

**DIFICULTADES AL JUSTIFICAR PROCEDIMIENTOS EN ÁLGEBRA LINEAL.  
ESTUDIO DE CASOS CON ALUMNOS DE INGENIERÍA.**

**Herrera, Carlos Gabriel; Elena, Clara Rita; Medina, Liliana del Valle; Aranda, Marcos.**

Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca Maximio Victoria 55 – CP 4700 - TEL 03833 – 435112 [cgherrera@tecno.unca.edu.ar](mailto:cgherrera@tecno.unca.edu.ar)

**INTRODUCCIÓN**

Diversos trabajos de investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de contenidos de Álgebra Lineal, han abordado las dificultades que se les presentan a los alumnos en la resolución de situaciones prácticas de esta rama de las matemáticas. Se pueden citar conclusiones que son comunes a diversos trabajos de investigación realizados; uno de ellos establece la poca o nula relación entre los contenidos del Álgebra Lineal con los conocimientos que le son brindados a los alumnos en los cursos previos al de la Universidad (Dorier, Robert, Robinet, Rogalsky, 2001).

Otros trabajos como los realizados en la cátedra de Álgebra, de la carrera de Ingeniería en Informática de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCa, mencionan las dificultades que se presentan a los alumnos en la resolución de situaciones prácticas de Álgebra Lineal y su relación con la Geometría Analítica (Herrera, 2003) y las que se observan en Geometría Analítica para establecer la correcta interrelación entre los conocimientos teóricos de distintos temas de la asignatura necesarios para la resolución de nuevas situaciones (Herrera, Núñez, Dip, Elena, Rodríguez, 2006). Por otra parte, los alumnos que interpretan objetos geométricos en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  no tienen mayores dificultades en resolver y justificar los problemas planteados. (Herrera, Elena, 2007).

De todo lo expuesto surge la necesidad de efectuar una articulación entre conceptos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica por cuanto, en la formación básica de los alumnos de ingeniería, esos temas son fundamentales y permiten el desarrollo de habilidades de razonamiento formal, útiles para la correcta resolución de situaciones problemáticas de diversa índole.

El objetivo principal del presente estudio fue investigar las dificultades más frecuentes de justificación de la acción que enfrentan los alumnos al resolver situaciones prácticas de contenidos de Álgebra Lineal.

El trabajo está inserto en el proyecto de Investigación “Incidencia de un Sistema Didáctico Integrador en la calidad de asimilación de contenidos de Álgebra y Geometría Analítica”. Este sistema didáctico pretende subsanar las mayores dificultades detectadas en los alumnos en lo referente a la calidad de asimilación de contenidos, especialmente en las dimensiones de Conciencia y Generalización, es decir la justificación de los procedimientos realizados y la aplicación de conceptos aprendidos a diferentes situaciones.

### **FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA**

La unidad entre la enseñanza y la ciencia es de suma importancia para la educación superior; consecuentemente, la integración vertical y horizontal de los conceptos son esenciales en el diseño curricular, dado que la fragmentación excesiva de los contenidos educativos dificulta el necesario desarrollo de la independencia cognitiva del estudiante.

En general, la enseñanza de Álgebra Lineal y la Geometría Analítica es tratada como si en ellas se trabajaran dos dominios de conocimientos separados (no relacionados), cuando en realidad debería efectuarse una articulación tanto vertical como horizontal entre los conceptos de ambas asignaturas. Esta relación, tanto en su contenido temático como en la enseñanza, justifica el planteamiento de un estudio que aborde la problemática. Es así que surge el proyecto de investigación “Incidencia de un Sistema Didáctico Integrador en la calidad de asimilación de contenidos de Álgebra y Geometría Analítica”, dentro del cual se encuadra el presente estudio. Esta investigación se fundamenta en la Teoría de Asimilación de Galperin y, en virtud de ella, se define la Calidad de la Asimilación de los contenidos de Álgebra y Geometría Analítica, como el grado de verificación de tres dimensiones descriptivas de la acción: Independencia, Conciencia y Generalización. El Grado de Independencia está determinado por los niveles de ayuda que desde un inicio se planifican y que paulatinamente se van retirando hasta lograr un dominio de la acción. El Grado de Conciencia mide no sólo si cumple correctamente la acción, sino también si es capaz de justificarla, de explicar qué y por qué lo hizo. El Grado de Generalización mide el grado en que el estudiante es capaz de aplicar conceptos aprendidos en diferentes situaciones, cuando resuelve situaciones nuevas, seleccionando los contenidos adecuados y realizando las tareas necesarias.

