



El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión.

Autor: *Carabús, Olga.*

Dirección: Olca@arnet.com.ar

Av. Virgen del Valle 1071. (4700). Catamarca. Argentina. Tel.-Fax: (03833) 423023
Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas, Universidad Nacional de Catamarca.
Belgrano 300. 4700 – San Fernando del Valle de Catamarca (Argentina).

Introducción:

En el marco que, para la Didáctica del Cálculo, han trazado especialistas como Doaudy, Artigue, Chevillard (Antropología Didáctica) y Brousseau (Teoría de las situaciones didácticas) y teniendo en cuenta los aportes de las investigaciones de Vinner (1983) y Janvier (1987), se estudiaron las estrategias de aprendizaje de los alumnos para poder apropiarse del objeto matemático derivada de una función y a partir de ellas, evaluar los niveles de la comprensión logrados. Para abordar el proceso de conceptualización de la derivada de una función, se relevaron “las imágenes conceptuales” de la derivada, concepciones construidas por los alumnos al resolver las situaciones planteadas.

La investigación sostiene como hipótesis central que la apropiación del concepto derivada, con toda su complejidad, por parte del alumno de la Universidad, se puede facilitar a la luz de la Didáctica del Cálculo, con el uso de los distintos marcos, el “juego de marcos” de Douday(1987), en que este concepto puede ser presentado (geométrico, algebraico, numérico, coloquial, gráfico, icónico e informático).

En efecto, se considera que esta estrategia didáctica funciona como movilizadora y facilitadora de la construcción del concepto derivada porque en el contraste de marcos y lenguajes y las traducciones correspondientes, el alumno podrá ir construyendo las distintas “imágenes conceptuales”, que le permitirán acercarse al concepto matemático propio.

Además las ideas epistemológicas, cognitivas y didácticas que sostienen a la investigación son las siguientes:

- ❖ El Cálculo, como toda matemática, es una actividad que implica la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas. Dentro de las teorías constructivistas piagetianas, las acciones de los estudiantes son consideradas como fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas
- ❖ Las conceptualizaciones tienen un significado personal y un significado institucional. La búsqueda de la correlación entre ambos es tarea permanente en el proceso de enseñanza- aprendizaje
- ❖ El Cálculo es un lenguaje simbólico y tiene una función comunicativa e instrumental
- ❖ El Cálculo es un sistema conceptual lógicamente organizado.

En este trabajo se busca controlar y optimizar el proceso de “la comprensión” del concepto derivada como objeto matemático y como instrumento, a través de “situaciones didácticas” diseñadas a partir del uso múltiple de los distintos marcos y registros correspondientes.

La conceptualización o la comprensión que cada alumno logra de un concepto es la captación o apropiación del significado del objeto (objeto matemático) a que hace referencia el mismo.

La matemática es un sistema conceptual lógicamente estructurado y socialmente compartido. La conceptualización debe contener las siguientes niveles o categorías: **intuitivo** (operatorio), **declarativo** (comunicativo), **argumentativo** (validativo) y **estructural** (institucionalizado). El logro de estos niveles o formas de comprensión para un concepto o un campo conceptual precisa la organización de situaciones o momentos didácticos específicos, que pueden ser asimilados a los que Brousseau (1986) propone en su teoría de situaciones didácticas.

Brousseau distingue, entre las situaciones didácticas que él produce para su estudio experimental, cuatro tipos, cuya secuencia es la siguiente:

1. las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico
2. las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de información entre los alumnos
3. las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen
4. las situaciones de institucionalización, en las que se intenta que los alumnos adquieran el significado social del saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, formulación y validación

Para conocer el nivel alcanzado en el proceso de conceptualización, se tomaron en cuenta los niveles o categorías que pueden acomodarse con los distintos tipos de situaciones didácticas.

