+1}$ y ln x. Calcula sus derivadas. Completa la siguiente tabla:

f(x)	f ' (x)	(x f(x))'	(x^3 f(x))'	(x^4 f(x))'
Cos x				
Arc tan x				
$\sqrt{x+1}$				
ln x				

Después de asignar cada valor a f(x) puedes simplificar la expresión:

VECTOR ([d/dx x^n f(x)],n, 1,4)

a) Haz una conjetura sobre la expresión de (x^4 f(x))' para una función general f(x).
b) Verifícala con DERIVE (para indicar que f(x) es una función cualquiera, introduce con Author la expresión F(x): = y pulsa <Intro>).
c) Haz una conjetura sobre la derivada de f(x) y g(x) para dos funciones cualesquiera f(x) y g(x).
d) Verifícala con DERIVE (haz Author / G(x): = antes de derivar la expresión f(x) g(x)).
e) Haz lo mismo con f(x) / x^n para n = 1, 2,....5.
f) Haz lo mismo con $(f(x))^n$ para n = 1, 2,....5.

COLOQUIO Nª 8

UN SISTEMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO: DERIVE

Estudiando integración con el DERIVE

La primera posibilidad que tienes para trabajar integrales con el DERIVE es el cálculo de las primitivas o antiderivadas e integrales definidas, por medio del comando Calculus / Integrate. El sistema pedirá la expresión a integrar, que se puede introducir en este momento o bien tenerla iluminada en la pantalla. A continuación pide la variable de integración; si la expresión depende de una única variable ésta parecerá como opción por defecto, en otro caso se debe indicar la variable deseada. Finalmente el programa pide el intervalo de integración; si la integral es indefinida basta pulsar <Intro>, en otro caso se deben especificar los extremos del intervalo. Aparecerá en la pantalla la expresión de la integral y con Simplify se obtiene el resultado.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

La expresión $\int_a^b u\,dx$ también se puede introducir directamente con Author mediante INT (u, x, a, b).

Ejemplo:

1: " Cálculo de una primitiva"

2: $\int x \sin(x)\, e^x\, dx$

3: "Con Simplify"

4: $e^x \left(\frac{x \sin(x)}{2} - \frac{(x-1)\cos(x)}{2} \right)$

5: "Cálculo de una integral definida"

6: $\int_0^1 x \sin(x)\, e^x\, dx$

7: $\frac{e \sin(1)}{2} - \frac{1}{2}$

Nota: Conviene señalar que al pedir Simplify sobre una integral indefinida, DERIVE calcula una primitiva (sólo una) y no siempre la más natural debido al carácter general de sus algoritmos.

Cuando se trata de una integral definida, siempre se puede obtener, con aprox, una aproximación a su valor con la precisión que se quiera.

El programa DERIVE incorpora, en algunos ficheros de utilidades, diverssa funciones que pueden ser útiles en relación con el cálculo de integrales.

Se puede usar INT-PARTS que se encuentra en el ficher MISC.MTH. Con esta fucnión se puede calcular integrales por partes diciendo al ordenador qué parte es u y qué parte es v. Muchas veces el ordenador nos entrega una fórmula de reducción.

Con el comando Expand podemos trabajar las integrales de fracciones racionales, obteniendo las fracciones elementales que deben ser integradas.

También podemos calcular las sumas de Riemann, con la función LEFT_ RIEMANN del fichero MISC. MTH. Al simplificar la expresión LEFT_ RIEMANN (u, x, a, b), se obtiene le valor de la suma de Riemann de la integral $\int_a^b u\,dx$.

DERIVE ofrece otras posibilidades en integración, calculando integrales iteradas y algunas integrales impropias.

Algunas propuestas:

a) Calcula con ayuda del DERIVE, las integrales:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx \qquad \int \frac{1}{9 + x^2}\, dx$$

b) Intenta dar una fórmula general para: $\int \frac{1}{a + b\,x^2}\,dx.$

c) Calcula , con DERIVE, las integrales:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4\,x + 8}\, dx \qquad \int \frac{1}{x^2 + 5\,x + 6}\, dx. \qquad \int \frac{1}{x^2 + 4x + 6}\, dx$$

¿Por qué crees que se obtienen resultados tan diferentes?
Pide Factor sobre los denominadores de cada una de las funciones integrando ¿Qué ocurre?

d) ¿ Qué ocurre si pedimos Simplify directamente sobre la expresión $\int \frac{x^n}{x + b}\, dx$?