El sistema didáctico se sustenta en la concepción sistémica del proceso de enseñanza aprendizaje conocida como Modelo del Contenido, considerando este como un sistema de conocimientos y un

sistema de habilidades. Los sistemas de contenidos no pueden concebirse como un simple conjunto de elementos, sino como una entidad cuya estructura esta determinada por el conjunto de relaciones esenciales entre dichos elementos. Lo primario en un sistema es su totalidad, constituida por elementos relacionados entre si, que no se seleccionan o construyen mediante la división de él como totalidad. Sobre esta base se pueden identificar los principales rasgos del contenido de un sistema: integridad, jerarquía y multiplicidad de descripciones.

La concepción sistémica de los contenidos exige la organización del proceso cognitivo del alumno y la estructuración de su actividad en relación con el objeto de estudio para hacerlo consciente de ella, y de esta manera abre la posibilidad de desarrollar contenidos no específicos, como las habilidades para el estudio.

En el modelo del contenido, “el aprendizaje presupone la apropiación del conocimiento necesario para ejecutar una o varias acciones y ejercitarla, con la finalidad de que éstas se transformen en un procedimiento, en correspondencia con el concepto adquirido” (Hernández Fernández, 1989).

Cuando se plantea la cuestión de cómo propiciar la organización del conocimiento, en el contexto de la teoría de la Estructuración, se busca establecer las conexiones entre conceptos y habilidades, por cuanto se entiende que no puede haber un conocimiento sin una habilidad mediante - el cual funcione, ni una habilidad que no esté asociada a un conocimiento.

Según Herminia Hernández Fernández, Delgado Rubí y Fernández de Alaiza (2001), existen dos variantes fundamentales del enfoque sistémico de los contenidos: la estructural funcional y la genética. El enfoque estructural funcional desarrollado por Reshelova, citado por Hernández Fernández et Al. (2001), describe al objeto de estudio íntegro, destacando su composición, su estructura, su existencia como elemento de un sistema más amplio y su estabilidad con relación al medio que lo circunda.

El enfoque genético desarrollado por Salmina, describe el objeto de estudio como un cuerpo complejo que es el resultado del desarrollo del elemento inicial o “célula” del sistema. En este caso, las relaciones genéticas son el tipo principal de relación de desarrollo y pueden ser concebidas especialmente para el análisis del objeto. Esta variante exige la distinción de la célula y de la ley de su desarrollo. Según este enfoque, los alumnos construyen por sí mismos los nuevos conocimientos, a partir de los principios de organización del concepto célula y las leyes de su cambio.

Herminia Hernández planteó el concepto de combinación lineal como célula generadora de conocimientos en un programa de Álgebra Lineal, criterio que fue adoptado en el sistema didáctico en elaboración dentro del proyecto de investigación. Dip y Herrera (2007) proponen como célula

generadora de contenidos de Geometría Analítica el concepto de ecuaciones paramétricas de una curva, por tratarse de un contenido transversal, ya que toda curva en el plano o en el espacio puede ser representada mediante este tipo de ecuaciones.

## **METODOLOGÍA**

La investigación se llevó a cabo con estudiantes de primer año de la Carrera de Ingeniería en Informática de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca. Se trabajó en la cátedra Álgebra con una muestra de 57 alumnos que cumplieron con el 80 % de asistencia a los trabajos prácticos al momento de efectuar la evaluación, excluyéndose de la misma a alumnos reinscriptos y aquellos que cursaron carreras de nivel superior relacionadas con las matemáticas. La importancia de esta forma de selección se debe al hecho de que interesaba trabajar con alumnos que recién ingresaran al nivel universitario y estuvieran recibiendo conocimientos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica. Cabe aclarar que la asignatura Geometría Analítica se dicta simultáneamente.