Los niveles evaluados y las situaciones didácticas puestas a consideración de los alumnos son: 1) **intuitivo** (operatorio), que se corresponde con **la situación de acción** sobre el concepto y en la que el alumno debe tomar decisiones para organizar su actividad para resolver el problema; 2) **declarativo** (comunicativo), que se corresponde con la situación de comunicación de la información, llamada **situación de formulación**; 3) **argumentativo** (validativo) con la situación didáctica de validación en la que el alumno debe explicar o fundamentar lo que hace y 4) **estructural** (institucionalizado) que se da en la **situación de institucionalización**, en la que se busca la significación social del saber que ha sido adquirido en las situaciones de acción, formulación y validación.

Metodología:

El trabajo de la investigación se centra en el diseño, la validación, la aplicación y la evaluación del instrumento o “test” construido para recoger información sobre las estrategias de aprendizaje de los alumnos en la apropiación del concepto derivada.

El diseño del instrumento se realizó en base a una tabla de especificaciones, en la que se cruzaron los marcos usados para trabajar el concepto derivada, por un lado, y las competencias a valorar (reconocimiento, conceptualización, modelización) por el otro.

Las actividades propuestas en el “test” se presentaron en marcos diferentes (coloquial, algebraico, gráfico, numérico, informático) con sus respectivos registros y se requirieron las traducciones entre los mismos.

Las representaciones algebraicas, tablas, gráficas y expresiones verbales, que contienen la misma información ponen en juego diferentes procesos cognitivos, cada uno relacionados con los otros.

Las representaciones gráficas conectan con las potencialidades de la visualización y se relacionan con la geometría y la topología. Las tablas ponen de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. Las expresiones analíticas o algebraicas conectan con la capacidad simbólica y se vincula con el álgebra. La representación verbal con la capacidad lingüística y es básica para interpretar y relacionar las anteriores.

Instrumento de evaluación de los aprendizajes:

La “prueba” o “test”, como las que se usan de manera corriente en la evaluación de aprendizajes, es del tipo de las llamadas “pruebas objetivas” de opciones múltiples. La prueba ha sido construida con diez ítems de opción múltiple y otro ítem de resolución (la ejecución de un gráfico). Para los ítems de opción múltiple se han tomado cuatro opciones: la respuesta correcta y tres distractores).

El instrumento fue sometido a un análisis de su coherencia interna, lingüística y conceptual, y se analizó la validez y la confiabilidad teniendo en cuenta las indicaciones de la Estadística para este tipo de estudios. Para la validez curricular se recurrió a la opinión de especialistas del área. Para la confiabilidad se analizaron los parámetros de discriminación (ver si el ítem diferencia bien a los alumnos que saben de los que no saben), de dificultad (abscisa del punto de inflexión de la curva de la distribución en relación con rendimiento en la prueba, correspondiente a la alternativa correcta: tiene la interpretación de una mediana) y de adivinación (ordenada al origen de la curva de distribución de la respuesta correcta).

Para garantizar la confiabilidad de cada ítem y en consecuencia de la prueba se aplicó el Testgraf y los ítems se consideraron aceptables cuando:

- a. el parámetro de dificultad varía entre -3 y 3
- b. el parámetro de discriminación varía entre $0,5$ y 2
- c. el parámetro de adivinación entre 0 y $0,20$

Se contrastó la selección de los ítems además con la observación directa de las gráficas de las distribuciones correspondientes a la alternativa correcta y a los distractores.

La prueba validada se aplicó a una población de 100 alumnos de 1° año de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCa.

En el cuerpo o base del ítem está propuesta una actividad que indaga la comprensión del concepto derivada. Se busca estudiar la diversidad de “concepciones” del objeto matemático derivada a partir de las realizaciones de los alumnos.

Las situaciones planteadas ponen en juego el uso de los distintas representaciones ostensivas o directas del objeto derivada. Las actividades propuestas implican traducciones entre representaciones ostensivas de $f(x)$, traducciones entre representaciones ostensivas de $f'(x)$ y la construcción de una representación ostensiva de $f'(x)$ a partir de una representación ostensiva de $f(x)$.