¿Encuentras alguna explicación?

e) Calcula con ayuda de DERIVE, la integral anterior, para los valores de n= 0, 1, 2, 3, 4. Pude hacerlo simplificando la :

$$\text{VECTOR } \left(\int \frac{x^n}{x + b}\, dx, n, 0, 4\right)$$

¿Observas alguna relación entre las integrales?

f) Define la función:
I(n) : = IF(n= 0, ln(x+b), (x^n /n) – b I (n-1))

Y pide Simplify sobre la expresión VECTOR (I(n), n, 0, 4)¿ Qué sucede?

Otra propuesta:

Trataremos de analizar la Regla de Barrow (Segundo Teorema del Cálculo Integral)

Trabajaremos con la integral:

$$\int_a^b \cos x \, dx.$$

a) Define las funciones:
F(x) : = cos (x)
SUMA (n) : = SUM (F (a + k (b –a) / n) (b –a)/ n, k, 0, n))

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Explica lo que crees que calcula la segunda función y pide Simplify sobre ella.

b) Calcula $\lim_{x\to\infty}$ SUMA (n) y $\int_a^b \cos x \, dx$ ¿Qué ocurre? ¿Por qué?

c) Trata de encontrar el área que delimita la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ con eleje OX, entre las abscisas 0 y 2.

COLOQUIO Nª 9

CONCEPTUALIZACIONES EN EL CÁLCULO DIFERENCIAI

El cálculo diferencial forma junto al cálculo integral una de las ramas más importantes de las matemáticas.
Vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante desarrollar métodos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios. Justamente esto es el propósito del cálculo diferencial, que es *la matemática de los cambios*.
Todo el cálculo diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la razón de cambio.
Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar los procesos. Siempre que dos magnitudes (variables) están conectadas mediante una relación funcional (función), se puede estudiar el cambio relativo de una de las magnitudes con respecto a la otra.
Un ejemplo típico de una razón de cambio es la *velocidad*. Una velocidad es la razón (cociente) entre una distancia y un tiempo y describe el cambio de la posición de un cuerpo con respecto al tiempo transcurrido. Si hablamos de la velocidad de un coche es fácil ver que una velocidad (80km/h) significa un cambio de posición de 80 km en una hora, un desplazamiento de 80 km en una hora.
Hay numerosos ejemplos en la vida diaria y en las ciencias en donde interesa el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra. Esto puede ser importante para determinar los resultados de un proceso o ayudarnos a pronosticar el futuro del mismo. El conocer las "razones de cambio" también puede ser útil para buscar factores que controlen los procesos y sus cambios.
Si un médico está midiendo el pulso de un paciente y nota un cambio repentino, va a investigar las causas del cambio. Los polígrafos, o detectores de mentiras, están basados en este principio: un cambio repentino de pulso o respiración indica un cambio en el estado emocional del individuo.

Una propuesta:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Una enfermera controla la temperatura de un paciente y registra los resultados:

Horas	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00
Temp	36	37	37.2	37.8	37.9	40	40	40	37.5

a) ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 16.00 y las 17:00 horas, las 19:00 y las 22:00 y las 22:00 horas y las 23:00?
b) Traza la curva de fiebre del paciente
c) Calcula las razones de cambio entre las 15:00 y las 23:00 horas para intervalos de una hora.
d) Grafica los valores obtenidos en c
e) Completa la tabla siguiente:

Temperatura	**Gráfica**	**Razón de cambio**
Sube	Sube	Positiva
Queda igual		
Baja		

f) Expresa la razón de cambio promedio usando ΔT y Δt, para este ejemplo. Generaliza para un cambio de magnitud **y** con respecto a una magnitud **x.**

Una propuesta:

a) Elabora un ejemplo de función, en donde e ilustra lo que llamamos razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea. Por ejemplo la distancia recorrida por un móvil en movimiento y el tiempo, el cambio de población de un lugar determinado durante determinado periodo de tiempo, etc. Realiza tablas y gráficas y calcula los valores de las razones de cambio.
b) Geométricamente ilustra a ambas razones de cambio

LAS IDEAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO INTEGRAL

El concepto fundamental del cálculo integral está presente en las experiencias diarias de muchas personas, aunque de manera inconsciente. Esta idea es la de resultados o efectos de procesos de cambio. Mientras que en el Cálculo Diferencial interesa el cambio instantáneo de una magnitud, el cálculo Integral determina los resultados totales de estos procesos de cambio.