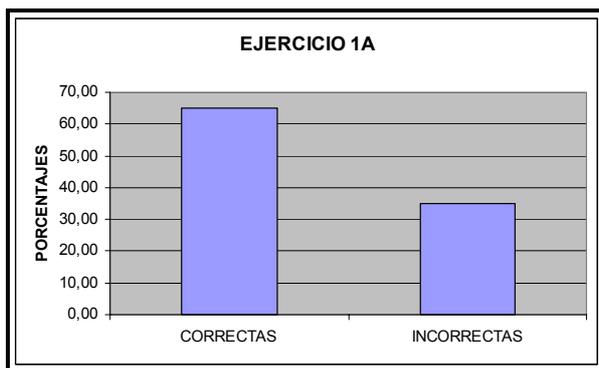
Para la toma de datos se utilizó un examen escrito consistente en dos ejercicios, el primero con cuatro incisos y el segundo con tres, referentes a conceptos de espacios vectoriales y base de un espacio vectorial respectivamente, en el que se plantea al alumno la resolución de una serie de situaciones prácticas y se les solicita la justificación correspondiente. Se buscó indagar si los alumnos resolvieron los ejercicios planteados, utilizando el contexto geométrico y las relaciones de conceptos de Álgebra Lineal con Geometría Analítica a través de las distintas representaciones de rectas y planos en  $\mathbb{R}^3$ . Se trabajó con estos objetos por tratarse de los únicos subespacios de  $\mathbb{R}^3$  además del vector nulo y  $\mathbb{R}^3$  mismo. Este instrumento se aplicó durante el desarrollo de las clases prácticas correspondientes a las Unidades N° 3 y 4 del programa, previo a la primera evaluación parcial.

Si bien el instrumento utilizado permite esencialmente una aproximación de corte descriptivo a la información obtenida, cabe aclarar que no sólo se tuvo en cuenta la corrección de la respuesta dada, sino también el procedimiento seguido por el estudiante, de tal manera que el tipo de justificación proporcionada, los errores cometidos y los recursos puestos en juego, constituyeron aspectos de orden cualitativo que se tuvieron en cuenta para el análisis. Por lo que la investigación es descriptiva, de tipo cuantitativo – cualitativo. Se realizó un análisis descriptivo de los resultados obtenidos por los alumnos, como así también el análisis de los errores frecuentes cometidos en la resolución de las situaciones planteadas y las dificultades para efectuar justificaciones.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El primer inciso del Ejercicio 1 consistió en identificar geoméricamente los conjuntos dados  $W_1$  y  $W_2$  cuyos resultados se presentan en el Gráfico N° 1:

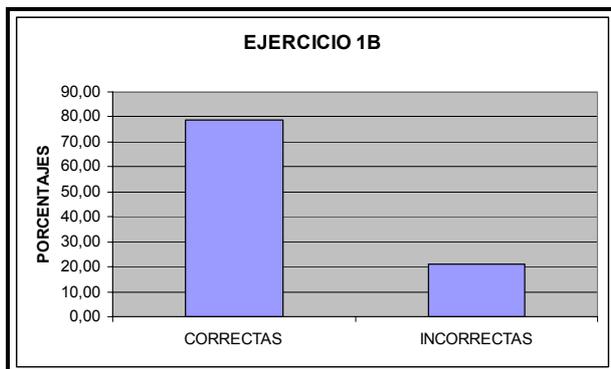
**Gráfico 1: respuestas en porcentajes al ejercicio 1A**



El 65 % de los alumnos de la muestra identificaron correctamente los conjuntos dados con sus correspondientes objetos geoméricos. En este caso  $W_1$  y  $W_2$  representaban la ecuación general de un plano en  $R^3$  y la ecuación paramétrica de una recta en  $R^3$ .

En relación al inciso B del ejercicio 1, en el que se pedía demostrar que los conjuntos presentados en el apartado anterior (1A) son subespacios de  $R^3$ , los resultados obtenidos se visualizan en el siguiente gráfico:

**Gráfico 2: respuestas en porcentajes al Ejercicio 1B**



Para esta consigna, el 79 % de los alumnos demostró correctamente que los conjuntos  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $R^3$ . Del análisis de las respuestas de los alumnos se observa que en este caso no presentan dificultades para la demostración de las condiciones suficientes de la definición de subespacio vectorial.