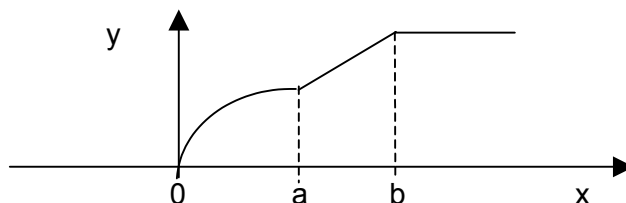
Como se trabaja con cuatro marcos (verbal, tabular, gráfico y simbólico) quedan planteadas una multiplicidad de relaciones entre las distintas formas de representación.

El instrumento contiene situaciones que toman en cuenta las distintas traducciones entre los ostensivos asociados al concepto de derivada: una traducción de un ostensivo verbal a un ostensivo gráfico implica la actividad de realizar un

bosquejo o dibujo de la derivada; una traducción entre una representación verbal a una simbólica implica la elección de un “modelo” para el concepto derivada; una traducción de una representación gráfica a una simbólica importa la realización de un ajuste gráfico; la traducción de un ostensivo simbólico a otro ostensivo simbólico puede significar transformaciones de fórmulas, etc.

Por ejemplo el ítem 9 del instrumento es:

Un automóvil recorre un cierto camino en un tiempo determinado. Si la gráfica del recorrido en función del tiempo es la siguiente:



Puede afirmarse que:

- a. La velocidad en $[0,a]$ aumenta.
- b. La aceleración en $(0,a)$ es positiva.
- c. la velocidad en (a,b) es constante.
- d. ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Es un ítem de opción múltiple donde la opción **c** es la correcta. Las otras tres opciones son distractores, y sirven para mostrar las “imágenes conceptuales” sobre derivada que han construido los alumnos.

Las opción **a**, que es un distractor, muestra la “imagen conceptual” de derivada (velocidad del móvil) coincidente con la gráfica de la función recorrido y la atribución del crecimiento de la función al de la derivada. El alumno que elige esta opción no diferencia la función de la “derivada” de la misma.

La opción **b**, un distractor, permite ver la “imagen conceptual” de la derivada de la derivada de la “función recorrido” representada, o la derivada segunda de la función, la aceleración en este caso. El alumno que elige esta opción no ha construido la imagen conceptual de la aceleración y por ende su significado en la situación planteada

La opción **d**, recoge las posibilidades de una elaboración conceptual del alumno que no está contemplada en las anteriores.

En este ítem el alumno debe elaborar la traducción del marco gráfico al coloquial y establecer las relaciones entre sus respectivas representaciones ostensivas.

Análisis de la información recogida en la experiencia:

La evaluación de la prueba permitió determinar, en primer término, que los ítems del test aplicado que resultaron más fáciles son los numerados con 1 y 8 en el protocolo de la prueba aplicada. En cambio los ítems 9 y 10 del instrumento resultaron los más difíciles. Los restantes ítems tuvieron una dificultad aceptable (entre 16 % y 51 % de respuestas correctas)

En el ítem 9, el distractor más elegido fue el b (48 % de alumnos). El ítem da cuenta de la dificultad conceptual que los estudiantes tienen para la construcción del significado de la derivada de 2° orden.

Este ítem fue integrado al instrumento para recoger información sobre el proceso de elaboración del concepto derivada haciendo un juego de marcos, del marco gráfico al marco verbal o coloquial, y poniendo en ejercicio las traducciones entre sus respectivas representaciones ostensivas.

El ítem 10 propone la traducción al lenguaje del Cálculo de la siguiente expresión: **“La inflación se mantuvo estable este año pero se espera que aumente más y más en los años venideros”**. La opción correcta $dp/dt=0$; $d^2 p/ d t^2 >0$ no fue la más elegida por los alumnos, que optaron por el distractor $dp/dt=k$; $d^2 p/ d t^2 >0$. La explicación está en la atribución del carácter de constante de la inflación a su derivada y la pérdida de sus diferencias conceptuales al tratar de modelizarlas en la situación planteada.