Los vinateros toman pruebas de los vinos y licores, y a partir del contenido alcohólico en un momento dado, sacan conclusiones acerca del añejamiento de las bebidas, ya que conocen todo el proceso de cambio que experimentan éstas. Al descargar un acumulador, es suficiente conocer una descarga instantánea y la curva que describe el proceso de descarga, para saber cuándo se acabará su capacidad de almacenamiento de corriente eléctrica.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Una propuesta:
A un tanque inicialmente vacío entra y sale agua. La tabla que sigue muestra las cantidades de agua que salen o entran en periodos de un minuto durante diez minutos.

Tiempo (minuto)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
Agua que entra y sale (litros)	5	10	7	3	0	0	-1	-4	-6	-2

a) Usa la información de la tabla para calcular la cantidad de agua presente en el tanque después de 1,2,...10 minutos.
b) Haz una gráfica de la cantidad de agua con respecto al tiempo
c) Completa la tabla:

Si la cantidad de agua que entra al tanque es	**La gráfica**
Positiva	
Cero	
Negativa	

Otra propuesta:
Dos estudiantes organizan un pequeño negocio de fotocopias y tipografía. La tabla que sigue muestra sus ingresos netos semanales durante cinco semanas.

Semana	1.	2.	3.	4.	5.
Ingresos	$ 100	$150	$120	$ 500	$300

a) Calcula los ingresos acumulados después de 1, 2,...5 semanas
b) Grafica los ingresos acumulados como función del tiempo en semanas
c) Estima de la gráfica las ganancias después de dos semanas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

Ahora veremos cómo calcular los resultados acumulados para razones de cambio constantes (velocidad promedio de un vehículo, movimientos promedio de una cuenta bancaria, etc.)

Una propuesta:

Un coche viaja de A a D y pasa po B y C en el camino: En la tabla está la información del viaje.

Lugar	A	B	C	D
Tiempo	12:00	1:00	1:30	2:15
Velocidad Promedio	30 km/h	50 km/h	40 km/h	

a) Encuentra la distancia total recorrida por el coche de A a D
b) Grafica las velocidades promedio y las distancias recorridas a partir de A en un sistema de coordenadas.

Los cálculos necesarios para obtener la distancia a a a D pueden ser tabulados de esta manera:

Lugar	**Tiempo**	**Velocidad Promedio(km/h) x tiempo (h)**	**Distancia acumulada(km)**
A	12:00	30 x 1 = 30	0
B	1:00	50 x 0.5 = 25	30
C	1:30	40 x 0.75 = 30	55
D	2:15		85

c) Elabora una fórmula para la distancia total con “Δt_i”

Otra propuesta:

Inventa un vuelo de avión y representa en un gráfico cartesiano la velocidad en función del tiempo.

a) ¿A qué corresponde físicamente el área de un rectángulo elemental del área bajo la curva? ¿Qué representa físicamente el área total debajo de la curva?
b) ¿Cómo se puede obtener un resultado exacto para el área de bajo de la curva?

Un modelo:

La tasa de decrecimiento (rapidez de desintegración) del radio es proporcional a la cantidad presente en cualquier momento. La semivida o vida media es de 1690 años y se tienen actualmente 20 mg de este elemento químico.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9

a) Si se tendrán *y* miligramos de radio dentro de *t* años a partir de ahora, exprese a *y* como función de *t*.

b) Usa la graficadora para representarla y estima la cantidad total de radio que se tendrá en 1000 años.

c) ¿Qué representa la integral definida que se plantea con la velocidad de desintegración? Ilustra

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
CÁTEDRA ANÁLISIS MATEMÁTICO I
Secretaría de Ciencia y Tecnología – Editorial Científica Universitaria
ISBN: 978-987-1341-55-9