Considerando la interpretación geométrica de los conjuntos presentados y su relación con la demostración de la condición de subespacio se observan los resultados en la Tabla N° 1:

**Tabla 1: Resultados de Ejercicio 1B según resultados de Ejercicio 1A**

EJERCICIO 1A	EJERCICIO 1B	
	CORRECTO	INCORRECTO
CORRECTO	33	4
INCORRECTO	12	8

En este caso es superior el porcentaje de alumnos que responden correctamente la segunda parte del ejercicio, cuando identifican correctamente el objeto geométrico con el que trabajan.

En la última parte del ejercicio se observaron dificultades para la interpretación geométrica de la Intersección de dos subespacios (Ejercicio 1C) ya que sólo lo realiza correctamente el 50 % de los alumnos.

Con respecto a la demostración que la intersección de dos subespacios es también subespacio (Ejercicio 1D) el 37 % de los alumnos responde correctamente. En la siguiente tabla se pueden observar los resultados del Ejercicio 1D según respuestas del Ejercicio 1C:

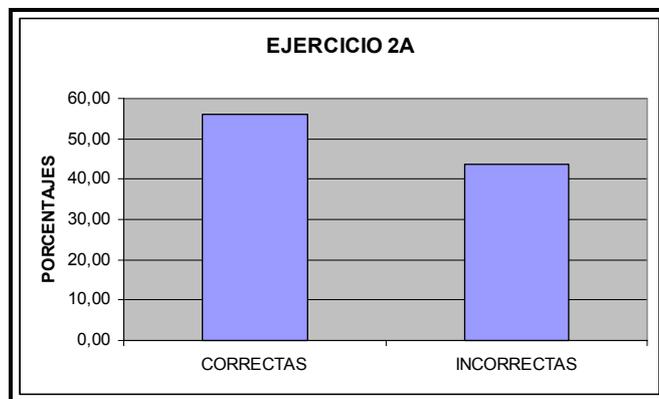
**Tabla 2: Resultados de Ejercicio 1D según resultados de Ejercicio 1C**

EJERCICIO 1C	EJERCICIO 1D	
	CORRECTO	INCORRECTO
CORRECTO	20	9
INCORRECTO	1	27

Se observa que las dificultades en demostrar que la intersección es un subespacio, disminuyen en los alumnos que interpretaron geoméricamente, en forma correcta, dicha intersección.

La segunda parte del instrumento, consistió en que dado un conjunto de tres vectores responder a tres incisos A, B y C. En el inciso A se debía determinar si el conjunto constituye un sistema generador de un determinado espacio vectorial  $W$ , este último era un plano que incluye el origen del sistema de coordenadas; en el inciso B se debía determinar si el conjunto dado era linealmente independiente o linealmente dependiente y el inciso C consistió en la elección de una base para el espacio  $W$  que a su vez sea un subconjunto del conjunto dado de vectores. En el gráfico N° 3 se observan los resultados del Ejercicio 2 A.

**Gráfico 3: respuestas en porcentajes del Ejercicio 2A**



Un 56 % de los alumnos resuelve correctamente el inciso A. En las respuestas del inciso B no se observaron dificultades en la mecánica del cálculo, ya que el 75 % de los alumnos lo realizaron correctamente; sin embargo, dicho cálculo no hubiese sido necesario si se establecían las relaciones geométricas correspondientes o si tenían en cuenta la relación entre la dimensión de un espacio vectorial y la cantidad máxima de vectores Linealmente Independientes que puede tener ese espacio. Sólo un 25% de los alumnos de la muestra realizó correctamente el inciso C.

De los resultados de los ejercicios 1 y 2 se observa que el porcentaje más alto de éxitos (79%) se obtuvo para el inciso B del Ejercicio 1, con lo que se evidencia el conocimiento de las condiciones suficientes de la definición de subespacio vectorial, mientras que la situación más difícil, ya que sólo el 25 % la contestó correctamente, se planteó en el inciso C del Ejercicio 2, lo que pone de manifiesto la falta de relación entre el concepto de Base de un Espacio Vectorial y su interpretación geométrica correspondiente.

Una diferencia importante se observó al analizar la forma de las justificaciones que dieron los alumnos para fundamentar sus respuestas a cada una de las situaciones planteadas. Mientras algunos lo hicieron utilizando exclusivamente el lenguaje del Álgebra Lineal por ejemplo en el ejercicio 2B, otros argumentaron sus respuestas apoyados en la representación gráfica del objeto matemático planteado.