El ítem 11, que propone la ejecución de una gráfica a partir de otra gráfica, resultó difícil para los alumnos. A partir de la gráfica de la derivada se debe realizar un esbozo de la gráfica de la función. Si bien se trabaja aquí sólo en el marco gráfico, ya que de la representación ostensiva de la derivada se solicita la representación de la función, la dificultad tiene que ver con el requerimiento del camino inverso del pensamiento que es necesario abordar. Este ítem pone en evidencia la dificultad que tiene el mismo para los alumnos. La reversibilidad del pensamiento matemático, siguiendo el camino directo junto al inverso, debe ser objeto de enseñanza en el Cálculo, para facilitar la apropiación del concepto del objeto derivada en este caso. De la misma manera que Piaget considera que la reversibilidad del pensamiento infantil facilita la apropiación de las conceptualizaciones de las operaciones inversas.

En los ítems difíciles, las competencias evaluadas son las de conceptualización y modelización.

Los ítems más fáciles son los numerados con 1 y 8, en el protocolo de la prueba. El ítem 1 mide la competencia para el reconocimiento de la expresión algebraica de la derivada de una función. Se trabaja en el marco simbólico. El ítem 8 valora la competencia para la modelización del concepto derivada y se pasa de un marco icónico o gráfico de una trayectoria de movimiento al verbal o coloquial.

La información que aportan estos ítems es que los alumnos trabajan con mayor seguridad en el marco simbólico si la competencia puesta en juego es sólo de

reconocimiento del objeto derivada y además que la modelización del concepto derivada la realizan con facilidad en el marco icónico.

Lo dicho hasta aquí, parece indicar que el concepto de derivada en el Cálculo no debe presentarse, como es habitual, sólo por medio de su definición formal, o sea, en el marco simbólico, que le es tan característico y excluyente en la matemática. Las “imágenes conceptuales” que los alumnos van construyendo del objeto derivada se van descubriendo a través de los errores que registran en su aprendizaje y permiten al profesor ir tomando las medidas adecuadas para corregirlos y orientar así hacia la construcción del concepto matemático.

También revela el instrumento los distintos grados de dificultad que tiene el pasaje de un marco a otro, teniendo el docente un insumo valioso para la secuenciación de las actividades a proponer en el aula.

Otro aspecto relevante dentro de la información recogida es el modo de dar la fundamentación a la elección de una opción. En un ítem, se solicita una explicación sobre la elección de un punto, en el recorrido de montaña que realiza un ciclista, que ofrece mayor dificultad a su marcha. La respuesta correcta no tiene dificultades pero las fundamentaciones dadas para la correspondiente elección son diversas: el mayor porcentaje de alumnos vincula la dificultad con el cansancio del ciclista, olvidando que está en consideración sólo la caracterización del movimiento. No pueden objetivizar el análisis del movimiento e involucran condiciones que son particulares como el cansancio, el mayor esfuerzo, etc.. Un menor porcentaje de alumnos fundamentan correctamente haciendo referencia al valor de la pendiente existente y equiparando la derivada en el punto elegido del recorrido con el valor de la pendiente de la gráfica. Otro porcentaje del estudiantado, habla de “pendiente creciente”. El análisis de esta respuesta, hace pensar que “la imagen conceptual” de pendiente construida por estos alumnos, coincide con la de la gráfica de la función recorrido.

Este ítem ilustra lo difícil que resulta a los alumnos el entrenamiento en el pensamiento variacional o funcional, de estructura diferente de la que tiene el pensamiento algebraico.

