Abril, 2004
Revista de Ciencia y Técnica Nº 11

Sobre la aproximación de valores medios y la aproximación de Stirling.

Conrado Hoffmann – Guillermo N. Leguizamón

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Instituo de Física, Universidad Nacional de Tucumán

RESUMEN: *Se demuestra que la aproximación de Stirling compensa exactamente los errores introducidos por la aproximación de término medio en el cálculo de cumulantes de la suma de variables aleatorias independientes con idéntica distribución.*

SUMMARY: *It is shown that the Stirling approximation exactly compensates the errors introduced by the mean term approximation en the calculation of the cummulants of the sum of independent randon variables with identical distribution.*

En diversas aplicaciones de la teoría de probabilidades, en especial a la termodinámica estadística[1], se aplica la aproximación de Stirling conjuntamente con la (mal llamada) aproximación de término máximo; la hemos calificado como mal llamada, pues en realidad lo que se hace es calcular valores de expresiones utilizando el valor medio (esperanza matemática) del número de ocurrencias n_i de los eventos de interés. En estas notas ponemos de manifiesto que, en ciertos problemas, esas aproximaciones tienen la notable propiedad de compensarse exactamente, para proporcionar el resultado exacto, independientemente del valor del número N de repeticiones del experimento aleatorio en cuestión.

Consideremos la variable aleatoria X, que puede tomar los valores x_1, x_2,..., x_k con probabilidades p_1,p_2,..., p_k. Su primer momento vale:

(1) $m_1 = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_kx_k$

Si consideramos la variable aleatoria $\overline{Y}_N$, suma de N variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidades que X, su primer momento valdrá:

(2) $\overline{Y}_N = N. m_1$

Si ahora calculamos el primer momento $\overline{Y}_N$ utilizando las probabilidades (multinomiales) de ocurrencia de n_1 resultados X_1, n_2 resultados X_2, etc. Obtenemos la expresión:

(3) $\overline{Y}_N = \Sigma \dfrac{N!}{\{n_1\} n_1! n_2! ... n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k} \left[n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k \right]$

La (mal llamada) "aproximación del término máximo" consiste en suponer que esta suma puede ser aproximada tomando un único término A_1 correspondiente a los valores medios $\overline{n_1}$ = p_1N, n_2 = p_2 N, etc., es decir:

(4) $A_1 = \dfrac{N!}{(p_1N)!(p_2N)!...(p_kN)!}\, p_1^{\,p_1N} p_2^{\,p_2N} ... p_K^{\,p_kN}\left[p_1Nx_1 + p_2Nx_2 + ... + p_kNx_k\right]$1

Si ahora aplicamos en esta expresión la aproximación de Stirling:

(5)ln s! $\cong$ s ln s – s,

Se obtiene una segunda "aproximación" A_2:

(6)

$$A_2 = \frac{N^N e^{-N}}{(p_1N)^{(p_1N)} e^{-p_1N} (p_2N)^{(p_2N)} e^{-p_2N} ...}\, p_1^{\,p_1N} p_2^{\,p_2N} ... p_k^{\,p_kN} = N\left[p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_kx_k\right]$$

Es decir se recupera el valor exacto. Nótese que obtendríamos el mismo resultado si hubiéramos puesto simplemente ln s! = s ln s.

Tenemos entonces el siguiente teorema: La aproximación de stirling compensa exactamente los errores introducidos por la aproximación de término medio en el cálculo del primer momento de la suma de N variables aleatorias independientes con idéntica distribución, cualquiera sea el valor de N.

Similar resultado obtenemos para la varianza, y otros momentos aditivos (cumulantes) en la suma de variables aleatorias independientes.

Nótese que para la distribución de Poisson se obtiene un resultado similar, aunque en este caso es necesario utilizar la aproximación ln s! = s ln s –s, sin eliminar el segundo término.

Referencias

(1) J. E. Mayer y M. G. Mayer, "Statistical Mechanics", J. Wiley, Inc., N.Y., (1940).

E. Schrödinger, "Statitiscal Thermodynamics", Dover, N. Y. (1950).