### **CONCLUSIONES**

Casi todos los alumnos con los cuales se llevó a cabo el estudio, utilizaron los conceptos de Geometría Analítica como herramienta para efectuar un gráfico representativo del problema, pero en muy pocos casos lo utilizaron para validar un resultado obtenido por procedimientos propios del Álgebra Lineal. Esta forma de proceder les ocasionó dificultades en la justificación de las acciones, lo que en la Teoría de Galperin se define a través de la dimensión Grado de Conciencia.

Tanto para los temas Subespacios Vectoriales y Base de un espacio vectorial, no se observan dificultades en la justificación de procedimientos cuando se trabaja desde el Álgebra Lineal sin la intervención de la Geometría Analítica.

No sucede lo mismo para el tema Operaciones entre Subespacios, trabajando con la intersección de objetos geométricos en  $\mathbb{R}^3$ , en la que los alumnos que identificaron geoméricamente dicha intersección son los que logran probar que la misma es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ , justificando correctamente la acción que realizaron.

En el tema base de un espacio vectorial como subconjunto de un conjunto dado, no se observan dificultades en la mecánica del cálculo, aunque sí en la relación de temas de Álgebra Lineal y en la interpretación geométrica de los objetos matemáticos que se estudian.

Entre las causas posibles del origen de las dificultades en la justificación podrían señalarse las siguientes: falta de integración vertical de contenidos de Álgebra Lineal, falta de integración horizontal entre contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, uso deficiente o simplificado de los temas presentados durante su desarrollo. De esto se desprende que es necesario modificar la forma de introducir los conceptos de ambas asignaturas, para que exista una real integración entre sus contenidos y una mejor asimilación de los mismos por parte de los alumnos.

### **RECOMENDACIONES**

Los resultados obtenidos evidencian que al enseñar el tema Espacio Vectorial, se debe hacer hincapié en su relación con conceptos de Geometría Analítica, no sólo en la teoría sino también en el desarrollo de los trabajos prácticos.

La integración de contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica requiere de un trabajo coordinado entre ambas cátedras, como así también de la elaboración de material de estudio (Teórico y Práctico) que enfatice las relaciones entre conceptos de ambas asignaturas, que para el profesor pueden parecer triviales, pero seguramente para el alumno no lo son.

### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Dip, H. & Herrera G. G. & Moreno, O. E.; (2007): Leyes de Formación de La Célula Generadora de los conceptos de Geometría Analítica a partir de las Ecuaciones Paramétricas de las curvas.

Dip, H. & Herrera, C.G.; (2007): Las ecuaciones paramétricas como célula generadora de contenidos de Geometría Analítica. Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. FAMAFA. Córdoba. Setiembre 2007.

Dorier J.L. & Robert, A & Robinet, J. & Rogalsky (2001): Teaching and learning linear algebra in the first year of French Science University. Equipe Didactique des Mathematiques. Laboratoire Leibniz Grenoble. Ponencia realizada en II Congreso Europeo sobre Educación en Matemática. Marianske. República Checa.

Galperin, P. Y. (1986): "Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales" en Antología de Psicología Pedagógica y de las Edades. Ed. Pueblo y Educación, La Habana.

Hernández Fernández, H. (1989): El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior Cubana. La Habana. Cuba.

Hernández Fernández, H. & Delgado Rubí, J. R & Fernández de Alaiza (2001): Cuestiones de didáctica de la matemática. Homo Sapiens Ediciones. Rosario. Santa Fe. Argentina.

Herrera, C.G.R (2003): Estrategias utilizadas por alumnos en la resolución de situaciones prácticas de Álgebra Lineal. Tesis de Maestría en Docencia Universitaria de Disciplinas Tecnológicas. Universidad Nacional de Catamarca.

Herrera, C.G.R.& Núñez, C.& Dip, H.& Elena, C.R.& Rodríguez, N.L.: (2006): Rendimiento y Calidad de Asimilación de Contenidos de Álgebra y Geometría Analítica. Período 1999-2005. En "Experiencias Docentes en Ingeniería. Desde el ingreso a la práctica profesional supervisada". Pág.: 441-448. ISBN: 987-05-1360-3. Setiembre de 2006.

Herrera, C.G.R & Elena, C.R. (2007): El desarrollo de habilidades matemáticas en alumnos de primer año de ingeniería. Comunicación presentada en la Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. FAMAFA. Córdoba. Setiembre de 2007.