Por otra parte se relevaron los niveles de comprensión del concepto derivada, en función de las competencias logradas (reconocimiento, conceptualización y modelación):

1. **intuitivo** (operatorio): 85 % de la población estudiada alcanza este nivel.
2. **declarativo** (comunicativo): 60 % de la población estudiada alcanza este nivel.
3. **argumentativo** (validativo): 40 % de la población estudiada alcanza este nivel.
4. **estructural** (institucionalizado): 30 % de la población estudiada alcanza este nivel.

La puntuación lograda en los niveles de comprensión muestra el desgranamiento de la población estudiada en la conceptualización y es un buen indicador de la creciente dificultad en el logro de la apropiación del concepto derivada de una función. La apropiación del concepto requiere de los cuatro niveles, y en donde cada uno de ellos son abarcativos de los anteriores.

Conclusiones:

1. A través de este trabajo de investigación se relevaron las distintas “imágenes conceptuales” que los alumnos fueron construyendo sobre el objeto matemático “derivada de una función”. Ellas son:
 - a. la concepción de la derivada de la función como la gráfica de la función, atribuyendo a la derivada el crecimiento y decrecimiento de la función, por ejemplo, el crecimiento o decrecimiento de la función recorrido de un móvil, espacio en función del tiempo, a la velocidad del mismo móvil en ese recorrido;
 - b. la derivada de una función como una expresión algebraica o fórmula que pueden reconocer, pero que en la que no encuentran el significado, en cada situación planteada;
 - c. la derivada de una función como un algoritmo aplicado a la función;
 - d. la derivada como el límite del cociente incremental;
 - e. la derivada como un valor numérico único, el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto, y no como una relación funcional, que da para cada valor del dominio, la pendiente de la tangente;
 - f. la derivada como velocidad instantánea de un móvil, no distinguiendo el objeto derivada y el instrumento derivada;
 - g. la función derivada como correspondencia entre valores de dos conjuntos,
 - h. la concepción de la derivada como transformación de cantidades de magnitudes variables. La escasa presencia de esta última concepción de la derivada nos lleva a pensar que la dificultad está en la percepción de la función derivada como un “proceso”. El aprendizaje del concepto, requiere de la adquisición de la flexibilidad entre derivada, vista como un proceso y la derivada, vista como un concepto.

Es claro advertir aquí las dos etapas en el aprendizaje o status de los objetos matemáticos: status operacional, dinámico y el status estructural, estático. El primero precede al segundo en el aprendizaje, como sucede en la historia de los conceptos. Las situaciones didácticas tienen en cuenta a la derivada como instrumento y la derivada como objeto y buscan como

recurso metodológico el ejercicio de la dialéctica instrumento–objeto de este concepto.

2. Se advierte un “obstáculo epistemológico” (Bachelard, 1983) de la concepción de la derivada como tasa instantánea de variación de una variable en función de otra, de la variable dependiente en función de la variable independiente.
3. En cuanto a los niveles de comprensión, del procesamiento de la información recogida, resulta que los dos primeros niveles (intuitivo y declarativo) de la comprensión conceptual son alcanzados por más de la mitad de la población estudiada. Los niveles superiores (argumentativo y estructural o institucional) son alcanzados por un menor porcentaje de alumnos, denotando la dificultad de los alumnos en los procesos de validación y de institucionalización del concepto. Como estos niveles de la comprensión se han correlacionado con las “situaciones didácticas” de validación y de institucionalización, respectivamente, el diseño de las acciones didácticas o ingenierías didácticas parece requerir de una concepción de “situaciones didácticas” que provoquen y controlen esos procesos últimos de la comprensión, la validación e institucionalización, para optimizar el trabajo de conceptualización de la derivada.
4. Por otra parte, al aplicar la estrategia didáctica del “juego de los marcos”, se relevó la dificultad que los alumnos tienen para relacionar eficazmente los diferentes registros semióticos que permiten trabajar funciones y sus derivadas y relacionar puntos de vistas puntual, local y global en el tratamiento de las representaciones ostensivas que han usado
La dificultad en la traducción del registro gráfico al algebraico y en el trabajo simultáneo de informaciones referentes a nociones diferentes dentro de un mismo registro, por ejemplo la función y su derivada en el registro gráfico (ítem 9), requiere de un mayor peso en las prácticas usuales de su enseñanza. Esto es, reforzar su enseñanza con diversos tipos de actividades que propendan al uso inteligente de las representaciones gráficas de función y su derivada, y dar un verdadero estatuto al razonamiento gráfico dentro del tratamiento del Cálculo.
La incorporación de las graficadoras y de los soportes informáticos del Cálculo permiten automatizar y, por lo tanto, facilitar y simplificar algunas de las posibles traducciones entre las representaciones funcionales.

5. En general, se advierte la dificultad para adquirir el pensamiento propio del Cálculo: el pensamiento funcional o variacional y el fuerte apego al pensamiento numérico y algebraico.

Para acceder al tipo de pensamiento funcional o variacional del Cálculo, la actitud del docente universitario debe ser distinta, generadora de las estrategias didácticas que brinden a los alumnos, la posibilidad o responsabilidad de elección de los modos de pensamiento que deben utilizar o elegir ante una determinada situación problemática.

Los resultados de esta experimentación indican que debe darse énfasis al pensamiento y lenguaje funcional mostrando a los alumnos las ventajas que le son propias. Aparece así la modelización funcional como la estrategia irrenunciable en las aulas de Cálculo en la Universidad. Pero el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes requiere de procesos temporalmente prolongados con respecto a los tiempos didácticos habituales. Implica un dominio de la matemática básica y exige una ruptura con el pensamiento prevariacional, como el algebraico ampliamente estudiado por Artigue(1998). Esta ruptura importa un nuevo paradigma de rigor y un pasaje del pensamiento o razonamiento por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes. No obstante quedan posibilidades ciertas para ir optimizando este aprendizaje a través de situaciones didácticas destinadas vencer los obstáculos epistemológicos que le son propios.

En este trabajo se presenta el aprendizaje del concepto derivada en el nivel universitario en particular, teniendo en la mira la construcción del pensamiento y lenguaje variacional, propio del Cálculo.

Bibliografía:

- Barbin E. y Douady R. 1996. La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencias entre los saberes, los programas y la práctica. TOPIQUES éditions. Francia.
- Artigue, M.; Douady R. y otros. 1995. Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
- Rodríguez Diéguez, Jos Lúis. 1980. Didáctica General. Objetivos y evaluación. Editorial Cincel.
- Artigue, Michele. 1998. L'évolution des problematiques en didactique del L'Analyse. Equipe DIDIREM, Université París 7 et de Reims.
- Artigue, Michele. 1993. Enseignement de L'analyse et fonctions de reference. IUFM de Reims et Equipe DIDIREM, Université París 7.
- Ramsay J.O. 1996. TESGRAF a Programan for the Graphical Analysis of Multiple Choice Test and Questionnaire Data. McGill University.
- Hernández Fernández H.; Delgado Rubí, J. y Fernández de Alaíza, B. 1997 "Cuestiones de didáctica de la Matemática" Homo-Sapiens Ediciones. Rosario Argentina.
- Mason, John; Burton, Leone; Stacey, Kaye. 1992. "Pensar matemáticamente" M.E.C. Edit. Labor. Barcelona.
- Wenzelburger, Elfriede. 1993. "Cálculo Diferencial – Didáctica". Grupo Editorial Iberoamericano. México.
- Wenzelburger, Elfriede. 1994. "Cálculo Integral – Didáctica". Grupo Editorial Iberoamericano. México.
- Cordero, Francisco; Solís, Miguel. 1995. "Las gráficas de funciones como una argumentación del Cálculo- Didáctica". Grupo Editorial Iberoamericano. México.
- Pérez Pantaleón, G. 2001. "Metodología de la Enseñanza de la Matemática" (I, II, III y IV) . Universidad Nacional de Tucumán.